

Principe de la couche physique LoRa et analyse de ses performances

Guillaume FERRÉ, Audrey GIREMUS

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système

351 cours de la libération, 33400 Talence, France

guillaume.ferre@ims-bordeaux.fr, audrey.giremus@ims-bordeaux.fr

Résumé – Cette communication a pour objectif d'analyser les principes généraux de la technique de communications numériques LoRa, qui est utilisée dans le contexte de l'Internet des Objets. La principale contribution est de proposer des expressions formelles pour les probabilités d'erreurs symbole et binaire. La pertinence de ces dernières est validée par des résultats de simulation.

Abstract – This communication aims at analyzing the LoRa technology that is used in the Internet of Things. After introducing the main principles of the physical layer, the main contribution is to derive closed-form expressions of the symbol and bit probabilities of error. The latter are validated by simulation results.

1 Introduction

L'Internet des objets (IoT), qui s'inscrit dans la 5G, permet de rendre une ville, une voiture ou une maison intelligente. Le concept est de connecter n'importe quel objet à Internet afin que ce dernier puisse émettre de l'information (à destination d'un autre objet, d'une personne, etc.) ou en recevoir (depuis un objet, une personne, etc.). Faire communiquer un objet ne représente pas en soit un gros défi. En effet, un objet n'aura généralement pas beaucoup d'informations à transmettre ou recevoir, et en fonction des cas d'usages, il pourra communiquer une fois par jour, par semaine, par mois, voire par an. La vraie difficulté provient plutôt de la quantité d'objets à faire dialoguer ou encore de la durée de vie de la batterie des objets non connectés au réseau électrique.

L'IoT ou encore les objets connectés (OC), est devenu une réalité avec le déploiement de réseaux comme celui de SigFox [1] ou encore comme ceux d'Orange et Bouygues Télécoms à partir de la technologie développée par Semtech : le LoRa (Long Range) [2]. En effet, avec ces technologies, il est d'ores et déjà possible de connecter n'importe quel objet à Internet par l'intermédiaire des bandes libres d'utilisation. En parallèle de ces solutions bas débit déployables dans des bandes non-licenciées, 3GPP a initié la normalisation de plusieurs standards dédiés à l'IoT pouvant utiliser l'infrastructure des réseaux 2G et 4G, et donc des bandes licenciées. Ces standards sont : EC-GSM (Extended Coverage GSM), NB-IoT (Narrow band IoT) et LTE-M (LTE - Machine type communication). Les applications de l'IoT étant très nombreuses, il ne se dégage pas aujourd'hui une technologie capable de les traiter tous efficacement. Une partie des solutions déployées ou en cours de déploiement apparaissent donc plutôt comme complémentaires et non concurrentes.

Cette communication est dédiée à la technique LoRa avec pour objectifs d'une part de présenter le principe de sa couche

physique et d'autre part d'analyser ses performances en termes de probabilité d'erreur. Le papier est organisé de la façon suivante : la partie 2 présente la couche physique LoRa. La partie 3 détaille les calculs permettant de démontrer les expressions des probabilités d'erreurs symbole et binaire de la modulation. Enfin, les résultats de simulations précèdent la conclusion de nos travaux.

2 La couche physique LoRa

La technologie LoRa fut inventée par la société Grenobleise Cycléo, puis exploitée par Semtech qui l'a brevetée et qui vend aujourd'hui les puces LoRa. La lecture du brevet [3] permet d'obtenir de précieuses informations sur la couche PHY, comme notamment la technique de modulation utilisée qui repose sur un étalement de spectre : le CSS (chirp spread spectrum) [4]. Plusieurs longueurs d'étalement sont disponibles. Elles permettent notamment de réguler le débit binaire, d'améliorer la portée et de réduire la consommation d'énergie. LoRa fonctionne dans les bandes ISM 169, 433, 868 (Europe) et 915 MHz. D'après les autorités de régulations, en fonction de la sous-bande utilisée, un duty-cycle de 0.1 à 1 % doit être respecté afin de limiter les interférences. Contrairement à d'autres technologies IoT, la gestion du réseau LoRa n'est pas propriétaire. Ainsi, toute personne souhaitant déployer une station de base (voire un réseau) LoRa et proposer un service peut le faire. Les couches supérieures LoRa peuvent être propriétaires ou standardisées. Le standard le plus populaire est celui développé par l'alliance LoRa : LoRaWAN [5].

