

Capacité du capteur vectoriel à goniométrer des sources électromagnétiques : Performances en présence d'erreurs de modèle

Anne FERRÉOL Pierre THALY

Thales Communications & Security 4, Avenue des Louvresses 92230 Gennevilliers Cedex, France

anne.ferreol@thalesgroup.com, pierre.thaly@thalesgroup.com

Résumé – L'utilisation du capteur vectoriel pour la goniométrie de sources électromagnétiques est opérationnellement intéressante grâce au faible encombrement du système. Ce réseau est composé de boucles et dipôles captants toutes les composantes du champs électriques et du champs magnétiques. L'objectif de cet article est de comparer les performances en présence d'erreur de modèle de l'algorithme MUSIC avec la méthode de Nehorai adaptée à ce type de réseau dans un contexte mono-source.

Abstract – The use of the vectorial sensor for the DOA estimation of electromagnetic sources is operationally interesting due to the small aperture of the system. This array is composed of loops and dipoles receiving all the spatial components of the electric and magnetic field. The purpose of this paper is to establish closed form expression of the performances in presence of modeling error in order to compare the MUSIC algorithm with conventional approach of Nehorai in single source context.

1 Introduction

Le contexte est celui de la goniométrie qui permet d'estimer les angles d'incidences de sources électro-magnétiques polarisées reçues par un réseau d'antennes tel que celui du capteur vectoriel. Le réseau est soit mono-polarisation avec des antennes adaptées à la même polarisation soit à diversité de polarisation dans le cas contraire. Il est alors envisageable d'estimer les angles d'incidences des sources avec des méthodes à haute résolution telle que MUSIC[6] en mono-polarisation ou Ferrara [1] en diversité de polarisation.

En mono-polarisation, il a été montré dans [2] que les performances en terme de précision sont inversement proportionnelles à la dimension du réseau. Pour des petits réseaux, seule la diversité de polarisation des antennes permet d'obtenir des performances acceptables. Plus particulièrement, un réseau mono-polarisation avec des antennes identiques de même positions ne permet pas de mettre en oeuvre une goniométrie. Pour pouvoir appliquer une goniométrie dans ce contexte difficile, il faut que les capteurs soient sensibles à des polarisations différentes. En particulier, le capteur vectoriel de la figure-1 qui est à diversité de polarisation avec les trois boucles et les trois dipôles permet d'estimer les incidences des sources. Ce réseau dont les 3 boucles orthogonales captent les composantes du champs magnétique et dont les 3 dipôles orthogonaux captent le champs électrique nécessitent un algorithme à diversité de polarisation.

Les réseaux composés de boucles et dipôles ne sont pas nouveaux dans le domaine de la goniométrie. On peut par exemple citer le système Watson-Watt qui permet d'effectuer une goniométrie avec un dipôle et deux boucles verticales sous l'hypothèse d'une seule source en polarisation verticale. Plus récemment et afin de s'affranchir de la polarisation de la source, Nehorai propose une technique [5] à base du produit vectoriel

sur le capteur vectoriel. Pour terminer, la méthode à diversité de polarisation de Ferrara [1] est applicable sur ce réseau avec la capacité de traiter plusieurs sources.

L'objectif de l'article est de comparer les performances des différentes approches utilisant le capteur vectoriel en présence d'erreur de modèle. Le calcul des performances théoriques de Ferrara [1] utilisera les résultats de [3]. Cela permettra d'en déduire l'ouverture équivalente du capteur vectoriel comme dans [2] pour les réseaux géométriques et de le comparer à un réseau circulaire équivalent.

