

# Minimisation de la puissance émise dans les réseaux ad hoc mobiles utilisant l'ARQ hybride de Type-I sur canal de Rice

Xavier LETURC<sup>1,2</sup>, Christophe LE MARTRET<sup>1</sup>, Philippe CIBLAT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Thales Communications & Security  
4 Avenue des Louvresses, 92230 Gennevilliers, France

<sup>2</sup>Télécom ParisTech & Université Paris-Saclay  
46 Rue Barrault, 75013 Paris, France

{xavier.leturc,christophe.le\_martret}@thalesgroup.com,  
philippe.ciblat@telecom-paristech.fr

**Résumé** – Nous traitons le problème de l'allocation conjointe de puissance et de bande de fréquence dans les réseaux ad hoc mobiles utilisant le mécanisme de l'ARQ hybride de type I afin de minimiser la puissance totale émise. Nous considérons que les émetteurs ne connaissent que la statistique du canal. L'originalité de notre approche réside dans le fait que nous traitons le cas du canal de Rice qui généralise le cas Rayleigh conventionnellement traité dans la littérature.

**Abstract** – We address the problem of joint power and bandwidth allocation in mobile ad hoc networks based on type I HARQ, when the objective is to minimize the total transmit power. We consider that only the statistical channel state information is available at the transmitter to perform the allocation. The novelty of the paper is the fact that we tackle the Rician channel case which extends the Rayleigh one that is usually considered in the literature.

## 1 Introduction

Les protocoles ARQ hybride (HARQ) consistent en la combinaison d'un mécanisme de retransmission avec un code correcteur d'erreurs. Ces protocoles permettent d'améliorer la fiabilité des communications sans fil sur des canaux variants dans le temps. Dans cet article, nous développons un algorithme d'allocation de ressources en terme de puissance et de bande visant à minimiser la puissance totale émise pour les réseaux ad hoc mobiles utilisant les HARQ de type I avec des schémas de modulations et de codages (SMC) pratiques, sous contrainte de qualité de service.

Nous supposons que le canal de propagation est de type Rice (qui inclut le cas Rayleigh) et que nous ne connaissons que les paramètres statistiques du canal pour effectuer l'allocation. Ce cas est original puisqu'à notre connaissance aucun travail n'a traité le problème de la minimisation de la puissance dans le cas du canal de Rice avec une connaissance statistique du canal et des SMC pratiques. Dans le cas spécifique du canal de Rayleigh, on peut citer pour mémoire [1] et [2].

La contrainte de qualité de service considérée dans notre problème est un *goodput* minimal par lien, dont l'expression fait intervenir la probabilité d'erreur paquet (TEP) dans le canal de Rice. Comme il n'existe pas d'expression exacte pour cette probabilité, nous commençons par proposer une expression analytique approchée. Ceci nous permet alors de poser le problème d'optimisation sous une forme analytique qui se ramène à un

problème convexe dont nous dérivons la solution optimale.

L'article est organisé de la façon suivante : le modèle du système de communications considéré est présenté en section 2. L'approximation du TEP sur canal de Rice est développée en section 3 tandis que le problème de la minimisation de la puissance émise est posé et résolu en section 4. Les résultats numériques sont discutés en section 5, et une conclusion est donnée en section 6.

## 2 Modèle du système

Nous considérons un réseau ad hoc clusterisé. Chaque cluster utilise une technique d'accès de type OFDMA sur  $N_c$  sous-porteuses dans une bande de fréquence  $B$ . On suppose ici que chaque cluster possède une bande propre et qu'il n'y a pas lieu de considérer d'interférence. Un cluster opère  $L$  liens simultanément pour lesquels on va chercher à attribuer les ressources suivantes : puissance d'émission et proportion de la bande de fréquence (en nombre de sous-porteuses). Dans chaque cluster, un nœud est élu afin de réaliser l'allocation de ressources de manière centralisée. Il collecte les informations statistiques relatives aux canaux des différents liens, et calcule les ressources qui leur seront attribuées.

