Décomposition multi-échelle de signaux sur graphes
Application à la manipulation de détails

Moncef HIDANE[1], Olivier LÉZORAY[2], Abderrahim ELMOATAZ[2]

[1]INSA Centre Val de Loire, Laboratoire d'Informatique de l'Université de Tours

[2]Normandie Université, UNICAEN, ENSICAEN, GREYC, CNRS UMR 6072

moncef.hidane@insa-cvl.fr, {olivier.lezoray, abderrahim.elmoataz-billah}@unicaen.fr

Résumé – Nous introduisons dans cet article un nouveau cadre unifié pour la manipulation de détails pour des signaux définis sur des graphes généraux. La clé de cette unification est de modéliser des données spécifiques sous la forme de signaux définis sur des graphes pondérés appropriées. Ces signaux sont alors représentés comme la somme de couches successives, chacune capturant une échelle donnée. Ces couches sont obtenues grâce à un procédé itératif de régularisation basé sur la pénalisation de la variation totale. Les couches sont ensuite traitées séparément avant d'être recombinées, réalisant ainsi la manipulation de détails. L'avantage de l'approche est illustré sur des images, des maillages 3D et des nuages de points.

Abstract – In this paper we introduce a new unified framework for multi-scale detail manipulation of graph signals. The key to this unification is to model any kind of data as signals defined on appropriate weighted graphs. Graph signals are represented as the sum of successive layers, each capturing a given scale of detail. Detail layers are obtained through a series of regularization procedures based on total variation penalization over graphs. Layers are then processed separately before being recombined, thus achieving detail manipulation. The benefit of the approach is shown on images, 3D meshes and 3D colored point clouds.

1 Introduction

Les méthodes de filtrage adaptatif d'images ont récemment été employées avec succès dans le domaine de la photographie computationnelle. La plupart des méthodes existantes décomposent une image en une composante de base, lisse par morceaux, et une composante de détail. La décomposition obtenue est ensuite utilisée dans une variété d'applications, notamment pour la manipulation de détails, le tone-mapping et l'édition [1, 2]. Comme les images naturelles contiennent des détails dont l'échelle spatiale varie, des décompositions multi-échelles spécifiques ont été proposées pour ces applications [3]. Les représentations que l'on y obtient sont de la forme $f = s_k + d_k + \ldots + d_1$ où s_k est une approximation grossière de l'image originale f et les d_i représentent des images de détails à diverses échelles spatiales. Les approches modernes conservent le principe de la pyramide laplacienne, mais utilisent des filtres non linéaires spécifiques [4, 5].

Les images numériques ne sont cependant pas les seules données où la manipulation de détails est intéressante. Par exemple, avec la disponibilité récente de capteurs 3D à bas prix, l'acquisition de nuages de points 3D colorés est désormais aisée et la manipulation de détails peut y être employée. Si des méthodes récentes ont été proposées pour les nuages de points, notamment dans [6], il n'existe actuellement pas de cadre unifié permettant de traiter des images et des nuages de points. Notons également que cette volonté de disposer d'un cadre unifié suscite un intérêt important, notamment pour la représentation et le traitement de signaux sur graphes, c'est-à-dire, des données massives, généralement de grande dimension, définies sur l'ensemble des sommets, ou sur celui des arêtes, de graphes pondérés généraux [8, 7].

Dans [10] nous avions introduit une décomposition multi-échelle pour des signaux définis sur des graphes arbitraires. Cette décomposition s'obtient en itérant, sur les résidus successifs, un procédé de régularisation à la manière de [9]. Dans ce présent article, nous introduisons un algorithme de manipulation de détails basés sur la décomposition que nous avions proposée dans [10]. Cette approche fournit un cadre unifié pour la manipulation de détails dans les images, les maillages et les nuages de points.

