

Débit des communication plus rapide que le critère de Nyquist

Romain TAJAN¹, Charly POUILLIAT², Marie-Laure BOUCHERET²

¹IMS - Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système
351 Cours de la libération, 33405 Talence cedex, France.

²IRIT - Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
Avenue de l'étudiant, 31400 Toulouse, France

romain.tajan@ims-bordeaux.fr, charly.poulliat@enseeiht.fr
Marie-Laure.Boucheret@enseeiht.fr

Résumé – Dans cet article nous proposons d'étudier l'efficacité spectrale limite pour les systèmes communiquant au delà du rythme de Nyquist lorsque le temps symbole tend asymptotiquement vers 0. Nous faisons la conjecture que cette efficacité spectrale tend vers la capacité de Shannon pour un alphabet Gaussien, et ce, même lorsque l'alphabet d'entrée est de cardinal fini. Nous proposons une approche basée sur une variante du théorème centrale limite afin de démontrer la conjecture.

Abstract – In this paper, we propose to compute the limit spectral efficiency value for faster than Nyquist communication systems, when the symbol period tends to 0. We conjecture that this spectral efficiency approaches the Shannon limit for Gaussian codebooks even if the considered codebook is finite. We then propose a first approach of the proof of this conjecture based on a variant of the central limit theorem.

1 Introduction

Les premières contributions concernant des communications au delà du critère de Nyquist datent des années 1970 (cf [1] et les références associées). Les systèmes de communication numérique exploitant le FTN sont basés sur l'idée qu'envoyer des symboles plus rapidement que le temps garantissant l'absence d'Interférences Entre Symboles (IES) pourrait permettre d'augmenter l'efficacité spectrale (si on arrive à traiter l'IES ajoutée). Un premier résultat abondant dans cette direction est proposé dans [2]. Mazo montre dans [2] que des symboles issus d'une Modulation Binaire par Changement de Phase (BPSK), mis en formes par un filtre sinus cardinal, peuvent être envoyés utilisant FTN sans dégradation du Taux d'Erreur Binaire (TEB). Mazo montre qu'il existe un débit symbole limite pour qu'il ne subsiste pas de dégradation du TEB. Cette borne est souvent appelé borne de Mazo.

Les résultats proposés dans [2] concernent des communications non codées. Plus récemment, le concept de FTN a connu un regain d'intérêt (cf [3, 4, 5, 6] et leurs références). Le FTN a en particulier été étudié à la lumière de la théorie de l'information dans [5]. [5] montre que le débit d'information maximal obtenu en utilisant le FTN utilisant des mots de code indépendant et identiquement distribués (iid) gaussien atteint le débit d'information du canal gaussien de densité spectrale (DSP) d'entrée $P_x |H(f)|^2$ et de DSP du bruit N_0 .

Dans ce papier, nous proposons une approche pour répondre à la question suivante posée par [8] : quelle est l'efficacité spectrale limite (lorsque la période symbole tend vers 0) d'une communication FTN utilisant un alphabet des symboles de cardinal

fini ?

Ce papier est organisé comme suit. Dans la Section 2 nous détaillons le principe de fonctionnement du FTN. Dans la Section 3 nous présentons les résultats connus sur le calcul de l'efficacité spectrale des systèmes FTN. Dans la Section 4 nous explicitons une méthode envisagé pour répondre à la question de [8]. Les hypothèses et résultats proposées dans la Section 4 sont alors validés en Section 5 et le conclusion données dans la Section 6.

2 Principe du FTN

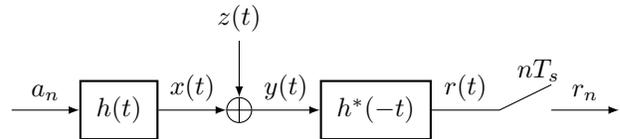


FIGURE 1 – Chaîne de communication pour un système FTN

La chaîne de télécommunication FTN est identique à la chaîne de communication classique présentée en Figure 1. La modulation considérée est linéaire, de sorte que le signal émis est de la forme

$$X(t) = \sqrt{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n h(t - nT_s), \quad (1)$$

où les symboles A_n sont iid et tirés dans un alphabet complexe \mathcal{A} et vérifient $\mathbb{E}(A_k) = 0$ et $\mathbb{E}(|A_k|^2) = 1$. La puissance de

$X(t)$, notée P_x est classiquement obtenue comme

$$P_x = \tau \frac{\sigma_a^2 g(0)}{T_s} = \frac{\sigma_a^2 g(0)}{T}. \quad (2)$$

On remarque ici que, par l'introduction de la constante $\sqrt{\tau}$ dans l'équation (1), la puissance du signal émis est la même quelque soit τ .