Chaque lien subit un canal à trajets multiples, constant sur la durée d'un symbole OFDMA, et variant indépendamment d'un symbole à l'autre. Cette modélisation correspond par exemple

à un système utilisant une technique à sauts de fréquence en conjonction avec un entrelaceur. Nous définissons la réponse impulsionnelle du canal sur le lien  $\ell$  durant le symbole OFDMA  $j$  par  $\mathbf{h}_\ell(j) = [h_\ell(j,0), \dots, h_\ell(j, M-1)]^T$ , avec  $(\cdot)^T$  l'opérateur transposition, et  $\mathbf{h}_\ell(j) \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_\ell, \boldsymbol{\Sigma}_\ell)$ , où  $\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_\ell, \boldsymbol{\Sigma}_\ell)$  est la loi normale complexe multivariée de moyenne  $\boldsymbol{\mu}_\ell := [\mu_\ell, 0, \dots, 0]^T$  et de covariance  $\boldsymbol{\Sigma}_\ell := \text{diag}_{M \times M}(\zeta_{\ell,0}^2, \dots, \zeta_{\ell,M-1}^2)$ . Ainsi, lorsque la moyenne  $\mu_\ell > 0$ , le module du premier trajet suit une loi de Rice alors que le module des autres trajets suit une loi de Rayleigh. Si  $\mu_\ell = 0$ , on se retrouve dans le cas Rayleigh comme dans [1].

Le signal reçu sur la sous-porteuse  $n$  du lien  $\ell$  au symbole OFDMA  $j$  peut s'écrire

$$Y_\ell(j,n) = \sqrt{\Lambda_\ell} H_\ell(j,n) X_\ell(j,n) + Z_\ell(j,n), \quad (1)$$

où  $\Lambda_\ell$  est un coefficient déterministe d'atténuation qui est fonction de la distance  $D_\ell$  entre les nœuds du lien  $\ell$ ,  $\mathbf{H}_\ell(j) := [H_\ell(j,0), \dots, H_\ell(j, N_c - 1)]^T$  correspond à la transformée de Fourier discrète de  $\mathbf{h}_\ell(j)$ ,  $X_\ell(j,n)$  est le symbole  $j$  transmis sur la sous-porteuse  $n$  et  $Z_\ell(j,n) \sim \mathcal{CN}(0, N_0 B/N_c)$ , avec  $N_0$  la densité spectrale d'énergie du bruit. Nous avons  $H_\ell(j,n) \sim \mathcal{CN}(\mu_{\ell,n}, \zeta_\ell^2)$  où  $\zeta_\ell^2 := \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_\ell)$  et  $\mu_{\ell,n} := \mu_\ell e^{-j2\pi n/N_c}$ . Ainsi,  $|H_\ell(j,n)|$  suit une loi de Rice de paramètres  $\Omega_\ell := |\mu_\ell|^2 + \zeta_\ell^2$  et  $K_\ell := |\mu_\ell|^2/\zeta_\ell^2$ .

Le gain moyen du canal sur le lien  $\ell$  est alors défini par

$$G_\ell := \frac{\Lambda_\ell \mathbb{E}[|H_\ell(i,n)|^2]}{N_0} = \frac{\Lambda_\ell \Omega_\ell}{N_0}. \quad (2)$$

Nous posons, sans perte de généralité,  $\Omega_\ell = 1$  pour tout  $\ell$ .

Comme expliqué précédemment, le nœud qui effectue l'allocation de ressource ne dispose que de la statistique du canal de chaque lien, c.-à-d. de  $G_\ell$  et  $K_\ell$ . La puissance allouée sur le lien  $\ell$  est identique sur chaque porteuse, elle est donnée par  $P_\ell := \mathbb{E}[|X_\ell(j,n)|^2]$ . De plus, notant  $n_\ell$  le nombre de porteuses attribuées au lien  $\ell$ , l'énergie consommée par ce lien pour transmettre un symbole OFDMA est alors donnée par  $\gamma_\ell E_\ell/B$ , où  $\gamma_\ell := n_\ell/N_c$  est la proportion de bande attribuée au lien  $\ell$ , et  $E_\ell := N_c P_\ell/B$ . Nous pouvons alors définir le rapport signal à bruit (RSB) moyen du lien  $\ell$  par

$$\overline{\text{snr}}_\ell := G_\ell E_\ell. \quad (3)$$

On suppose que la voie de retour du protocole HARQ est sans erreur.