2 Modélisation et formulation du problème

En présence de M sources, le signal $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \cdots x_N(t)]^T$ observé en sortie du réseau de N antennes à diversité de polarisation s'écrit de la manière suivante

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{a}}_i s_i(t) + \mathbf{b}(t) \quad (1)$$

où $x_n(t)$ est le signal en sortie du $n^{ième}$ capteur, $\mathbf{b}(t)$ est le bruit additif et $s_i(t)$ est le signal de la $i^{ième}$ source associé au vecteur $\tilde{\mathbf{a}}_i$. En présence d'erreur de modèle, le vecteur $\tilde{\mathbf{a}}_i$ s'écrit de la manière suivante

$$\tilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{a}(\Theta_i, \mathbf{p}_i) + \mathbf{e}_i \quad (2)$$

avec $\mathbf{a}^H(\Theta, \mathbf{p}) \mathbf{a}(\Theta, \mathbf{p}) = N$ et où $\mathbf{a}(\Theta, \mathbf{p})$ est le vecteur directeur dépendant de l'incidence Θ et de la polarisation \mathbf{p} et \mathbf{e}_i est l'erreur de modèle (H et T définissent le transposé conjugué et le transposé).

Selon la figure-1, la source se propage vers les antennes du réseau dans la direction donnée par le vecteur d'onde $\mathbf{k}(\Theta)$ qui

dépend de l'incidence $\Theta = \{\theta, \Delta\}$ où θ est l'azimut et Δ est l'élévation. L'onde de la source est polarisée suivant un champs électrique \mathbf{P} et un champs magnétique \mathbf{H} se trouvant dans le plan d'onde orthogonal à $\mathbf{k}(\Theta)$ qui est défini par les vecteurs $\mathbf{k}_V(\Theta)$ et $\mathbf{k}_H(\Theta)$. La polarisation $\mathbf{p} = [\alpha \ \beta]^T$ correspond à l'orientation du champs électrique dans le plan d'onde tel que $\mathbf{p}^H \mathbf{p} = 1$. Sachant que le champs magnétique \mathbf{H} est orthogonal à \mathbf{P} , ces deux vecteurs s'écrivent de la manière suivante en fonction de la polarisation

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{k}_V(\Theta) + \beta \mathbf{k}_H(\Theta) \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = -\alpha \mathbf{k}_H(\Theta) + \beta \mathbf{k}_V(\Theta) \quad (4)$$

Les dipôles sont sensibles au champs électrique et les boucles au champs magnétique. Selon la figure-2 la réponse g_{boucle} d'une petite boucle et g_{dipole} d'un petit dipôle s'écrivent

$$g_{boucle} = \mathbf{n}_b^H \mathbf{H} \text{ et } g_{dipole} = \mathbf{n}_d^H \mathbf{P}$$

où \mathbf{n}_b est le vecteur normal au plan de la boucle et \mathbf{n}_d est le vecteur colinéaire à la direction du dipôle. En conséquence la réponse $\mathbf{g}_{dipole}(\Theta, \mathbf{p})$ d'un sous réseau de 3 dipôles orthogonaux est alors le champs électrique tel que

$$\mathbf{g}_{dipole}(\Theta, \mathbf{p}) = \mathbf{P} = \mathbf{G}_{dipole}(\Theta) \mathbf{p} \quad (5)$$

$$\mathbf{G}_{dipole}(\Theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_V(\Theta) & \mathbf{k}_H(\Theta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

et la réponse $\mathbf{g}_{boucle}(\Theta, \mathbf{p})$ d'un sous réseau de 3 boucles orthogonales correspond au champs magnétique tel que

$$\mathbf{g}_{boucle}(\Theta, \mathbf{p}) = \mathbf{H} = \mathbf{G}_{boucle}(\Theta) \mathbf{p} \quad (7)$$

$$\mathbf{G}_{boucle}(\Theta) = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_H(\Theta) & \mathbf{k}_V(\Theta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Le vecteur directeur associé au capteur vectoriel est alors

$$\mathbf{a}(\Theta, \mathbf{p}) = \sqrt{3} \times \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{dipole}(\Theta, \mathbf{p}) \\ \mathbf{g}_{boucle}(\Theta, \mathbf{p}) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\Theta) \mathbf{p} \quad (9)$$