Par la suite, le filtre de mise en forme est un sinus cardinal de réponse impulsionnelle $h(t) = T^{-1/2} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ en notant $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ de sorte que la réponse impulsionnelle du filtre global (filtre de mise en forme et filtre adapté) vérifient $g(t) = \int h(u)h(u-t)du = \text{sinc}(t/T)$. Par la suite on notera $G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$ la transformée de Fourier de g . Dans notre cas, $G(f) = T\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}(f)$ où $\mathbb{1}_{[a,b]}(f) = 1$ si $f \in [a, b]$ et 0 sinon.

À la différence du système de communication classique le temps symbole T_s est ici plus court que T (d'où le nom FTN). Nous noterons par la suite $\tau = T_s/T$ le paramètre de compression temporelle. Nous nous intéresserons uniquement à la situation $\tau \in]0, 1]$, le cas $\tau = 1$ correspondant au système classique vérifiant le critère de Nyquist.

Le canal considéré est Additif à Bruit Blanc Gaussien (ABBG). Le bruit $Z(t)$ considéré est complexe, gaussien circulaire centré ayant une PSD constante et égale à N_0 dans toute la bande qu'occupe $h(t)$. Le signal reçu s'exprime alors $Y(t) = X(t) + Z(t)$. Après filtrage adapté, le signal $R(t)$ s'écrit alors comme

$$R(t) = \sqrt{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_s) + Z'(t), \quad (3)$$

où $Z'(t)$ est le bruit gaussien à la sortie du filtre adapté. On montre aisément que $Z'(t)$ est centré et que son autocorrélation est donnée par $R_{z'}(\tau) = N_0 g(\tau)$.

Après échantillonnage au rythme T_s^{-1} , le signal r_n obtenu s'écrit

$$R_n = \sqrt{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g_{n-k} + Z_n \quad (4)$$

où $g_n = g(n\tau T)$ et w_n est gaussien centré d'autocorrélation $R_w[k] = N_0 g_k$. La dépendance en τ est omise mais est due à la définition de g_n . Dans la section suivante, nous présentons l'analyse de l'efficacité spectrale des schémas FTN.

3 Efficacité spectrale des systèmes FTN

Dans cette section, nous rappelons les principaux résultats concernant les débits d'information maximum atteignables pour le FTN, dans un premier temps pour $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ et dans un second temps dans le cas $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ de cardinal fini. Nous appellerons débit d'information la quantité exprimée en bits/dimensions définie comme

$$R_{\mathcal{A}}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} I(A_{-N}^N; R_{-N}^N), \quad (5)$$

où $I(a_{-N}^N; r_{-N}^N)$ est l'information mutuelle moyenne entre la séquence émise a_n et la séquence reçue r_n (voir [9]). La différence entre ce débit d'information et la capacité du canal décrit

par l'équation (4) tient dans le fait que le débit d'information est calculé à densité de probabilité des symboles fixée.

Le filtre de mise en forme $h(t)$ étant à bande limitée et de bande totale $B = T^{-1}$ et les symboles étant envoyé au rythme T_s^{-1} , on définit l'efficacité spectrale (exprimée en bits/s/Hz)

$$\eta_{\mathcal{A}}(\tau) = \frac{1}{T_s B} R_G(\tau) = \frac{1}{\tau} R_G(\tau). \quad (6)$$

3.1 Cas des mots de codes gaussiens

Considérons dans un premier temps le cas où $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ et lorsque les symboles a_n sont iid gaussiens complexes centrés de variance 1. Nous noterons R_G (resp. η_G) le débit d'information (resp. l'efficacité spectrale) dans ce cas. $R_G(\tau)$ s'exprime comme

$$R_G(\tau) = \int_{-1/2}^{1/2} \log_2 \left(1 + \tau \frac{\sigma_a^2}{N_0} \mathring{G}(\nu) \right) d\nu, \quad (7)$$

où $\mathring{G}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-j2\pi n\nu}$. Dans le cas étudié dans cet article, $g(t)$ est sinus cardinal $\mathring{G}(\nu)$ s'écrit

$$\mathring{G}(\nu) = \frac{G\left(\frac{\nu}{\tau T}\right)}{\tau T} = \frac{1}{\tau} \mathbb{1}_{\left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]}(\nu), \quad (8)$$

Le débit d'information et l'efficacité spectrale se calculent comme

$$R_G(\tau) = \tau \log_2(1 + \gamma), \quad (9)$$

$$\eta_G(\tau) = \log_2(1 + \gamma), \quad (10)$$

où $\gamma = \frac{P_x}{N_0 B}$ est le Rapport Signal sur Bruit (RSB) maintenu constant grâce à la constante τ dans (1). Ce résultat (montré dans [5]) implique que le FTN n'augmente ni ne diminue l'efficacité spectrale dans le cas où le filtre de mise en forme est sinus cardinal.