### 3 Probabilité d'erreur paquet sur canal de Rice

L'une des principales difficultés liée à l'étude des HARQ avec des SMC pratiques provient de l'absence de forme analytique simple pour prédire leur TEP sur un canal avec évanouissement rapide. Dans ce contexte, nous pouvons citer [3] où une approximation du TEP est proposée pour le cas où le canal est supposé constant sur la durée d'un paquet d'information et plat en fréquence. Dans [4], les auteurs utilisent le concept de RSB

équivalent pour prédire le TEP ; cependant, cette technique requiert une connaissance de la réponse impulsionnelle du canal. Les auteurs de [1] proposent d'utiliser une borne supérieure du TEP pour effectuer leur allocation basée sur une connaissance statistique du canal, dans le cas d'un canal de Rayleigh.

Afin d'approximer le TEP sur un canal de Rice, nous nous basons sur une approche proposée dans [5], où les auteurs remarquent que le TEP en sortie du décodeur de Viterbi évolue approximativement de façon linéaire avec le taux d'erreur bit (TEB) dans le domaine logarithmique. Cette remarque permet d'approximer le TEP  $q_\ell$  par  $\tilde{q}_\ell$ , qui s'écrit

$$\tilde{q}_\ell(\overline{\text{snr}}_\ell) = (\text{TEB}_\ell(\overline{\text{snr}}_\ell))^{a_\ell} e^{b_\ell}, \quad (4)$$

où  $\text{TEB}_\ell$  est le TEB non codé du lien  $\ell$  sur le canal de Rice de paramètre  $K_\ell$  et  $a_\ell$  et  $b_\ell$  sont des paramètres dépendants de la longueur du paquet, du code convolutif ainsi que du paramètre  $K_\ell$  de Rice. Ces coefficients peuvent être obtenus numériquement par la méthode des moindres carrés.

Pour utiliser (4), il est nécessaire d'avoir une expression du TEB non codé sur le canal de Rice. Ce TEB est donné par

$$\text{TEB}_\ell(\overline{\text{snr}}_\ell) = \mathbb{E}_{\text{snr}_\ell}[\text{TEB}_{\ell,\text{CG}}(\text{snr}_\ell)], \quad (5)$$

où  $\text{snr}_\ell := |h_\ell|^2 \overline{\text{snr}}_\ell$  est le RSB instantané sur une sous-porteuse,  $\mathbb{E}_{\text{snr}_\ell}[\cdot]$  représente l'espérance mathématiques prise sur les valeurs possibles de  $\text{snr}_\ell$ , et  $\text{TEB}_{\ell,\text{CG}}$  est le TEB non codé du lien  $\ell$  sur le canal gaussien, qui peut être approximé par

$$\text{TEB}_{\ell,\text{CG}}(\text{snr}_\ell) \approx \psi_\ell Q(\sqrt{\beta_\ell \text{snr}_\ell}), \quad (6)$$

avec  $\psi_\ell$  et  $\beta_\ell$  des paramètres dépendants de la modulation [6], et  $Q(\cdot)$  la fonction  $Q$ .

Une expression du TEB peut être obtenue en insérant (6) dans (5) qui se présente alors sous la forme d'une intégrale. Aussi, afin d'obtenir une expression plus simple à manipuler de  $\text{TEB}_{\ell,\text{CG}}$ , nous proposons d'approximer la fonction  $Q$  par une somme d'exponentielles, comme suggéré dans [7], ce qui s'écrit

$$Q(x) \approx \sum_{i=1}^{i_m} \delta_i e^{-\theta_i x^2}, \quad (7)$$

où  $\delta_i$  et  $\theta_i$  sont des coefficients obtenus par la méthode des moindres carrés, et  $i_m$  est le nombre de termes dans la somme. Dans cet article, nous utiliserons les coefficients proposés dans [7], avec notamment  $i_m = 4$ . En combinant (5), (6) et (7), nous obtenons

$$\text{TEB}_\ell(\overline{\text{snr}}_\ell) \approx \psi_\ell \sum_{i=1}^4 \delta_i \frac{e^{-A_{\ell,i}}}{1 + \theta_i \beta_\ell \overline{\text{snr}}_\ell \zeta_\ell^2}. \quad (8)$$

où  $A_{\ell,i} := \theta_i \beta_\ell \overline{\text{snr}}_\ell |\mu_\ell|^2 / (1 + \theta_i \beta_\ell \overline{\text{snr}}_\ell \zeta_\ell^2)$ . La validité de l'approximation obtenue est vérifiée avec succès en section 5.