2 Représentation multi-échelle de signaux sur graphes

Un graphe pondéré G est un triplet (V, E, w) où V est un ensemble non vide de sommets, $E \subset V \times V$ un ensemble d'arêtes, et $w : E \to \mathbb{R}$ est une fonction de pondération. Dans la suite, on ne considérera que des graphes non orientés, c'est-à-dire tels que $(x, y) \in E$ si et seulement si $(y, x) \in E$. De plus, la fonction w est supposée symétrique et à valeurs strictement positives. Une quantité $w(x, y)$ est considérée comme une mesure de similarité entre les sommets x et y calculée selon le type de données considéré. Sans perte de généralité, nous posons $V = \{1, \ldots, N\}$ pour $N \geq 1$. Le graphe G peut à présent être caractérisé par sa matrice d'adjacence pondérée $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ définie par $w_{i,j} = w(i,j)$ si $(i,j) \in E$ et $w_{i,j} = 0$ sinon.

On note $X = \mathbb{R}^N$ l'ensemble des signaux définis sur V. Un tel signal $f \in X$ associe une valeur f_i à chaque sommet i. L'ensemble X est équipé du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et de la norme associée $\|.\|_X$. Nous considérerons également l'espace $Y = \mathbb{R}^{N \times N}$ équipé du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ et de la norme associée $\|.\|_Y$. Nous considérons l'opérateur de différence pondérée $\nabla_w : X \to Y$ défini pour $u \in X$ et $i,j \in V$ par $(\nabla_w u)_{i,j} = \sqrt{w_{i,j}}(u_j - u_i)$. Cet opérateur ∇_w admet un adjoint $\nabla_w^* : Y \to X$ relativement aux produits scalaires $\langle ., . \rangle_X$ et $\langle ., . \rangle_Y$.

2.1 Débruitage de signaux sur graphes

On considère le modèle de dégradation $f = u_0 + \eta$ où $f, u_0 \in \mathbb{R}^N$ et η est une réalisation d'un vecteur gaussien. Afin de construire un estimateur de u_0, les méthodes classiques en traitement du signal et de l'image reposent sur la minimisation d'une énergie comprenant un terme de régularité et un terme de fidélité. Parmi ces méthodes, la minimisation de la variation totale (TV) [11] joue un rôle important. Dans le contexte des signaux sur graphes, la variation totale isotrope peut être définie pour $u \in X$ par [12]

$$J_w(u) := \|\nabla_w u\|_{1,2} = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} w_{i,j}(u_j - u_i)^2 \right)^{1/2} \tag{1}$$

La fonctionnelle J_w correspond a une mesure de régularité relative pour des signaux définis sur des graphes arbitraires. Il s'agit là de la somme des variations locales en chaque sommet du graphe. Le choix de la norme ℓ_1 permet ici de favoriser la parcimonie du vecteur de variations locale en chaque sommet. L'estimateur TV est alors obtenu comme solution du problème convexe

$$\underset{u \in X}{\text{minimizer}}\; E_w(u; f, \lambda) = \lambda J_w(u) + \frac{1}{2}\|u - f\|_X^2, \tag{2}$$

où λ est relié à la variance du bruit. Le lecteur intéressé par la résolution numérique de 2 pourra consulter [10] où les détails de l'application de l'algorithme de Chambolle et Pock [13] sont donnés.

2.2 Représentation multi-couche

La problématique du débruitage de la section précédente donne lieu à une décomposition de l'image bruitée f sous la forme $f = \hat{u} + \hat{v}$ où u est l'estimateur et $v = f - u$ est le résidu. Ici, le paramètre λ dans (2) est relié au niveau de bruit. Si l'on relaxe cette dépendance, nous obtenons des décompositions $u + v$ plus générales dont la décomposition *structure-texture* [15]. Ici, u représente une image contenant les contours saillantes des objets présents dans la scène alors que v contient les textures et motifs répétitifs. Ces décompositions ont été utilisées notamment pour l'inpainting [14], la détection contour [15] et la segmentation [16].