3.2 Cas des modulations de cardinal fini

Dans le cas où l'alphabet \mathcal{A} est de cardinal fini, il n'existe pas d'expression analytique pour les équations (5) et (6). Il existe néanmoins une méthode numérique (proposée dans [7]) permettant de calculer $R_{\mathcal{A}}$ et par voie de conséquences $\eta_{\mathcal{A}}$. Cette méthode est basée sur l'algorithme de Bahl, Cocke, Jelinek et Raviv (BCJR) exécuté sur le treillis correspondant au canal. Le principal inconvénient de cet algorithme est que le treillis pour un canal de longueur L et pour un alphabet de cardinal M possède M^{L-1} états. La complexité induite devient donc vite prohibitive.

Dans cet article, nous considérerons deux méthodes afin d'approximer $R_{\mathcal{A}}$. La première méthode permet de calculer simplement une borne inférieure de $R_{\mathcal{A}}$ et est donnée dans [8]. Nous ne détaillerons pas cette méthode par manque de place, par contre nous noterons $R_{\mathcal{A}}^{[8]}(\tau)$ et $\eta_{\mathcal{A}}^{[8]}(\tau)$ les débits d'information et efficacité spectrale calculés avec cette méthode. Cette méthode est particulièrement attractive du fait qu'elle donne une borne

$$R_{\mathcal{A}}^{[8]}(\tau) \leq R_{\mathcal{A}}(\tau) \quad (11)$$

mais aussi du fait de sa complexité calculatoire réduite. En effet, les canaux considérés dans la Section 5 ont régulièrement une longueur L supérieure à 100 échantillons pour $M = 4$.

La seconde borne utilisée dans cet article permet d'approximer $R_{\mathcal{A}}$. Cette borne est appelé la Conjecture de Shamai-Laroia (CSL) (cf. [9], [10] et sa bibliographie). Nous noterons par la suite le débit d'information ainsi que l'efficacité spectrale obtenus par cette méthode $R_{\mathcal{A}}^{CSL}(\tau)$ et $\eta_{\mathcal{A}}^{CSL}(\tau)$.

$$\eta_{\mathcal{A}}(\tau) \geq I(A_n; V_n | A_{-\infty}^{-1}) \quad (12)$$

où V_n obtenu comme la sortie d'un DFE-MMSE avec voie de retour parfaite

$$V_n = \sqrt{\tau} A_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\tau} A_k d_{-k}^{\tau} + Z'_n \quad (13)$$

$$= \sqrt{\tau} A_n + W_n \quad (14)$$

L'interférence résiduelle est

$$D^*(z^{-*}) = \frac{N_0}{P_0 - N_0} \left(1 - \frac{1}{H^*(z^{-*})} \right) \quad (15)$$

où P_0 et $H(z)$ donnent dans notre contexte

$$\frac{P_0}{N_0} H(z) H^*(z^{-*}) = \frac{\tau \sigma_a^2}{N_0} G(z) + 1 \quad (16)$$

et

$$\log\left(\frac{P_0}{N_0}\right) = \tau \log(1 + \gamma) \quad (17)$$

La CSL est alors exprimée comme

$$\eta_{\mathcal{A}}(\tau) \geq I(A_n, W'_n) = \eta_{\mathcal{A}}^{CSL} \quad (18)$$

où W'_n est gaussien de même variance que W_n . La CSL a depuis été montré fausse, en revanche elle reste valide pour le cas où W_n est effectivement gaussien.

4 Conjecture sur $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \eta_{\mathcal{A}}(\tau)$

Un des problèmes laissés ouverts sur le FTN est formulé dans la Conjecture 1 donnée ci-dessous.

Conjecture 1. *Soit \mathcal{A} un alphabet de cardinal fini tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $-a \in \mathcal{A}$. Quelque soit le RSB $\gamma > 0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \eta_{\mathcal{A}}(\tau) = \log_2(1 + \gamma) \quad (19)$$

Si cette conjecture était démontrée, elle reviendrait à dire que asymptotiquement en τ , le FTN permet d'atteindre la capacité de Shannon ($\log_2(1 + \gamma)$) en utilisant un alphabet d'entré classique comme des symboles issus d'une modulation M-MAQ (Modulation d'Amplitude en Quadrature). La Conjecture 1 a déjà été proposée (sous la forme d'un théorème) dans [11] dans le cas d'alphabets binaires. L'approche de [11] est la suivante.