2.1 Principe de la couche physique

Le flux d'information binaire arrivant de la couche MAC est tout d'abord segmenté en sous-ensembles de $SF \in [7 \dots 12]$ bits disjoints. Un ensemble de SF bits constitue un symbole,

le nombre total de symboles possibles étant 2^{SF} . Pour LoRa, en plus de désigner le nombre de bits par symbole, SF désigne également le facteur d'étalement. Si on note D_s le débit symbole et D_b le débit binaire, ils sont reliés par $D_s = D_b/SF$.

L'étalement de spectre est obtenu par un signal dit *chirp* qui varie continument et linéairement en fréquence. Si la variation de fréquence est telle que sa dérivée est positive, on parle de rampe montante (*up chirp*) alors que si elle est négative, il s'agit d'une rampe descendante (*down chirp*). Afin d'obtenir de bonnes performances de synchronisations temps/fréquence des *chirps*, LoRa impose que la phase instantanée en début et fin de *chirp* soit la même. Ainsi, si on note $\theta(t)$ cette phase instantanée $t \in [-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2}]$ alors $\theta(-\frac{T_s}{2}) = \theta(\frac{T_s}{2})$, avec T_s le temps symbole. Les *chirps* sont complexes et générés en bande de base. On désigne par *chirp* brut un *chirp* qui, sur toute sa durée, est soit montant soit descendant. Ainsi, l'expression mathématique de son enveloppe complexe s'écrit :

$$s_l(t) = e^{j2\pi f_c(t)t} \quad (1)$$

où $f_c(t) = \pm \frac{B}{T_s}t$ et $t \in [-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2}]$, avec B l'excursion en fréquences de la rampe émise. Notons que le '+' symbolise le *chirp* brut montant et le '-' le *chirp* brut descendant.

Pour un système de communications numériques qui n'est pas à étalement de spectre, la largeur de bande occupée par le signal émis est proportionnelle au débit symbole, sachant que le coefficient de proportionnalité dépend du choix du filtre de mise en forme (généralement un filtre demi Nyquist). Dans le cas présent, la largeur de bande du signal est fixée par l'excursion en fréquence B et ils sont reliés au temps symbole selon la formule :

$$2^{SF} = B \times T_s \quad (2)$$

Ainsi si la bande de fréquences est fixée, l'augmentation de SF entraîne une augmentation de la durée symbole.

Afin d'être en mesure de distinguer les $M = 2^{SF}$ différents symboles de la constellation, il convient de définir M *chirps* orthogonaux. Ainsi, il existera une trajectoire de phase instantanée spécifique à chaque symbole. Si on note S_k le symbole à transmettre à l'instant kT_s et que $S_k = m$ sachant que $m \in \{0, \dots, M-1\}$ représente le $m^{\text{ième}}$ symbole discret de l'ensemble des symboles possibles, alors le *chirp* associé au symbole m sera obtenu à partir de la rampe de fréquence du *chirp* brut retardé de $\tau_m = \frac{m}{B}$ (sachant que $T_s = \frac{M}{B}$). La rampe de fréquence à l'extérieur de $[-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2}]$ est cycliquement ramenée dans l'intervalle $[-\frac{T_s}{2}, -\frac{T_s}{2} + \tau_m]$. Ainsi, la rampe de fréquence associée à la transmission du symbole m se décompose en 2 parties :

1. de $t \in [-\frac{T_s}{2}, -\frac{T_s}{2} + \tau_m]$, rampe du *chirp* brut (montant ou descendant) avancé de $(T_s - \tau_m)$,
2. de $t \in [-\frac{T_s}{2} + \tau_m, \frac{T_s}{2}]$, rampe du *chirp* brut (montant ou descendant) retardé de τ_m .

