

# Filtres adaptatifs rang faible : analyse de performances en grandes dimensions

Alice COMBERNOUX<sup>1</sup>, Frédéric PASCAL<sup>2</sup>, Guillaume GINOLHAC<sup>3</sup>, Marc LESTURGIE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>SONDRA-ONERA-CentraleSupélec, Plateau du Moulon, 3 rue Joliot-Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>2</sup>L2S-CentraleSupélec-CNRS-UPSud XI, Plateau du Moulon, 3 rue Joliot-Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

<sup>3</sup>LISTIC - Université de Savoie Mont Blanc, 5 chemin de Bellevue, 74944 Annecy-le-Vieux Cedex, France

alice.combernoux@centralesupelec.fr, frederic.pascal@centralesupelec.fr  
guillaume.ginolhac@univ-savoie.fr, marc.lesturgie@centralesupelec.fr

**Résumé** – Ce papier se place dans le cadre du filtrage d’un vecteur d’observation composé d’un signal d’intérêt corrompu par un bruit additif rang faible gaussien et un bruit blanc gaussien. Dans ce cadre, au lieu d’utiliser l’inverse de la matrice de covariance, on utilise un projecteur. Le signal filtré n’étant alors pas consistant en régime de grandes dimensions, on définit alors un nouveau filtre grâce aux outils de théorie des matrices aléatoires. Les performances de ces deux filtres en termes de perte en RSIB sont ensuite établies dans le régime de grandes dimensions. L’application de ces résultats au brouillage montre l’intérêt de notre approche.

**Abstract** – The paper addresses the problem of filtering an observation vector composed of a signal of interest corrupted by an additive low rank Gaussian noise plus a white Gaussian noise. In this context, instead of using the covariance matrix inverse, one uses a projector. Thus, as the filtered signal is not consistent in the large dimensional regime, we define a new filter from random matrix theory tools. The two filters performance in terms of SINR loss is then established in the large dimensional regime. The application of the results on jamming data shows the interest of our approach.

## 1 Introduction

En traitement du signal, la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  des données est très largement employée dans de nombreuses applications comme le filtrage, la détection radar/sonar ou en localisation. Il s’agit alors de filtrer les données reçues afin de supprimer les lobes secondaires et d’améliorer la détection pour pouvoir détecter et/ou localiser un éventuel signal d’intérêt perturbé par un bruit composé de la somme d’un bruit corrélé et d’un bruit blanc gaussien. Dans le cas d’un bruit corrélé rang faible où le rang est connu, la matrice de covariance est alors remplacée par le projecteur sur le sous-espace du bruit rang faible. Il existe alors un filtre rang faible fonction du projecteur [1, 2].

Cependant, en pratique, la matrice de covariance et le projecteur sont inconnus. On estime donc ce dernier à partir de la matrice de covariance estimée  $\hat{\mathbf{R}}$  (SCM pour *Sample Covariance Matrix*), obtenue à partir de  $K$  données secondaires. Le filtre adaptatif résultant n’est donc plus optimal, portant atteinte aux performances de filtrage, de détection et de localisation. De plus, comme dans de nombreuses applications telles que le radar MIMO, la taille des données à traiter grandit (*e.g.* plus grand nombre de capteurs) et les estimateurs définis traditionnellement ne parviennent plus forcément à estimer convenablement les quantités étudiées.

L’utilisation de la théorie des matrices aléatoires (RMT pour *Random Matrix Theory*) afin de calculer les performances des filtres rang faible existants est alors une alternative attractive pour améliorer le filtrage et obtenir un signal filtré plus proche

du signal filtré optimal. En effet, le signal filtré peut être vu comme une forme quadratique (FQ) de la forme  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}} \mathbf{s}_2$  où  $\hat{\mathbf{\Pi}}$  est le projecteur estimé. Il est alors connu en RMT que, en examinant le comportement spectral de  $\hat{\mathbf{R}}$ , cette FQ est consistante (*i.e.* tend vers  $\mathbf{s}_1^H \mathbf{\Pi} \mathbf{s}_2$ ) quand  $K$  tend vers l’infini mais ne l’est pas quand la taille des données  $m$  et  $K$  tendent vers l’infini à la même vitesse, *i.e.*  $m/K \rightarrow c \in ]0, +\infty[$ , noté régime grandes dimensions par la suite. C’est pourquoi, pour différents modèles de SCM comme dans [3, 4], les auteurs ont proposé de rectifier ce biais grâce à de nouveaux estimateurs consistants dans le régime grandes dimensions. Nous proposons donc dans ce papier d’utiliser l’estimateur consistant dans le régime grandes dimensions le plus approprié au modèle de données afin de calculer les performances des filtres rang faible existants mais aussi de définir un nouveau filtre pour améliorer le filtrage des données. Nous avons montré dans [5, 6] que le modèle le plus approprié est le modèle *spiked*, introduit par [7] et amenant à l’estimateur Spike-MUSIC [8, 4] de  $\mathbf{s}_1^H \hat{\mathbf{\Pi}} \mathbf{s}_2$ . On se propose enfin de mesurer et prédire leurs performances grâce à l’étude du SINR loss ou perte en RSIB (Rapport Signal à Interférences plus Bruit) en régime grandes dimensions.

*Notations* : Une lettre en italique est une quantité scalaire, les caractères gras en minuscule (majuscule) sont des vecteurs (matrices) et  $(\cdot)^H$  correspond à l’opérateur transposé conjugué.  $\mathbf{I}_N$  est la matrice identité de taille  $N \times N$  et  $\text{diag}(\cdot)$  est l’opérateur diagonalisation tel que  $(\mathbf{A})_{i,i} = (\text{diag}(\mathbf{a}))_{i,i} = (\mathbf{a})_{i,i}$  et égal à 0 sinon.  $\llbracket a, b \rrbracket$  est l’ensemble défini par  $\{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b, \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ . Enfin, l’abréviation iid correspond à *indépendant et identiquement distribué*.