Une première partie de la preuve revient à montrer que la CSL converge vers $\log_2(1 + \gamma)$ quand $\tau \rightarrow 0$. Ce résultat est donné dans le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit \mathcal{A} un alphabet de cardinal fini tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $-a \in \mathcal{A}$. Quelque soit le RSB $\gamma > 0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \eta_{\mathcal{A}}^{CSL}(\tau) = \log_2(1 + \gamma) \quad (20)$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme repose sur le développement limité de $R_{\mathcal{A}}^{CSL}(\tau)$. Elle n'est pas donnée ici car elle est l'objet de l'article [11]. \square

La seconde partie du raisonnement de [11] consiste à utiliser [12] afin de démontrer qu'un bruit gaussien serait le pire cas pour une transmission binaire. Ce résultat possède deux inconvénients. Le premier est que la preuve est en conséquence uniquement vraie pour des signaux binaires. Le second inconvénient est que le résultat de [12] ne peut pas être utilisé directement pour justifier de la CSL ([9], [10]).

Nous n'avons pas pour l'instant d'alternatives à la preuve proposée par [11]. En revanche, nous proposons un résultat intermédiaire qui permettrait de démontrer résultat proposé en Conjecture 1.

Conjecture 2. *Soit \mathcal{A} un alphabet de cardinal fini tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $-a \in \mathcal{A}$. Quelque soit le RSB $\gamma > 0$,*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{E_{\tau} \sigma_a^2}} \sum_{k=1}^L d_{-k}^{\tau} A_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{CN}(0, 1) \quad (21)$$

Étant donné la première limite, il serait tentant de vouloir utiliser le Théorème Limite Centrale (TLC) pour des variables indépendantes sans être identiquement distribuées. Le TLC n'est en fait pas applicable ici étant donné que l'énergie E_{τ} est finie :

$$E_{\tau} = \frac{1}{\left(\frac{P_0}{N_0} - 1\right)^2} \left(\frac{P_0}{N_0} - 1 - \frac{P_0}{N_0} \tau \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) < \infty. \quad (22)$$

En utilisant l'équation (17), on montre que $E_{\tau} \rightarrow \infty$. La seconde limite serait donc celle qui provoque la convergence vers la loi gaussienne. La preuve envisagée pour démontrer ce résultat repose sur une preuve similaire à celle du CLT pour les tableaux triangulaires utilisant la condition de Lindeberg.

Dans la section suivante, nous montrons des résultats de simulations qui viennent corroborer ces conjectures.

5 Simulations

Afin de valider notre approche (au moins empiriquement), nous proposons des histogrammes pour $\tau = 0.01$, $\tau = 0.1$ et $\tau = 0.25$ calculés en tronquant la réponse impulsionnelle d_{-k}^{τ} à une grande valeur de L . Ces résultats sont donnés dans la Figure On remarque bien que malgré le fait que L soit grand, certains de ces histogrammes ne sont pas gaussiens. En revanche, pour $\tau = 0.01$, on remarque que l'histogramme obtenu correspond à celui d'une variable gaussienne centrée réduite.

Afin de montrer la convergence de $\eta_{\mathcal{A}}$ vers η_G , nous ne nous sommes pas limités à la CSL. En effet, celle-ci ne constitue pas

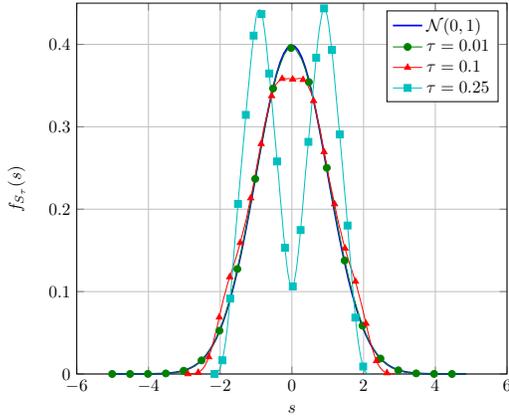


FIGURE 2 – Histogramme de S_τ calculé à partir de 10^7 symboles 4-MAQ iid pour $L > 1000$, $\tau = 0.01$, $\tau = 0.1$ et $\tau = 0.25$.

une borne pour certains canaux. Par contre, étant donné que la CSL est un Lemme central à la preuve de la convergence de $\eta_{A,}$ nous avons comparé la CSL à la borne $\eta_{A,}^{[8]}(\tau)$ dans les Figures 3 et 4. On remarque que, dans la Figure 3 comme dans la Fi-

