Convergence des itérés de FISTA

Antonin CHAMBOLLE[1], Charles DOSSAL[2]

[1]CMAP Ecole Polytechnique
Palaiseau, France

[2]IMB, Université de Bordeaux
Talence, France

antonin.chambolle@cmap.polytechnique.fr, charles.dossal@math.u-bordeaux1.fr

Résumé – Le Fast Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithm (FISTA) est un algorithme proposé par Beck et Teboulle en 2008 permettant de minimiser une fonction convexe $F = f + g$ définie sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ somme de deux fonctions convexes f et g où f est différentiable à gradient Lipschitz et où l'opérateur proximal de g est facilement calculable. Cet algorithme permet d'assurer une convergence rapide de la suite $F(x_n)$ vers $F(x^*)$ où x^* est un minimiseur de F mais il n'existait pas jusqu'à présent de preuve de convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérés. Dans cet article, nous montrons qu'en modifiant légèrement les paramètres de FISTA, on peut assurer la convergence, faible dans le cas d'un espace de dimension infini, de la suite minimisante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Abstract – The Fast Iterative Schrinkage/Thresholding Algorithm (FISTA) is an algorithm proposed by Beck and Teboulle in 2008 developped to minimize a convex function $F = f + g$ defined on an Hilbert space $\mathcal{H}$ sum of two convex functions f and g such that f is differentiable and which gradient is Lipschitz and such that the proximal operator of g is easily computable. This algorithm ensures an optimal decay of $F(x_n)$ to $F(x^*)$ where x^* is a minimizer of F but up to now there did not exist a proof of the convergence of the sequence of iterates $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In this article, we show that, under a mild modification of parameters of FISTA, the sequence of iterates $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges, weakly in an infinite dimension space.

1 Introduction

Nous considérerons ici un problème d'optimisation spécifique défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous supposerons qu'une fonction F vérifie les Hypothèses **H1** si

Définition 1 *F est une fonction convexe définie sur $\mathcal{H}$ somme de deux fonctions f et g convexes, propres et semi continue inférieurement. De plus f est différentiable (au sens de Fréchet) et ∇f est une application $L-$Lipschitz et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur proximal de λg est calculable.*

Dans la suite nous considérerons le problème suivant :

$$\min_{x\in\mathcal{H}} F(x) = \min_{x\in\mathcal{H}} f(x) + g(x). \qquad (1)$$

Le problème du LASSO (ou BP) entre bien entendu dans ce cadre assez général. Une très vaste littérature d'analyse convexe a permis de mettre en place un large éventail d'algorithmes dits *proximaux* pour résoudre le problème (1). On peut citer par exemple, le Forward-Backward, le Primal Dual de Chambolle et Pock, l'algorithme de Douglas-Rachford, l'ADMM et sa version préconditionnée, le Forward-Backward-Forward. Dans cette partie nous nous concentrerons sur une version inertielle de Forward-Backward, proposée par Beck et Teboulle [4] en 2008 appelée FISTA (Fast Iterative thresholding Algorithm) à partir des travaux de Nesterov [10, 11] et Güler [6]. Dans [4] les auteurs démontrent qu'on peut atteindre une vitesse de convergence sur l'objective en $0(\frac{1}{n^2})$ où n est le nombre d'itérations mais ne donnent pas de preuve de convergence forte ou faible des itérés.

Du fait de sa vitesse de convergence optimale, Nesterov ayant montré qu'on ne pouvait pas espérer une meilleure vitesse de décroissance avec des méthodes d'ordre 1 [10], FISTA est un algorithme largement utilisé dans la communauté optimisation et particulièrement en traitement d'images. Les illustration du papier de Beck et Teboulle sont d'ailleurs des problèmes inverses en traitement d'images (débruitage et déconvolution).

Dans ce premier chapitre consacré à FISTA nous résumons les arguments proposés dans [5] qui permettent de démontrer la convergence faible des itérés de FISTA pour un choix adéquat des paramètres. Ce problème était un problème ouvert depuis la description de cet algorithme par leurs auteurs.