où $\mathbf{G}^T(\Theta) = \sqrt{3} \times [\mathbf{G}_{dipole}^T(\Theta) \ \mathbf{G}_{boucle}^T(\Theta)]^T$. Les expressions des vecteurs définissant le front d'onde sont les suivantes

$$\mathbf{k}_V(\Theta) = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) \sin(\Delta) \\ -\sin(\theta) \sin(\Delta) \\ \cos(\Delta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_H(\Theta) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

et $\mathbf{k}(\Theta) = \mathbf{k}_V(\Theta) \wedge \mathbf{k}_H(\Theta)$ sachant que \wedge désigne le produit vectoriel. En utilisant les résultats de [3], l'objectif de cet article est d'établir les performances du capteur vectoriel pour estimer en présence d'erreur de modèle les incidences Θ_i des sources. Les algorithmes analysés sont ceux de Nehorai [5] et Ferrara [1]. La matrice de covariance $\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)]$ du signal $\mathbf{x}(t)$ est supposée exacte. D'après (1), \mathbf{R}_x s'écrit

$$\mathbf{R}_x = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (10)$$

où $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdots \tilde{\mathbf{a}}_M] = \mathbf{A} + \mathbf{E}$ sachant que $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_M]$ et $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\Theta_1, \mathbf{p}_1) \cdots \mathbf{a}(\Theta_M, \mathbf{p}_M)]$. La matrice \mathbf{R}_s est la covariance du signal $\mathbf{s}^T(t) = [s_1(t) \cdots s_M(t)]$ et $\sigma^2 \mathbf{I}_N$ est celle du bruit additif $\mathbf{b}(t)$. On supposera dans les calculs de performances que $E[\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^H] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_N$ et $E[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^H] = \mathbf{0}_N$ et que \mathbf{e}_m est gaussien et circulaire.

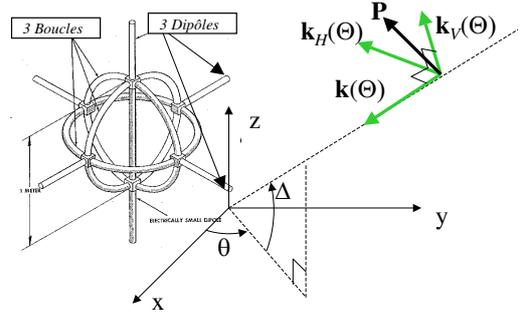


FIGURE 1 – Capteur vectoriel - Incidence - Polarisation

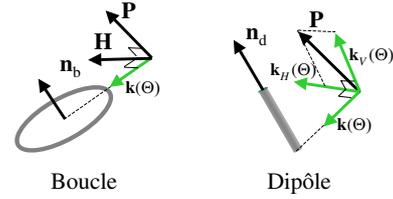


FIGURE 2 – Polarisation incidente à une boucle et un dipôle

3 Algorithmes et performances

3.1 Approche de Nehorai [5]

Cette approche fonctionne uniquement en mono-source sur le capteur vectoriel et nécessite une estimation du vecteur $\tilde{\mathbf{a}}_1$ de la source de l'équation (2). En utilisant le vecteur propre \mathbf{e}_s suivant associé à la valeur propre maximale de \mathbf{R}_x on obtient

$$\mathbf{e}_s = \frac{e^{j\varphi}}{\sqrt{6}} \tilde{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_{dipole} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{boucle} \end{bmatrix} / \sqrt{2}$$

$$\text{où } \begin{cases} \tilde{\mathbf{g}}_{dipole} = e^{j\varphi} \mathbf{g}_d^1 + e^{j\varphi} \mathbf{e}_{1d} / \sqrt{3} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{boucle} = e^{j\varphi} \mathbf{g}_b^1 + e^{j\varphi} \mathbf{e}_{1b} / \sqrt{3} \end{cases} \quad (11)$$