La décomposition structure-texture que nous venons de rappeler est mono-échelle. Afin de pouvoir manipuler des signaux sur graphes à différentes échelles, il est important de disposer de décompositions multi-échelles. Pour des images, Tadmor et al. [9] ont proposé un algorithme permettant de transformer la decomposition structure-texture en une décomposition multi-échelle. La mise en oeuvre de cette approche dans le contexte des signaux sur graphes, en utilisant l'énergie E_w de la section précédente correspond aux itérations suivantes

$$\begin{cases} v_{-1} &= f\,, \\ u_i &= \underset{u \in X}{\text{argmin}}\; E(u; v_{i-1}; \lambda_i),\ i \geq 0, \\ v_i &= v_{i-1} - u_i,\ i \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

où $(\lambda_i)_i$ est une suite de paramètres d'échelle. En partant d'un paramètre initial λ_0, on obtient une première décomposition de f en appliquant (2) avec $\lambda = \lambda_0$. On obtient ainsi $f = u_0 + v_0$. La composante u_0 est interprétée comme une description sommaire (c'est-à-dire très lisse) de f, alors que le résidu v_0 correspond à la composante de détail nécéssaire à la reconstruction de f à partir de u_0. En passant de λ_0 à λ_1 et en ré-appliquant (2) à v_0 avec $\lambda = \lambda_1$ on obtient une deuxième décomposition $v_0 = u_1 + v_1$. À présent, le terme u_1 peut être interprété comme une seconde composante extraite de f à travers v_0. En itérant ce procédé n fois on obtient la représentation suivante $f = \sum_{i=0}^{n} u_i + v_n$. Les u_i correspondent ainsi à différentes couches extraites de f, chacune correspondant à une échelle donnée. Ces couches sont paramétrées par trois variables: la matrice d'adjacence W, l'énergie E_w ainsi que la suite $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$. Une étude de cette représentation, fournissant à la fois une condition suffisante de convergence ainsi qu'une décomposition d'énergie, peut être trouvée dans [10].

3 Manipulation de détails

Nous détaillons dans cette section l'application de la décomposition multi-échelle que nous avons rappelées à la manipulation de détails pour les images, les maillages 3D et les nuages de points. Pour chaque type de donnée, un graphe spécifique est construit. Pour les images, un graphe grille en 8 adjacence avec $w_{i,j} = e^{-\frac{\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|_2^2}{2\sigma^2}}$ est considéré. Pour les maillages 3D, la topologie correspond à celle donnée par la triangulation de Delaunay avec $w_{i,j} = \frac{1}{\epsilon + \|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|_2^2}$. Pour les nuages de points un graphe de voisinage spatial est construit. Le signal $\mathbf{f}_i$ correspond à une coordonnée couleur pour les images et les nuages de points et à une coordonnée spatiale pour les maillages. Le premier paramètre λ_0 est choisit de sorte que u_0 correspond a une version très lisse de f. Nous avons choisi une progression dyadique : $\lambda_{i+1} = \lambda_i / 2$.

Afin de procéder à la manipulation de détails, nous décomposons le signal f en n couches u_i, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Chaque couche est alors modulée séparément. Trois niveaux de manipulation sont considérés : grossier (g_1), intermédiaire (g_2) et fin (g_3) :

$$g_1 = \sum_{i=0}^{i=l_1} (1 + i\delta_1)u_i,$$
$$g_2 = g_1 + \sum_{i=l_1+1}^{i=l_2} (\delta_2 + (i - l_1 - 1)\delta_1\delta_2)u_i,$$
$$g_3 = g_2 + \sum_{i=l_2+1}^{i=n-1} (\delta_2^2 + (i - l_2 - 1)\delta_1\delta_2)u_i.$$

Pour les images, nous avons choisi $\delta_1 = 2.5$ et $\delta_2 = 0.25$. Le choix $\delta_1 = 0.15$ et $\delta_2 = 1$ a été retenu pour les maillages et les nuages de points. La figure 1 montre les résultats obtenus. Comme on peut le voir, chaque niveau de manipulation permet de rehausser ou d'atténuer des détails spécifiques. Pour les maillages 3D, cela permet de manipuler les différents détails géométriques sans avoir recours aux normales des faces. Enfin, il est important de noter que la méthode que nous proposons est, à notre connaissance, la première méthode capable de rehausser des détails photométriques pour des nuages de points.