2 Algorithme Forward-Backward (FB)

Si F peut s'exprimer comme la somme de deux fonctions f et g convexes, sci, propres, si f est différentiable et à gradient $L - Lipschitz$ et si F admet un minimiseur alors l'algorithme Forward-Backward permet de construire une suite qui converge faiblement vers un minimiseur de F. Le FB ne nécessite pas le calcul de Prox_F mais uniquement celui de Prox_g et est basé sur l'opérateur suivant :

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad (2)$$
$$x \longmapsto prox_{\gamma g}(x - \gamma \nabla f(x)). \quad (3)$$

où γ est un réel choisi dans l'intervalle $]0, \frac{2}{L}$. L'algorithme Forward-Backward construit une suite vérifiant $x_{n+1} = Tx_n$, pour tout $x_0 \in \mathcal{H}$. L'intérêt de cet algorithme réside dans la proposition suivante :

Proposition 1 *Pour tout $x_0 \in \mathcal{H}$, et pour tout $\gamma \in]0, \frac{2}{L}[$ la suite définie par $x_{n+1} = Tx_n$ converge faiblement vers un minimiseur x^* de F. De plus on a*

$$F(x_n) - F(x^*) = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4)$$

La preuve de la convergence faible vers un minimiseur repose sur le fait que l'opérateur T est fermement non expansif et que les points fixe de T sont les minimiseurs de F. On pourra trouver une démonstration de la vitesse de convergence de l'objective en $O\left(\frac{1}{n}\right)$ dans [4].
On peut noter que chaque étape de cet algorithme se réduit à un seuillage doux et à une descente de gradient à pas fixe si la fonction g est une norme ℓ_1. C'est pour cette raison que ce même algorithme est parfois appelé *Iterative Soft Thresholding Algorithm* ou ISTA. Cette dénomination est fréquente dans la communauté Image.

3 FISTA

3.1 Définition et premières propriétés

FISTA pour Fast Iterative Soft Thresholding Algorithm proposé par Beck et Teboulle est une accélération de FB reposant sur une sur-relaxation de ce dernier.

Définition 2 *Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels croissante telle que $t_1 = 1$ et vérifiant la relation suivante*

$$t_n^2 - t_{n+1}^2 - t_{n+1} \geqslant 0. \quad (5)$$

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\alpha_n = \frac{t_n-1}{t_{n+1}}$ et $x_0 \in \mathcal{H}$.
FISTA est l'algorithme, dépendant de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$y_0 = x_0 \quad (6)$$
$$\forall n \geqslant 1,\ x_n = T(y_{n-1}), \quad (7)$$
$$\forall n \geqslant 1,\ y_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}). \quad (8)$$

La suite proposée par Beck et Teboulle correspond au choix de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assurant l'égalité dans l'inégalité (5) c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{t_n^2 + \frac{1}{4}}. \quad (9)$$

L'intérêt de cette suite est que c'est celle qui majore toute les suites vérifiant (5) et qu'elle permet de mettre à profit le résultat suivant dû à Beck et Teboulle [4] :

Théorème 1 Thm 4.4 [4]
Si la fonction F est coercive et vérifie l'hypothèse **H1***, si la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (5) et si x^* est un minimiseur de F alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ produite par FISTA vérifie*

$$F(x_n) - F(x^*) \leqslant \frac{1}{2t_n^2} \|x_0 - x^*\|^2. \quad (10)$$

Comme le choix (9) assure que $t_n \geqslant \frac{n+1}{2}$ on en déduit que pour ce choix de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a le contrôle suivant :

$$F(x_n) - F(x^*) \leqslant \frac{2}{(n+1)^2} \|x_0 - x^*\|^2. \quad (11)$$

On a évidemment la même borne pour le choix $t_n = \frac{n+1}{2}$ qui vérifie (5) et qui correspond à $\alpha_n = \frac{n+1}{n-2}$, également utilisé en pratique dans de nombreux articles.
On peut noter que contrairement à FB, FISTA n'est pas un algorithme de descente et en pratique la suite $F(x_n)$ est rarement décroissante, Beck et Teboulle ont proposé une version monotone de FISTA appelée MFISTA [3] mais la convergence des itérés n'est pas garantie pour cette version non plus.
L'algorithme FISTA induit dans de nombreuses situations une meilleure vitesse de convergence de $F(x_n) - F(x^*)$ que FB. Une des principaux défaut de FISTA est son absence de convergence. En effet, encore à ce jour, il n'existe pas de preuve de convergence de la suite des itérés $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de FISTA pour le choix originel (9). La preuve de convergence de $F(x_n) - F(x^*)$ permet de montrer facilement que toute valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un minimiseur de F mais il n'est pas démontré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas *tourner à l'infini* au fond d'une cuvette dans le cas où il existe un ensemble infini de minimiseurs.