où $\mathbf{g}_d^1 = \mathbf{g}_{dipole}(\Theta_1, \mathbf{p}_1)$, $\mathbf{g}_b^1 = \mathbf{g}_{boucle}(\Theta_1, \mathbf{p}_1)$, $\mathbf{e}_{1d} = \mathbf{e}_1(1:3)$ et $\mathbf{e}_{1b} = \mathbf{e}_1(4:6)$. Sachant que $\mathbf{k}(\Theta) = \mathbf{k}_V(\Theta) \wedge \mathbf{k}_H(\Theta)$, on peut prouver d'après (5)(7) que $\mathbf{k}(\Theta) = \mathbf{g}_{dipole}(\Theta, \mathbf{p}) \wedge \mathbf{g}_{boucle}^*(\Theta, \mathbf{p})$ indépendamment de la polarisation \mathbf{p} incidente. L'estimé $\hat{\mathbf{k}}$ du vecteur d'onde $\mathbf{k}(\Theta_1)$ a alors l'expression suivante

$$\hat{\mathbf{k}}(\Theta_1) \approx \hat{\mathbf{k}} = [\hat{u} \ \hat{v} \ \hat{w}]^T = \Re(\tilde{\mathbf{g}}_{dipole} \wedge \tilde{\mathbf{g}}_{boucle}^*) \quad (12)$$

où $*$ désigne le conjugué et $\Re(\cdot)$ la partie réelle. Sachant que $\mathbf{k}(\Theta) = [u \ v \ w]^T$ avec $u = -\cos(\theta) \cos(\Delta)$, $v = -\sin(\theta) \cos(\Delta)$ et $w = -\sin(\Delta)$, l'estimation de l'azimut et de l'élévation de la source valent alors

$$\hat{\theta}_1 = -\angle(\hat{u} + j\hat{v}) \quad \hat{\Delta}_1 = \angle(\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2} - j\hat{w})$$

où $\angle z$ désigne la phase de z . En notant que $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \Gamma(\mathbf{u}) \mathbf{v}$ et $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, on peut montrer d'après (11)(12) que le vecteur $\hat{\mathbf{k}}$ est lié à l'erreur de modèle de la façon suivante

$$\hat{\mathbf{k}} \approx \mathbf{k}(\Theta_1) + \Re(\Gamma(\mathbf{g}_d^1) \mathbf{e}_{1b}^* - \Gamma(\mathbf{g}_b^{1*}) \mathbf{e}_{1d}) / \sqrt{3}$$

En supposant que les vecteurs \mathbf{e}_{1b} et \mathbf{e}_{1d} soient indépendants de covariance $\sigma_e^2 \mathbf{I}_3$ et que $E[\Re(\mathbf{z}) \Re(\mathbf{z})^T] = \Re(E[\mathbf{z}\mathbf{z}^H]) / 2$ lorsque \mathbf{z} est circulaire, la covariance $\mathbf{R}_k = E[\partial \mathbf{k} \partial \mathbf{k}^H]$ de l'erreur d'estimation $\partial \mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{k}(\Theta_1)$ vaut alors

$$\mathbf{R}_k = \frac{\sigma_e^2}{6} (\Gamma(\mathbf{g}_d^1) \Gamma^H(\mathbf{g}_d^1) + \Gamma(\mathbf{g}_b^{1*}) \Gamma^H(\mathbf{g}_b^{1*}))$$