4 Conclusion

Nous avons proposé un nouveau cadre unifié pour la manipulation de détails pour des images, des maillages et des nuages de points. Notre méthode représente une image ou un modèle 3D comme un signal sur un graphe et génère des couches successives, chacune capturant un niveau de détail donné. Les couches obtenues sont ensuite traitées séparément avant d'être recombinées, réalisant ainsi le rehaussement ou l'atténuation de détails présents. La méthode proposée est très générale et peut être utilisé pour tous types de signaux graphes.

References

[1] A. Choudhury and G. Medioni, "Perceptually motivated automatic sharpness enhancement using hierarchy of non-local means," in *ICCV Workshops,g* IEEE, 2011, pp. 730–737.

[2] F. Durand and J. Dorsey, "Fast bilateral filtering for the display of high-dynamic-range images," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 21, no. 3, pp. 257–266, 2002.

[3] R. Fattal, M. Agrawala, and S. Rusinkiewicz, "Multiscale shape and detail enhancement from multi-light image collections," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 26, no. 3, pp. 51, 2007.

[4] S. Paris and F. Durand, "A fast approximation of the bilateral filter using a signal processing approach," in *ECCV*, pp. 568–580. Springer, 2006.

[5] K. Subr, C. Soler, and F. Durand, "Edge-preserving multiscale image decomposition based on local extrema," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 28, no. 5, pp. 147, 2009.

[6] Y. Ohtake, A. Belyaev, and H.-P. Seidel, "A multi-scale approach to 3d scattered data interpolation with compactly supported basis functions," in *Shape Modeling International, 2003*. IEEE, 2003, pp. 153–161.

[7] D. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst, "The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 30, no. 3, pp. 83–98, 2013.

[8] O. Lézoray and L. Grady, Eds., *Image Processing and Analysis with Graphs: Theory and Practice*, Digital Imaging and Computer Vision. CRC Press / Taylor and Francis, 2012.

[9] E. Tadmor, S. Nezzar, and L. Vese, "A multiscale image representation using hierarchical (bv, l 2) decompositions," *Multiscale Modeling & Simulation*, vol. 2, no. 4, pp. 554–579, 2004.

[10] M. Hidane, O. Lézoray, and A. Elmoataz, "Nonlinear multilayered representation of graph-signals," *J. Math. Imaging Vis.*, vol. 45, no. 2, pp. 114–137, 2013.

[11] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D*, vol. 60, no. 1-4, pp. 259–268, 1992.

[12] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Bougleux, "Nonlocal discrete regularization on weighted graphs: a framework for image and manifold processing," *IEEE Trans. on Im. Proc.*, vol. 17, no. 7, pp. 1047–1060, 2008.

[13] A. Chambolle and T. Pock, "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging," *J. Math. Imaging Vis.*, vol. 40, no. 1, pp. 120–145, 2011.

[14] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester, "Image inpainting," in *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 2000, pp. 417–424.

[15] A. Buades, T.M. Le, J.M. Morel, and L.A. Vese, "Fast cartoon+ texture image filters," *IEEE Trans. on Im. Proc.*, vol. 19, no. 8, pp. 1978–1986, 2010.

[16] W. Casaca, A. Paiva, E. Gomez-Nieto, P. Joia, and L.G. Nonato, "Spectral image segmentation using image decomposition and inner product-based metric," *J. Math. Imaging Vis.*, pp. 1–12, 2012.

Figure 1: De haut en bas et de gauche à droite : manipulation de détails pour une image, un maillage 3D et un nuage de points. Chaque colonne correspond à niveau de détail donné.