Formellement, on obtient pour un *chirp* montant :

$$f_c^m(t) = \frac{B}{T_s}(t - \tau_m) + B \quad \text{pour } t \in [-\frac{T_s}{2}, -\frac{T_s}{2} + \frac{m}{B}]$$

$$f_c^m(t) = \frac{B}{T_s}(t - \tau_m) \quad \text{pour } t \in [-\frac{T_s}{2} + \frac{m}{B}, \frac{T_s}{2}]$$

Finalement, l'expression de l'enveloppe complexe du signal transmis est :

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{j2\pi(t-kT_s)f_{c,k}(t-kT_s)} \quad (3)$$

où $f_{c,k}(t)$ correspond à la rampe de fréquence associée à l'émission du symbole à l'instant kT_s .

2.2 Principe de l'estimation des symboles

Si on considère que le récepteur a correctement effectué les étapes de synchronisations (temps/fréquence), alors à un coefficient d'atténuation près (relatif au fading du canal de propagation), le signal reçu peut être considéré comme étant égal à une version bruitée du signal émis. Si on note $y(nT_e)$ ce signal échantillonné à T_e , il vaut :

$$y(nT_e) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{j2\pi(nT_e-kT_s)f_{c,k}(nT_e-kT_s)} + w(nT_e) \quad (4)$$

où $w(nT_e)$ représente le terme de bruit complexe supposé gaussien blanc et circulaire.

Les symboles transmis sont détectés en multipliant chaque segment de durée T_s de l'enveloppe complexe du signal reçu $y(nT_e)$ par la version conjuguée du *chirp* brut utilisé au niveau de l'émetteur (montant ou descendant). Si on considère que le canal n'a pas introduit d'interférences entre *chirps*, ou si un intervalle de garde entre *chirp* a été introduit à l'émetteur pour s'en prémunir, alors la démodulation numérique du $p^{\text{ième}}$ symbole transmis ($pT_s - \frac{T_s}{2} \leq t < pT_s + \frac{T_s}{2}$) correspond au traitement des $N = \frac{T_s}{T_e}$ échantillons suivants :

$$r_p(nT_e) = y(nT_e - pT_s)e^{-j2\pi f_c(nT_e)nT_e}. \quad (5)$$

De plus, si on considère que $n \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$, alors tous les termes de la somme sur k sont nuls, sauf le terme $k = p$. Alors $\forall m \in \{0, \dots, M-1\}$, on obtient donc que :

$$y(nT_e - pT_s) = e^{j2\pi f_c^m(nT_e)nT_e} + w(nT_e - pT_s). \quad (6)$$

Ainsi, en injectant (6) dans (5), il s'ensuit :

$$r_p(nT_e) = x_p(nT_e) + w_p(nT_e) \quad (7)$$

où le terme de signal utile vaut :

$$x_p(nT_e) = \left(e^{j2\pi f_c^m(nT_e)nT_e} \right) e^{-j2\pi f_c(nT_e)nT_e} \quad (8)$$

et le terme de bruit :

$$w_p(nT_e) = w(nT_e - pT_s)e^{-j2\pi f_c(nT_e)nT_e} \quad (9)$$

Finalement, en multipliant les deux termes de (8), on montre que les arguments valent :

$$\left(-2\pi \frac{m}{T_s} nT_e + 2\pi B nT_e \right) \text{ pour } n \in \left[-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + \frac{m}{B} \right]$$

$$\left(-2\pi \frac{m}{T_s} nT_e \right) \text{ pour } n \in \left[-\frac{N}{2} + \frac{m}{B}, \frac{N}{2} \right]$$

Ainsi, en échantillonnant le signal au rythme $T_e = \frac{1}{B}$ on obtient que :

$$r_p(nT_e) = e^{-j2\pi \frac{mn}{M}} + w_p(nT_e) \quad (10)$$

Il est important de noter que ce choix de fréquence d'échantillonnage induit $M = N$. On constate alors que le signal $r_p(nT_e)$ est la somme d'une exponentielle complexe oscillant à la fréquence normalisée $-\frac{m}{N}$ et d'un terme de bruit gaussien.