En remarquant que $\Gamma(\mathbf{u}) \Gamma^H(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_3 - \mathbf{u}^* \mathbf{u}^T$ lorsque $\mathbf{u}^H \mathbf{u} = 1$, que $\mathbf{G}_{boucle}(\Theta) \mathbf{p} = -\mathbf{G}_{boucle}(\Theta) \mathbf{p}^{\perp*}$ où $\mathbf{p}^{\perp H} \mathbf{p} = 0$ et que $\mathbf{p} \mathbf{p}^H + \mathbf{p}^{\perp} \mathbf{p}^{\perp H} = \mathbf{I}_2$, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k &= \frac{\sigma_e^2}{6} (\mathbf{G}_{dipole}(\Theta_1) \mathbf{G}_{dipole}^T(\Theta_1) + 2\mathbf{k}(\Theta_1) \mathbf{k}^T(\Theta_1)) \\ &= \frac{\sigma_e^2}{6} (\mathbf{I}_3 + \mathbf{k}(\Theta_1) \mathbf{k}^T(\Theta_1)) \end{aligned} \quad (13)$$

parce que $\mathbf{G}_{dipole}(\Theta) \mathbf{G}_{dipole}^T(\Theta) = \mathbf{I}_3 - \mathbf{k}(\Theta) \mathbf{k}^T(\Theta)$. Il est possible de démontrer que la relation entre les erreurs $\partial \Theta = [\partial \theta \partial \Delta]^T$ de l'incidence et celle du vecteur d'onde $\partial \mathbf{k}$ s'écrit

$$\partial \Theta = J(\Theta) \partial \mathbf{k} \text{ avec } J(\Theta) = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\cos(\Delta)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{G}_{dipole}^T(\Theta)$$

La matrice de covariance $\mathbf{R}_\Theta = E[\partial \Theta \partial \Theta^H]$ de l'erreur d'estimation des incidences vaut alors

$$\mathbf{R}_\Theta = J(\Theta) \mathbf{R}_k J^T(\Theta) = \begin{pmatrix} (EQM_\theta)^2 & \\ & (EQM_\Delta)^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

où $(EQM_\theta)^2 = E[|\partial \theta|^2]$ et $(EQM_\Delta)^2 = E[|\partial \Delta|^2]$ sont les Erreurs Quadratiques Moyennes (EQMs) en azimut et élévation. D'après (6), on vérifie que $\mathbf{G}_{dipole}^T(\Theta) \mathbf{G}_{dipole}(\Theta) = \mathbf{I}_2$ et que $\mathbf{G}_{dipole}^T(\Theta) \mathbf{k}(\Theta) = \mathbf{0}$ car les vecteurs $\mathbf{k}(\Theta)$, $\mathbf{k}_V(\Theta)$ et $\mathbf{k}_H(\Theta)$ forment une base orthonormée. D'après (13), les prévisions en azimut (EQM_θ) et élévation (EQM_Δ) vérifient

$$EQM_\theta = \frac{\sigma_e}{\sqrt{6}|\cos(\Delta)|} \quad EQM_\Delta = \frac{\sigma_e}{\sqrt{6}} \quad (15)$$

Ainsi les performances sont indépendantes de la polarisation.

3.2 Approche MUSIC de Ferrara [1]

La méthode MUSIC permet d'estimer les incidences Θ_m de plusieurs sources. L'expression (9) du vecteur directeur nécessite la minimisation suivante du critère

$$J_{DP}(\Theta, \mathbf{p}) = \mathbf{a}^H(\Theta, \mathbf{p}) \hat{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{a}(\Theta, \mathbf{p}) / 6$$

suivant les paramètres Θ et \mathbf{p} . La matrice $\hat{\Pi}(\mathbf{E})$ est le projecteur bruit de la matrice exacte \mathbf{R}_x de l'équation (10) vérifiant

$$\hat{\Pi}(\mathbf{E}) = \mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{A}} \left(\tilde{\mathbf{A}}^H \tilde{\mathbf{A}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^H$$