### 4 Minimisation de la puissance émise

Dans cette section, nous résolvons le problème de la détermination de la puissance et du nombre de sous-porteuses par

lien, minimisant la puissance totale émise, sous contraintes par lien de puissance maximale et de qualité de service minimale. La contrainte de puissance maximale par lien s'écrit :

$$\forall \ell, \quad \gamma_\ell E_\ell \leq W_{M,\ell}, \quad (9)$$

où  $W_{M,\ell}$  est la valeur de puissance maximale autorisée pour le lien  $\ell$ . En utilisant l'approximation (4), la contrainte de *goodput* minimal s'écrit [1] :

$$\forall \ell, \quad \gamma_\ell \nu_\ell (1 - \tilde{q}_\ell(G_\ell E_\ell)) \geq \eta_\ell^{(0)}, \quad (10)$$

où  $\nu_\ell := R_\ell m_\ell$  avec  $R_\ell$  le rendement du code et  $m_\ell$  l'ordre de la modulation utilisée sur le lien  $\ell$ . Le problème de la minimisation de la puissance émise sous contraintes s'écrit alors :

### Problème 1

$$\min_{\mathbf{E}, \boldsymbol{\gamma}} \quad \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell E_\ell \quad (11)$$

$$\text{s.c.} \quad (9), (10)$$

$$\sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell \leq 1, \quad (12)$$

$$\gamma_\ell > 0, E_\ell > 0, \quad \forall \ell, \quad (13)$$

où  $\mathbf{E} := [E_1, \dots, E_L]$  et  $\boldsymbol{\gamma} := [\gamma_1, \dots, \gamma_L]$ .

Le problème 1 n'est pas convexe puisque ni la fonction objectif (11) ni la contrainte de puissance maximale (9) ne sont convexes. Pour contourner cette difficulté, nous effectuons le changement de variables  $W_\ell := \gamma_\ell E_\ell$ , et le problème 1 peut se ré-écrire sous la forme équivalente suivante :

### Problème 2

$$\min_{\mathbf{W}, \boldsymbol{\gamma}} \quad \sum_{\ell=1}^L W_\ell \quad (14)$$

$$\text{s.c.} \quad W_\ell \leq W_{M,\ell}, \quad \forall \ell, \quad (15)$$

$$\gamma_\ell \nu_\ell (1 - \tilde{q}_\ell(G_\ell W_\ell / \gamma_\ell)) \geq \eta_\ell^{(0)}, \quad \forall \ell, \quad (16)$$

$$\sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell \leq 1, \quad (17)$$

$$\gamma_\ell > 0, W_\ell > 0, \quad \forall \ell, \quad (18)$$

où  $\mathbf{W} := [W_1, \dots, W_L]$ .

Nous pouvons alors montrer que le problème 2 consiste en la minimisation d'une fonction convexe sur un ensemble convexe. Pour étudier la faisabilité du problème 2 (et donc du problème 1), comme effectué dans [2], nous définissons

$$\mathcal{H}_\ell(x) := \nu_\ell x \left( 1 - \tilde{q}_\ell \left( \frac{G_\ell W_{M,\ell}}{x} \right) \right) - \eta_\ell^{(0)}, \quad (19)$$

et  $\gamma_\ell^{(0)}$  le plus petit zéro de  $\mathcal{H}_\ell$  sur  $(0,1)$ . Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que le problème 1 soit faisable est que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$\sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell^{(0)} \leq 1. \quad (20)$$

Comme le problème 2 est convexe, nous savons que les conditions de Karush–Kuhn–Tucker (KKT) sont nécessaires et suffisantes pour trouver la solution optimale de ce problème [8]. Pour exhiber cette solution optimale, nous définissons les fonctions  $\mathcal{F}_\ell(x) := (q_\ell(x) - 1)/q'_\ell(x) - x$  et  $\mathcal{G}_\ell(x) := \eta_\ell^{(0)}/(\nu_\ell(1 - \mathcal{F}_\ell^{(-1)}(xG_\ell)))$  où  $q'_\ell(x)$  est la dérivée première de  $q_\ell(x)$ . Nous définissons aussi  $I_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ , l'ensemble des liens tel que  $\lambda > \mathcal{F}_\ell(G_\ell W_{M,\ell}/\gamma_\ell^{(0)})$  et  $\bar{I}_\lambda$  l'ensemble complémentaire tel que  $I_\lambda \cup \bar{I}_\lambda = \{1, \dots, L\}$ . Finalement, nous définissons

$$\Gamma(\lambda) := \sum_{\ell \in I_\lambda} \gamma_\ell^{(0)} + \sum_{\ell \in \bar{I}_\lambda} \mathcal{G}_\ell(\lambda). \quad (21)$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer la solution optimale du problème 2 sous la forme du théorème suivant :