Par conséquent, une estimation optimale de m , et donc de la suite de bits associée, peut s'obtenir en cherchant le maximum du périodogramme de $r_p(nT_e)$. En pratique, la solution proposée dans le brevet EP2449690 consiste à calculer la Transformée de Fourier Discrète (TFD) des N échantillons de $r_p(nT_e)$.

Ainsi, si on note $R_p[k]$, $k \in [0, N-1]$, la TFD à la fréquence $\frac{k}{N}$ des N échantillons de $r_p(nT_e)$ s'écrit :

$$R_p[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} r_p(nT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}. \quad (11)$$

Elle s'exprime comme suit en prenant en compte la périodicité de la TFD :

$$R_p[k] = \sqrt{N} \delta(k + m - N) + W_p[k], \quad (12)$$

où $W_p[k]$ est la TFD du bruit. D'après les propriétés de la TFD, $W_p[k]$ est blanc, gaussien, et avec la même variance que $w_p(nT_e)$. Alors, l'estimation de m est calculée comme suit :

$$\hat{m} = N - \underset{k}{\operatorname{argmax}} (|R_p[k]|^2) \quad (13)$$

3 Probabilités d'erreurs symbole et binaire

Dans cette partie, notre objectif est d'exprimer formellement à partir de (12) et (13) les probabilités d'erreurs symbole et binaire de la couche physique LoRa, notées respectivement P_s et P_b , avant décodage de canal.

En appliquant la formule des probabilités totales, la probabilité d'erreur symbole s'exprime comme suit :

$$P_s = \sum_{m=0}^{M-1} \mathbb{P}[\hat{m} \neq m | H_m] \mathbb{P}[H_m] \quad (14)$$

où m est le vrai symbole transmis et \hat{m} son estimation conformément à la règle (13), tandis que H_m correspond à l'évènement : "le symbole m de la constellation est transmis". On peut considérer sans perte de généralité que les symboles sont équiprobables, ainsi $\mathbb{P}[H_m] = \frac{1}{M}$.

Calculer P_s équivaut donc à exprimer $\mathbb{P}[\hat{m} \neq m | H_m]$. Par marginalisation et en utilisant les notations introduites dans la partie précédente, il s'ensuit :

$$\mathbb{P}[\hat{m} \neq m | H_m] = \int \underbrace{\mathbb{P}[\hat{m} \neq m | H_m, W_p[N-m]]}_{\mathbb{P}_m} g(W_p[N-m]) dW_p[N-m] \quad (15)$$

où $W_p[N-m]$ est le bruit présent à la fréquence normalisée $\frac{N-m}{N}$ où est localisé le pic lié à l'exponentielle complexe. g est

sa densité de probabilité qui est gaussienne. Exprimons maintenant le second terme de l'intégrande :

$$\mathbb{P}_m = 1 - \underbrace{\mathbb{P}[\hat{m} = m | H_m, W_p[N-m]]}_{\mathbb{P}_m} \quad (16)$$

Dans la suite des calculs, toutes les probabilités sont conditionnelles à H_m et $W_p[N-m]$ mais nous omettons ce terme pour simplifier les notations.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_m &= \mathbb{P}[\forall k \neq N-m, |R_p[k]|^2 < |R_p[N-m]|^2], \\ &= \mathbb{P}[\forall k \neq N-m, |W_p[k]|^2 < |\sqrt{N} + W_p[N-m]|^2]. \end{aligned}$$

Comme les échantillons du bruit sont décorrélés et gaussiens :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_m &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq N-m}}^{N-1} \mathbb{P}[|W_p[k]|^2 < |\sqrt{N} + W_p[N-m]|^2], \\ &= \left(F_{\chi^2} \left(\frac{|\sqrt{N} + W_p[N-m]|^2}{\sigma^2} \right) \right)^{N-1} \end{aligned}$$

où F_{χ^2} est la fonction de répartition de la loi du χ^2 à 1 degré de liberté et σ^2 la variance du bruit $w_p(nT_e)$ et donc de $W_p[k]$ pour tout entier k .