En exploitant la structure $\mathbf{a}(\Theta, \mathbf{p}) = \mathbf{G}(\Theta) \mathbf{p}$ et minimisant le critère $J_{DP}(\Theta, \mathbf{p})$ en fonction de \mathbf{p} , l'algorithme de Ferrara [1] réduit l'estimation sur les angles avec

$$\hat{\Theta}_m = \min_{\Theta} \lambda_{\min} \left(\mathbf{G}^T(\Theta) \hat{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{G}(\Theta) \right) / 6 \quad (17)$$

où $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$ est la valeur propre minimale de \mathbf{Q} . Le projecteur $\hat{\Pi}(\mathbf{E})$ vérifie $\hat{\Pi}(\mathbf{E}) \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ sachant que $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$ est l'erreur de modèle telle que $\hat{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ lorsque $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$. Dans

ces conditions l'algorithme fait une erreur d'estimation $\partial \Theta_m = \hat{\Theta}_m - \Theta_m$. L'objectif est de donner une l'expression analytique des EQMs de l'azimut θ_m et de l'élévation Δ_m à partir de la covariance de l'erreur de $\partial \Theta_m = [\partial \theta_m \partial \Delta_m]^T$. Les erreurs d'estimations $\partial \Theta_m$ et $\partial \mathbf{p}_m$ sont issues d'une optimisation du critère $J_{DP}(\Theta, \mathbf{p})$ au voisinage de Θ_m et \mathbf{p}_m selon [3]. D'après (17), les erreurs s'écrivent

$$\partial \eta_i = -\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{E}) \nabla_i(\mathbf{E}) \quad (18)$$

$$\partial \eta_i = \begin{bmatrix} \partial \Theta_i \\ \partial \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \nabla_i(\mathbf{E}) = \Re \left(\dot{\mathbf{V}}_i^T \hat{\Pi}(\mathbf{E}) \mathbf{a}(\Theta_i, \mathbf{p}_i) \right) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{E}) = \Re \left(\dot{\mathbf{V}}_i^H \hat{\Pi}(\mathbf{E}) \dot{\mathbf{V}}_i \right) \end{cases} \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}(\Theta_i)}{\partial \theta} \mathbf{p}_i & \frac{\partial \mathbf{G}(\Theta_i)}{\partial \Delta} \mathbf{p}_i \end{bmatrix} \text{ et } \dot{\mathbf{V}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{G}}_i & \mathbf{G}(\Theta_i) \end{bmatrix}$$

D'après [4][3], l'approximation d'ordre 1 de $\hat{\Pi}(\mathbf{E})$ vérifie $\hat{\Pi}(\mathbf{E}) \approx \hat{\Pi} + \Delta \hat{\Pi}$ avec $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}(\mathbf{0})$, $\Delta \hat{\Pi} = \Delta \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^H$, $\Delta \mathbf{U} = -\hat{\Pi} \mathbf{E} \mathbf{A}^\#$ et $\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$. On en déduit alors que l'approximation d'ordre 1 de $\nabla_i(\mathbf{E})$ s'écrit $\nabla_i(\mathbf{E}) \approx \Re \left(\dot{\mathbf{V}}_i^T \hat{\Pi} \mathbf{e}_i \right)$ et que l'erreur devient

$$\partial \eta_i \approx \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{0}) \Re \left(\dot{\mathbf{V}}_i^T \hat{\Pi} \mathbf{e}_i \right) \quad (20)$$

En rappelant que \mathbf{e}_i est gaussien et circulaire de covariance $\sigma_e^2 \mathbf{I}_N$ et que lorsque \mathbf{z} est circulaire on obtient $E[\Re(\mathbf{z}) \Re(\mathbf{z})^T] = \Re(E[\mathbf{z}\mathbf{z}^H]) / 2$, la covariance de $\partial \eta_i$ vaut alors

$$\mathbf{R}_{\eta_i}^{DP} = \frac{\sigma_e^2}{2} \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{0}) \text{ avec } \begin{cases} EQM_{\theta_i} = \sqrt{\mathbf{R}_{\eta_i[1][1]}^{DP}} \\ EQM_{\Delta_i} = \sqrt{\mathbf{R}_{\eta_i[2][2]}^{DP}} \end{cases} \quad (21)$$

où EQM_{θ_m} et EQM_{Δ_m} sont les EQMs en azimut et élévation de la $m^{ième}$ source et $\mathbf{R}_{[i][j]}$ est l'élément de la $i^{ième}$ ligne et $j^{ième}$ colonne de \mathbf{R} . L'objectif est de donner leurs expressions dans le contexte mono-source où

$$\hat{\Pi} = \mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{G}(\Theta_1) \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^H \mathbf{G}^H(\Theta_1)}{6}$$