**Théorème 1** *Si  $\Gamma(0) < 1$ , la solution optimale est donnée par  $\gamma_\ell^* = \mathcal{G}_\ell(0)$  et  $W_\ell^* = \gamma_\ell^*/G_\ell \mathcal{F}_\ell^{-1}(0)$  pour tout  $\ell$ .*

*Autrement, la solution optimale est donnée par  $\gamma_\ell^* = \mathcal{G}_\ell(\lambda^*)$  et  $W_\ell^* = \gamma_\ell^*/G_\ell \mathcal{F}_\ell^{-1}(\lambda^*)$  pour les liens dans  $\bar{I}_{\lambda^*}$  et pour les autres liens  $\gamma_\ell^* = \gamma_\ell^{(0)}$  et  $W_\ell^* = W_{M,\ell}$ , où  $\lambda^*$  est l'unique solution de  $\Gamma(\lambda^*) = 1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .*

Le problème se résout donc par une simple recherche monodimensionnelle de la valeur optimale de  $\lambda$ .

## 5 Résultats numériques

Dans cette section, nous examinons d'abord la précision de l'approximation du TEP proposée en section 3. Pour ce faire, nous avons simulé les performances d'une modulation QPSK associée à un code convolutif de rendement  $R_\ell = 1/2$  et de polynômes générateurs  $[171,133]_8$  dans un canal de Rice pour deux valeurs du paramètre  $K_\ell$  ( $K_\ell = 0$  et  $K_\ell = 10$ ). La figure 1 montre que l'approximation de la section 3 permet de bien approximer la probabilité d'erreur paquet sur le canal de Rice, confortant ainsi l'emploi de cette approximation dans notre modélisation.

Nous étudions maintenant les résultats produits par l'algorithme d'allocation de ressources de la section 4. Pour évaluer cet algorithme, nous avons considéré un réseau constitué de  $L = 8$  liens. La distance  $D_\ell$  est tirée aléatoirement suivant une loi uniforme dans  $[50, 1000]$  m. On pose  $B = 5$  MHz,  $N_0 = -170$  dBm/Hz et des paquets de longueur 128. La contrainte de puissance maximale est fixée à 28 dBm et la contrainte de *goodput*, identique pour chaque lien, est donnée par  $\eta_\ell^{(0)} := G_p/(BL)$ , où  $G_p$  est une constante qui peut s'interpréter comme la somme sur tous les liens des valeurs des contraintes de *goodput*. La fréquence porteuse est  $f_c = 2400$  MHz et nous prenons  $\Lambda_\ell = (4\pi f_c/c)^{-2} D_\ell^{-3}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Chaque point est obtenu à l'aide de 100 simulations de Monte Carlo. Nous utilisons le même SMC que pour la figure 1.

Nous considérons trois scénarios, **S1** : tous les liens expérimentent un canal de Rayleigh, **S2** : deux liens parmi  $L$  expérimentent un canal de Rice de paramètre  $K_\ell = 10$ , **S3** : tous les

liens expérimentent un canal de Rice de paramètre  $K_\ell = 10$ . La figure 2 représente la moyenne sur l'ensemble des réalisations de la somme des puissances optimales sur tous les liens ( $\sum_{\ell=1}^L W_\ell$ ). Les résultats obtenus sont conformes à ce qu'on pouvait attendre, c.-à-d., plus le nombre de canaux de type Rice est grand (le reste étant Rayleigh), moins il faut émettre de puissance. Ceci s'explique simplement par le fait : i) à RSB moyen donné, le TEP est plus faible pour le canal de Rice que sur le canal de Rayleigh, ii) on cherche la solution qui minimise la puissance transmise satisfaisant un *goodput* minimal. Les courbes montrent que la réduction de puissance est non négligeable. Par exemple pour  $G_p = 3200$  kbps, elle est de 0,4 dBm (soit 10 %) entre **S1** et **S2**, et de 1.9 dBm (soit 35 %) entre **S1** et **S3**. Ces gains en puissance se traduisent par une augmentation de la durée d'utilisation des équipements, les batteries étant moins sollicitées. Ainsi,  $x$  % de gain en puissance induit un gain en durée supérieur ou égal à  $x$  % en supposant une émission continue des paquets. Cette réduction peut aussi s'interpréter comme le gain d'économie de puissance apporté dans un canal de Rice si l'on réalise l'allocation optimale par rapport à une allocation de ressources faite en supposant les canaux de type Rayleigh. Cela démontre bien l'intérêt d'avoir une allocation de ressources adaptée à la statistique du canal.