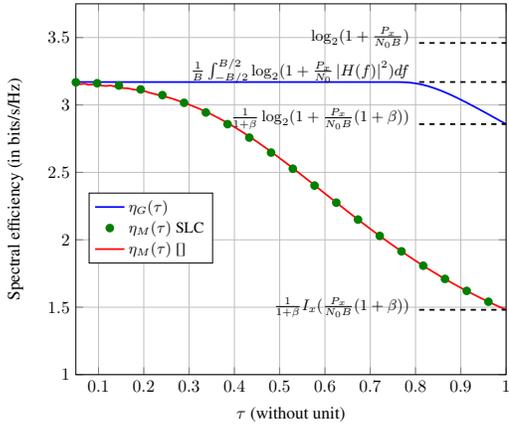


FIGURE 3 – Efficacité spectrale en bits/sec/Hz en fonction de τ pour $10 \log_{10}(\gamma) = 10 \text{ dB}$.

gure 4, l'efficacité spectrale du schéma FTN tend vers la capacité de Shannon. On remarque aussi que même si la conjecture 2 était fautive, l'écart entre la capacité de Shannon et la borne inférieure de [8] est très faible.

6 Conclusion

En conclusion, dans cet article, nous avons exposé le problème de la convergence de l'efficacité spectrale des communications FTN lorsque τ tend vers 0. Nous avons proposé des pistes basées sur une double limite d'une somme de variables aléatoires indépendantes et proposé une approche basée sur une sorte de théorème centrale limite. Afin de valider notre approche, nous avons montré des simulations corroborant nos hypothèses.

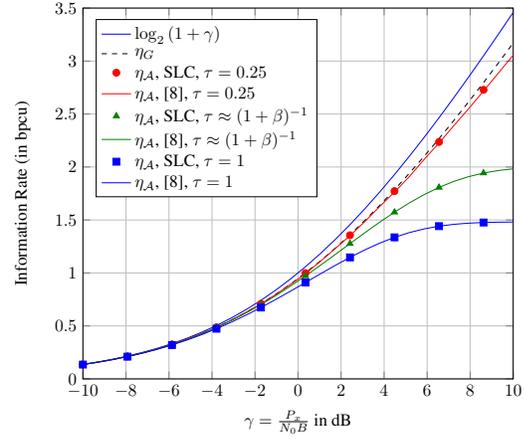


FIGURE 4 – Efficacité spectrale en bits/sec/Hz en fonction de $\frac{P_x}{N_0 B}$ pour une modulation 4-MAQ.

Références

- [1] J Salz. Optimum mean-square decision feedback equalization. *Bell System Technical Journal*, 52(8) :1341–1373, 1973.
- [2] J. E. Mazo. Faster-than-nyquist signaling. *Bell System Technical Journal*, 54(8) :1451–1462, 1975.
- [3] Angelos D Liveris and Costas N Georghiades. Exploiting faster-than-nyquist signaling. *Communications, IEEE Transactions on*, 51(9) :1502–1511, 2003.
- [4] F. Rusek and J.B. Anderson. Receivers for faster-than-nyquist signaling with and without turbo equalization. *IEEE Transactions on Information Theory*, pages 1993–1997, 2006.
- [5] F. Rusek and J. B. Anderson. Constrained capacities for faster-than-Nyquist signaling. *IEEE Transactions on Information Theory*, 55(2) :764–775, 2009.
- [6] S. Sugiura. Frequency-domain equalization of faster-than-Nyquist signaling. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2(5) :555–558, 2013.
- [7] D.M. Arnold, H.-A. Loeliger, P.O. Vontobel, A. Kavcic, and Wei Zeng. Simulation-based computation of information rates for channels with memory. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(8) :3498–3508, Aug 2006.
- [8] Seongwook Jeong and Jaekyun Moon. Easily computed lower bounds on the information rate of intersymbol interference channels. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 58(2) :864–877, Feb 2012.
- [9] S. Shamai and R. Laroia. The intersymbol interference channel : lower bounds on capacity and channel precoding loss. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 42(5) :1388–1404, Sep 1996.
- [10] M. El Hefnawy and G. Kramer. Impact of spectrum sharing on the efficiency of faster-than-nyquist signaling. *ArXiv e-prints*, January 2014.
- [11] Young Geon Yoo and Joon Ho Cho. Asymptotic Optimality of Binary Faster-than-Nyquist Signaling. *Communications Letters, IEEE*, 14(9) :788–790, September 2010.
- [12] S. Shamai and S. Verdú. Worst-case power-constrained noise for binary-input channels. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 38(5) :1494–1511, Sept 1992.