En utilisant les propriétés de $\mathbf{G}(\Theta)$ ainsi que de ses dérivées selon (5)-(9), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{0}) &= 3 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{D}_1 = 2\Re(\mathbf{I}_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^H) \\ \mathbf{u} = 2\Re(\mathbf{p}_1^\perp - z_1 \mathbf{p}_1) \sin(\Delta_1) \end{cases} \\ z_1 &= \mathbf{p}_1^H \mathbf{p}_1^\perp \quad h_{11} = 1 + (1 - 2|z_1|^2) (\sin(\Delta_1))^2 \end{aligned} \quad (22)$$

sachant que $\mathbf{p}_1^\perp = [-\beta \ \alpha]^T$ lorsque $\mathbf{p}_1 = [\alpha \ \beta]^T$. En utilisant l'inversion par blocs de la matrice $\mathbf{H}_1(\mathbf{0})$, la covariance de l'erreur d'estimation $\partial \Theta_1$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\Theta_1}^{DP} &= \frac{\sigma_e^2}{6} (\mathbf{A}_1^{-1} + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1}) \quad (23) \\ \mathbf{D}_1^{-1} &= (\mathbf{D}_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1^T)^{-1} = \mathbf{D}_1^{-1} + \frac{\mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{D}_1^{-1}}{h_{11} - \mathbf{u}^T \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{u}} \end{aligned}$$

D'après les équations précédentes, les expressions des variances $\mathbf{R}_{\Theta_1[1][1]}^{DP} = (EQM_{\theta_1})^2$ et $\mathbf{R}_{\Theta_1[2][2]}^{DP} = (EQM_{\Delta_1})^2$ vérifient

$(EQM_{\theta_1})^2 = \sigma_e^2/(6\Psi)$ et $(EQM_{\Delta_1})^2 = \sigma_e^2/6$ avec $\Psi = h_{11} - \mathbf{u}^T \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{u}$. En montrant que $\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_1 = 1 - |z_1|^2$, $|z_1|^2 = (jz_1)^2$ et $\mathbf{D}_1^{-1} = 2\Re(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^H) / |z_1|^2$, on en déduit que $\Psi = \cos(\Delta_1)^2$ et donc que les EQMs de l'azimut et de l'élévation EQM_{θ_1} et EQM_{Δ_1} s'écrivent comme ceux de l'algorithme de Nehorai à l'équation (15). En contexte mono-source les performances de MUSIC sont alors indépendantes de la polarisation et de l'azimut pour le réseau vectoriel. Toutefois la polarisation a une influence sur les performances en contexte multi-sources conformément à (19)-(21). Sachant qu'un réseau circulaire uniforme de N capteurs et de diamètre D a selon [2] une précision en azimut de $\sigma_e / (\pi \sqrt{N} D / \lambda)$ à élévation nulle, on en déduit que le diamètre équivalent du capteur vectoriel vaut $D_e = \sqrt{6/N} \lambda / \pi$.