3.2 Convergence de la suite des itérés

La contribution principale de l'article [5] est le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit F une fonction vérifiant l'hypothèse* **H1** *admettant au moins un minimiseur, si $x_0 \in \mathcal{H}$, si a un réel strictement supérieur à 2 et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par*

$$t_n = \frac{n+a-1}{a} \quad \forall n \geqslant 1 \quad (12)$$

alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par FISTA converge faiblement vers un minimiseur x^* de F.

On peut noter tout d'abord que le choix $t_n = \frac{n+1-a}{a}$ vérifie bien l'hypothèse (5) si $a > 2$ dans la mesure où

$$\rho_{n+1} := t_n - t_{n+1}^2 + t_{n+1} = \frac{(a-2)n + (a-1)^2}{a^2} \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1. \quad (13)$$

La démonstration de ce théorème utilise les inégalités qui relient étroitement deux suites $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$w_n := F(x_n) - F(\tilde{x}) \quad \delta_n = \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 \quad (14)$$

où $\tilde{x}$ est un minimiseur quelconque de F.

La démonstration du Théorème 2 peut être décomposée en trois étapes :

1. En reprenant la preuve originale de Beck et Teboulle, on montre que si t_n est défini par (12), la série de terme général nw_n est convergente.
2. On montre ensuite que la convergence de la série de terme général nw_n implique la convergence de la série de terme général $n\delta_n$.
3. En utilisant des arguments de Attouch et al [1] repris par Moudafi et al [2] et Lorenz et al. [8], on montre enfin que la convergence de la série de terme général $n\delta_n$ implique la convergence faible des itérés $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Avant de donner les principaux éléments de la démonstration qui est in extenso et détaillée dans [5], on peut noter le fait que la suite $(nw_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à ℓ_1 pour un choix adéquat de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un résultat complémentaire au fait bien connu que la suite $(n^2w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à ℓ_∞.
Sans être une propriété plus forte, elle indique que même s'il est impossible d'établir une meilleure décroissance que $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en utilisant uniquement le gradient et l'opérateur proximal, on a $\liminf_n n^2 w_n = 0$ et ainsi même si on ne peut borner w_n d'une manière générale que par $\frac{C}{n^2}$, cette borne est relativement pessimiste pour certaines valeurs de n pour une fonction f donnée. Ce qui est observé numériquement. La borne en $\frac{C}{n^2}$ n'est qu'une borne mais pas un reflet précis du comportement réel de w_n.

1. La démonstration de ce premier point s'appuie sur le théorème suivant qui précise le théorème 1 de Beck et Téboulle :

   Théorème 3 *Si la suite* $(t_n)_{n\geqslant 1}$ *vérifie la relation* (5) *et que* $t_1 = 1$ *et si* $\gamma \leqslant \frac{1}{L}$ *alors pour tout* $N \geqslant 2$,
   $$t_{N+1}^2 w_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} \rho_{n+1} w_n \leqslant v_1 - v_{N+1}, \qquad (15)$$
   où $v_n := \frac{1}{2\gamma}\left\|-t_n x_n + \tilde{x} + (t_n-1)x_{n-1}\right\|^2$