Finalement, pour évaluer (15), il reste à calculer l'espérance de \mathbb{P}_m par rapport à la loi du bruit. Ce calcul n'étant pas réalisable analytiquement, nous proposons de procéder par simulations de Monte-Carlo. La démarche consiste à simuler N_{MC} réalisations (avec N_{MC} suffisamment grand) de $W_p[N-m]$ qui est gaussien, centré et de variance σ^2 . En notant ces réalisations $\{W^{(i)}\}$ pour $i = 1, \dots, N_{MC}$, il s'ensuit d'après la loi des grands nombres :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\hat{m} \neq m | H_m] & \quad (17) \\ & \simeq \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} 1 - \left(F_{\chi^2} \left(\frac{|\sqrt{N} + W^{(i)}|^2}{\sigma^2} \right) \right)^{N-1} \end{aligned}$$

La dernière étape consiste à exprimer la probabilité d'erreur binaire à partir de la probabilité d'erreur symbole. À cet effet, il convient de noter que même si le symbole est mal détecté, l'un au moins de ses bits peut être bien estimé. La probabilité qu'un bit soit bien estimé alors que le symbole correspondant est erroné est égale à $2^{SF-1}/(2^{SF}-1)$. Il en résulte la probabilité d'erreur binaire P_b suivante :

$$P_b = \frac{2^{SF-1}}{2^{SF}-1} P_s \quad (18)$$

4 Résultats de simulations

Afin de valider notre compréhension de la couche physique, nous avons fait l'acquisition de plusieurs trames LoRa que nous avons décodées *a posteriori* en utilisant un récepteur développé en Matlab. Ces mesures ont été obtenues en utilisant des objets connectés que nous avons conçus et déployés au sein du laboratoire IMS. Ensuite, nous avons mis en oeuvre un simulateur

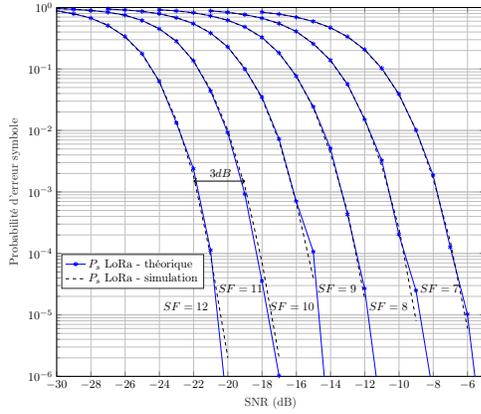


FIGURE 1 – Évolution des probabilités d’erreurs symboles pour différents SF

Matlab, émetteur/récepteur de signaux LoRa, afin d’obtenir les taux d’erreurs symbole et binaire pour $SF \in [7, \dots, 12]$. Ces taux d’erreurs vont être comparés à nos expressions analytiques à des fins de validation. Ainsi, sur la figure 1 nous comparons nos résultats de simulations avec les expressions formelles de probabilité d’erreur que nous avons calculées. Les courbes de probabilité d’erreur sont tracées en fonction du rapport signal sur bruit (SNR), sachant que $SNR = \frac{P_s}{P_w}$ ou P_s représente la puissance moyenne de $s(t)$ obtenue par intégration de sa densité spectrale de puissance et que $P_w = BN_0$ est la puissance du bruit. Nous constatons d’une part que les résultats de simulations sont superposés aux expressions théoriques et d’autre part qu’un gain de traitement de $3dB$ est obtenu en augmentant de 1 le facteur d’étalement. Ces résultats permettent de valider notre approche théorique et sont cohérents avec les gains en distances mis en avant par les inventeurs de la technologie LoRa.