4 Simulation

L'objectif est de comparer d'une part les performances des algorithmes MUSIC et Nehorai sur le capteur vectoriel et d'autre part de valider les expressions théoriques des EQMs avec des estimations empiriques sur 500 réalisations. La figure-3 effectue ces comparaisons pour une source d'incidence $\theta_1 = 180^\circ$ et $\Delta_1 = 60^\circ$ en fonction du niveau d'erreur de modèle σ_e . La figure-4 donnent les résultats en présence d'une seconde source d'incidence $\theta_2 = 80^\circ$ et $\Delta_2 = 20^\circ$ de polarisation $\mathbf{p}_2 = [1 \ 0]^T$ sachant que $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1]^T$. Les courbes en noir sont les EQMs (ou précision) en azimut et les courbes en bleu sont celles des élévations. Les traits pleins correspondent aux expressions analytiques et celles en pointillés aux empiriques. Les résultats valident les calculs analytiques en montrant que les EQMs empiriques suivent les théoriques. D'autre part, on constate bien que l'algorithme de Nehorai ne fonctionne pas en bi-sources et donne un résultat barycentrique donnant un biais.

5 Conclusions

Dans cet article nous avons étudié le comportement du capteur vectoriel pour estimer les directions d'arrivées des sources incidentes. Pour cela nous avons calculé et validé les EQMs théoriques de l'algorithme de Nehorai ainsi que ceux de MUSIC en diversité de polarisation. On montre ainsi théoriquement que le capteur vectoriel donne pour les deux algorithmes [5][1] les mêmes performances en mono-source et que dans ce contexte les EQMs sont indépendantes de la polarisation et de l'azimut. Le capteur vectoriel a une ouverture équivalente au diamètre D_e d'un réseau circulaire avec N antennes valant $D_e = \sqrt{6/N} \lambda / \pi$. En multi-sources seul l'algorithme MUSIC peut fonctionner.

Références

[1] E. R. Ferrara and T. M. Parks. Direction finding with an array of antennas having diverse polarizations. *IEEE Trans.*

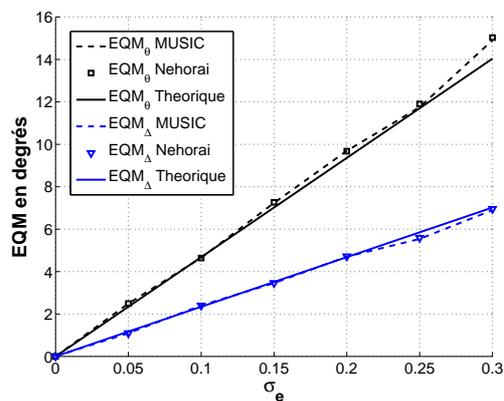


FIGURE 3 – MonoSource

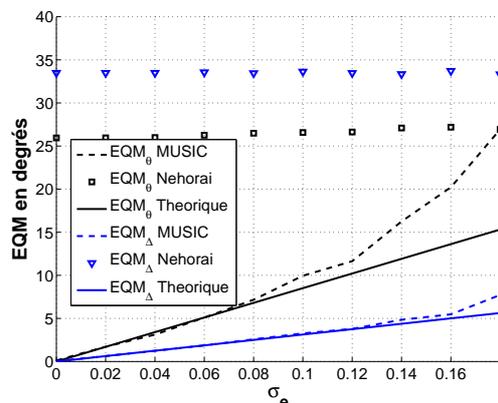


FIGURE 4 – Bi-sources

Antennas. Propagation., 31 :231–236, March 1983.

- [2] A. Ferréol and P. Chevalier. High resolution direction finding : From performance toward antenna array optimization - The mono-source case. In *EUSIPCO*, pages 1973–1977, Glasgow, August 2009.
- [3] A. Ferréol, C. Delestre, and P. Larzabal. DOA estimation performances of multi-parametric MUSIC in presence of modeling errors - case of coherent multi-paths. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Florence, May 2014.
- [4] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors : Case of MUSIC. *IEEE Trans. Signal Processing*, 54(3) :907–920, March 2006.
- [5] A. Nehorai and E. Paldi. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(2) :376–398, February 1994.
- [6] R. O. Schmidt. *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA, November 1981.