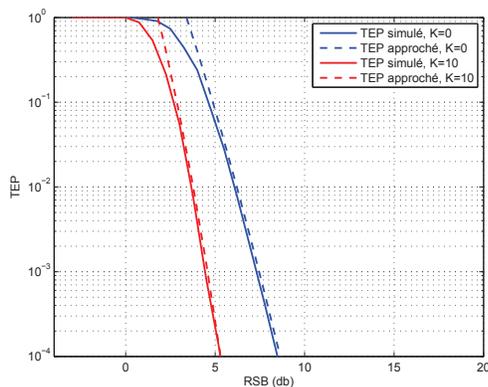


FIGURE 1 – Comparaison des TEP obtenus par simulation et via l'approximation (4), pour une modulation QPSK et un code convolutif de rendement 1/2.

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un algorithme d'allocation de ressources multi-utilisateurs pour les HARQ de Type I dans les réseaux ad hoc sur canal de Rice. Il permet d'allouer les sous-porteuses OFDMA aux utilisateurs et la puissance associée en minimisant la puissance totale transmise sous contraintes de *goodput*. Nous avons proposé de poser le problème initial en utilisant une approximation du TEP dans un canal de Rice permettant ainsi de résoudre les conditions KKT. La solution optimale se ramène à l'optimisation numérique d'une seule va-

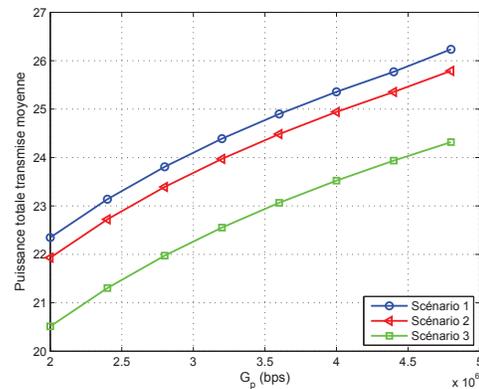


FIGURE 2 – Puissance optimale totale transmise moyenne en fonction de  $G_p$  pour les différents scénarios.

riable réelle. Les résultats de simulations montrent des performances en accord avec les résultats attendus.

## Références

- [1] S. Marcille, P. Ciblat, and C. J. Le Martret, "Resource allocation for type-I HARQ based wireless ad hoc networks," *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 1, no. 6, pp. 597–600, Dec. 2012.
- [2] N. Ksairi, P. Ciblat, and C. J. Le Martret, "Near-optimal resource allocation for type-II HARQ based OFDMA networks under rate and power constraints," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 13, no. 10, pp. 5621–5634, Oct. 2014.
- [3] P. Ferrand, J.-M. Gorce, and C. Goursaud, "Approximations of the packet error rate under quasi-static fading in direct and relayed links," *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, vol. 2015, no. 1, p. 12, 2015.
- [4] I. Stupia, V. Lottici, F. Giannetti, and L. Vandendorpe, "Link resource adaptation for multiantenna bit-interleaved coded multicarrier systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 7, pp. 3644–3656, Jul. 2012.
- [5] F. Peng, J. Zhang, and W. E. Ryan, "Adaptive modulation and coding for IEEE 802.11n," in *2007 IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, Mar. 2007, pp. 656–661.
- [6] A. Goldsmith, *Wireless communications*. Cambridge university press, 2005.
- [7] C. Y. Lou and B. Daneshrad, "PER prediction for convolutionally coded mimo ofdm systems - an analytical approach," in *MILCOM 2012 - 2012 IEEE Military Communications Conference*, Oct. 2012, pp. 1–6.
- [8] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.