   Pour démontrer ce Théorème, on reprend la structure de la démonstration de Beck et Teboulle [4] sur le contrôle de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui utilise la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut utiliser l'inégalité suivante valable pour tout couple $(x,\bar{x}) \in \mathcal{H}$ et qui découle du caractère fortement convexe de la fonction définissant l'opérateur proximal :
   $$F(x) + \frac{\|x-\bar{x}\|^2}{2\lambda} \geqslant F(Tx) + \frac{\|x - T\bar{x}\|^2}{2\lambda}. \qquad (16)$$
   En appliquant cette inégalité aux points $x = \frac{(t_{n+1}-1)x_n + \tilde{x}}{t_{n+1}}$ et $\bar{x} = y_n$ on obtient
   $$t_{n+1}^2 w_{n+1} + v_{n+1} + (t_n^2 - t_{n+1}^2 + t_{n+1})w_n \leqslant t_n^2 w_n + v_n. \qquad (17)$$
   Comme la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation (5), on déduit que $\rho_{n+1} := t_n^2 - t_{n+1}^2 + t_{n+1} \geqslant 0$ et la conclusion du Théorème 3 est obtenue en sommant (17) pour $n = 1$ à $n = N$.
   Muni de ce théorème on observe juste que si on fait le choix $t_n = \frac{n+a-1}{a}$ avec $a > 2$, on a $\rho_n = \frac{(a-2)n + (a-1)^2}{a^2}$, et en faisant tendre N vers $+\infty$ dans le théorème précédent on déduit que la série de terme général nw_n est convergente.
2. Pour démontrer le deuxième point on s'appuie à nouveau sur l'inégalité (16). En appliquant cette relation aux points $x = x_n$ et $\bar{x} = y_n$ et en utilisant $\alpha_n = \frac{n-1}{n+a}$ on déduit que
   $$(n+a)^2\delta_{n+1} - (n-1)^2\delta_n \leqslant \lambda(n+a)^2(w_n - w_{n+1}). \quad (18)$$
   En sommant cette inégalité sur $n \in \mathbb{N}$ on déduit que
   $$a\sum_{n\geq 2}(2n+a-2)\delta_n \leqslant \frac{1}{L}\left((a+1)^2(w_1) + \sum_{n\geq 2}(2n+2a-1)(w_n)\right).$$
   Comme la série de terme général nw_n est convergente, la série de terme général $n\delta_n$ est convergente.
3. Pour démontrer le troisième point, on considère deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation (6) pour une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]0,1[$ qu'on ne spécifie pas dans un premier temps à FISTA. On note $\tilde{x}$ un minimiseur de F et on définit
   $$\Phi_n := \frac{1}{2}\|x_n - \tilde{x}\|^2.$$
   En suivant l'approche d'Attouch et al [1], on utilise le Théorème d'Opial pour montrer que la convergence de la suite réelle Φ_n implique la convergence faible de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   En utilisant les propriétés de monotonicité de la sous différentielle de g et le caractère cocoercif du gradient de f, on montre que la convergence de la suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est assurée par la convergence de la série de terme général
   $$\delta_j \sum_{n=j}^{+\infty}\prod_{l=j}^{n}\alpha_l. \qquad (19)$$
   Les précédents travaux utilisant cette approche, font une hypothèse du type $\alpha_n \leqslant \alpha < 1$, mais cette hypothèse n'est pas réalisée dans le cas de FISTA. Si on spécifie la valeur de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au cas de FISTA, on déduit que la convergence faible de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est conditionnée à la convergence de la série de terme général $j\delta_j$, ce qui conclut la démonstration.

Références

[1] F. Alvarez and H. Attouch. An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Anal.*, 9(1-2) :3–11, 2001. Wellposedness in optimization and related topics (Gargnano, 1999).

[2] M. Oliny A.Moudafi. Convergence of a splitting inertial proximal method for monotone operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 155(2) :447 – 454, 2003.

[3] A. Beck and M. Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems. *Trans. Img. Proc.*, 18(11) :2419–2434, November 2009.

[4] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2(1) :183–202, 2009.

[5] A. Chambolle and C. Dossal. How to make sure the iterates of "FISTA" converges. *HAL preprint*, 2014.

[6] O. Güler. New proximal point algorithms for convex minimization. *SIAM J. Optim.*, 2(4) :649–664, 1992.

[7] P.L. Combettes H. H. Bauschke. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer, 2011.

[8] D. Lorenz and T. Pock. An accelerated forward-backward algorithm for monotone inclusions. *CoRR*, abs/1403.3522, 2014.

[9] J. Mairal. Optimization with first-order surrogate functions. *International Conference on Machine Learning (ICML).*, 2013.

[10] Y. Nesterov. A method for solving the convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 269(3) :543–547, 1983.

[11] Y. Nesterov. *Introductory lectures on convex optimization*, volume 87 of *Applied Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004. A basic course.