Enfin, il est récurrent d’entendre parler de comparaison entre Sigfox et LoRa. Nous proposons donc d’utiliser nos résultats afin de comparer leurs courbes de probabilité d’erreur binaire. Ainsi, nous traçons sur la figure 2 les courbes de probabilités d’erreur binaire des technologies Sigfox et LoRa en fonction du rapport $\frac{E_b}{N_0}$, sachant que $\frac{E_b}{N_0} = \frac{SNR}{\rho}$ où ρ représente l’efficacité spectrale de la communication. Pour LoRa, le résultat suivant s’applique : $\frac{E_b}{N_0} = SNR \times \frac{2^{SF}}{SF}$. La modulation numérique utilisée par Sigfox étant une DBPSK, la courbe de probabilité d’erreur binaire vaut :

$$P_b^{DBPSK} = 0.5 \times e^{-E_b/N_0}$$

Nous constatons alors que la technique LoRa offre naturellement, c’est à dire sans codage de canal, une meilleure performance en termes de probabilités d’erreur binaire. En effet, pour par exemple une qualité de service de 10^{-3} , LoRa offre un gain de 3.5dB vis-à-vis de Sigfox.

5 Conclusions

Dans cet article nous avons d’une part présenté une partie de la couche physique LoRa sur la base des brevets pu-

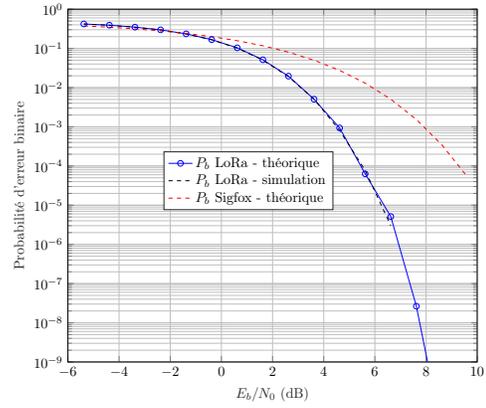


FIGURE 2 – Comparaison des courbes de probabilité d’erreur binaire avant décodage de canal des technologies SigFox et LoRa.

bliés. D’autre part, nous avons théoriquement évalué les probabilités d’erreurs symbole et binaire de cette technologie. Nous avons validé notre compréhension de la couche physique à travers le décodage de trame LoRa émises par les puces fournies par Semtech. Ces trames ont été obtenues par l’intermédiaire d’un banc de mesure. Ensuite, nous avons tracer l’évolution des taux d’erreurs symbole et binaire que nous avons comparé aux courbes de probabilité d’erreur symbole et binaire respectivement. Les résultats obtenus valident l’approche formelle puisque théorie et simulation sont superposés. Enfin, étant donné les comparaisons couramment faites entre Sigfox et LoRa, nous avons superposé sur une même courbe les probabilités d’erreurs binaire de ces deux technologies en fonction de E_b/N_0 . Comme perspectives de ce travail, nous envisageons d’exprimer formellement les dégradations en terme de probabilité d’erreur introduites par les décalages de fréquences porteuses naturels existants entre les oscillateurs locaux d’émission et de réception.

Références

- [1] SigFox, 2016, [accessed on 14.11.2016]. [Online]. Available : <http://www.sigfox.com/en>
- [2] “Lora modem design guide : Sx1272/3/6/7/8.” [Online]. Available : <https://www.semtech.com/>
- [3] O. Seller and N. Sornin, “Low power long range transmitter,” Aug. 7 2014, uS Patent App. 14/170,170. [Online]. Available : <http://www.google.com/patents/US20140219329>
- [4] A. Berni and W. Gregg, “On the utility of chirp modulation for digital signaling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 21, no. 6, pp. 748–751, June 1973.
- [5] M. Winkler, “Chirp signals for communications,” *IEEE WESCON Convention Record*, p. 7, 1962.