## 2 Formulation du problème

### 2.1 Modèle des données

A partir d'un vecteur d'observation  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ , le problème consiste à le filtrer afin de pouvoir mieux détecter un signal complexe  $\mathbf{d}$  corrompu par un bruit additif  $\mathbf{c} + \mathbf{n}$  par la suite et grâce au signal filtré. Le vecteur d'observation peut alors être écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{c} + \mathbf{b} \quad (1)$$

où  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}})$  est le signal d'intérêt,  $\alpha$  est un paramètre complexe inconnu déterministe,  $\mathbf{a}(\Theta)$  le steering vecteur et  $\Theta_{\mathbf{d}}$  est un vecteur déterministe inconnu contenant les paramètres de localisation du signal d'intérêt. Le bruit additif est composé d'un bruit blanc additif complexe gaussien  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{m \times 1} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$  et d'un bruit rang faible gaussien  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  modélisé par un vecteur aléatoire complexe gaussien centré et de matrice de covariance normalisée  $\mathbf{C}$  ( $\text{tr}(\mathbf{C}) = m$ ), i.e.  $\mathbf{c} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{C})$ . Par conséquent, la matrice de covariance du bruit  $\mathbf{c} + \mathbf{b}$  est  $\mathbf{R} = \mathbf{C} + \sigma^2 \mathbf{I}_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . De plus, en considérant un bruit gaussien rang faible, on a  $\text{rang}(\mathbf{C}) = r \ll m$  et on peut écrire la décomposition en valeurs propres de  $\mathbf{C}$  comme suit  $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ , où  $\gamma_i$  et  $\mathbf{u}_i, i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  sont respectivement les valeurs propres non nulles et les vecteurs propres associés de  $\mathbf{C}$ .  $\mathbf{R}$  se décompose alors comme  $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  avec  $\lambda_1 = \gamma_1 + \sigma^2 > \dots > \lambda_r = \gamma_r + \sigma^2 > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_m = \sigma^2$ . On définit enfin le projecteur sur le sous-espace bruit rang faible  $\mathbf{\Pi}_c$  et le projecteur sur le sous-espace orthogonal au sous-espace du bruit rang faible  $\mathbf{\Pi}_c^\perp$  :

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi}_c = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \\ \mathbf{\Pi}_c^\perp = \mathbf{I}_m - \mathbf{\Pi}_c = \sum_{i=r+1}^m \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \end{cases} \quad (2)$$

Cependant, en pratique,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{\Pi}_c^\perp$  sont inconnus et doivent être estimés. Traditionnellement, la SCM est utilisée et estimée à partir de  $K$  données secondaires sans signal d'intérêt iid  $\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{b}_k, k \in \llbracket 1, K \rrbracket$  et peut être écrite comme  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H = \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$  où  $\hat{\lambda}_i$  et  $\hat{\mathbf{u}}_i$  sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de la SCM avec  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_m, \mathbf{c}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{C})$  et  $\mathbf{b}_k \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$ . Les projecteurs traditionnellement estimés sont donc :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{\Pi}}_c = \sum_{i=1}^r \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \\ \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp = \mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{\Pi}}_c = \sum_{i=r+1}^m \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \end{cases} \quad (3)$$

On assumera par la suite  $\sigma^2 = 1$ .

### 2.2 Filtrage rang faible

Dans le cas rang faible, il existe un filtre [1, 2] supprimant la partie rang faible, défini comme suit :

$$\mathbf{w}_{\text{LR}} = \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}}) \quad (4)$$

Comme, en pratique, la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  et le projecteur  $\mathbf{\Pi}_c^\perp$  sont inconnus, on utilise le projecteur estimé  $\hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp$  introduit dans la section précédente et le filtre adaptatif rang faible (sous-optimal) devient donc :

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}} = \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}}) \quad (5)$$

Les signaux filtrés pour  $\mathbf{w}_{\text{LR}}$  et  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}$  sont alors respectivement  $p_{\text{LR}} = \mathbf{w}_{\text{LR}}^H \mathbf{x} = \mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}})^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{x}$  et  $\hat{p}_{\text{LR}} = \hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}^H \mathbf{x} = \mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}})^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{x}$ . On voit ainsi que  $\hat{p}_{\text{LR}}$ , quantité étudiée dans la section suivante, est une FQ, classique en RMT.

## 3 Utilisation de la RMT en filtrage

On se propose donc d'utiliser les outils de RMT afin de définir un nouveau filtre rang faible adaptatif et de déterminer les performances des filtres rang faible adaptatifs présentés dans cet article. Les convergences dans le régime grandes dimensions présentées par la suite sont valides sous les hypothèses suivantes. Par manque de place, celles-ci sont résumées mais peuvent être retrouvées en détail dans [3, 8].

La SCM peut s'écrire  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{1/2} \left( \frac{1}{K} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H \right) \mathbf{R}^{1/2}$  où les éléments de  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{m \times K}$  sont iid, absolument continus avec  $\mathbb{E}[|y_{ij}|^8] < \infty$ <sup>1</sup>. Dans ces conditions, la distribution empirique des valeurs propres de  $\frac{1}{K} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$  converge presque sûrement (p.s.) vers la loi de Marčenko-Pastur [9].  $\mathbf{R}$  est de norme spectrale uniformément bornée et  $\mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}})$  et  $\mathbf{x}$  sont de norme euclidienne uniformément bornée,  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , i.e. leur norme ne grandit pas avec  $m$ . Enfin, pour que les distributions du bruit et du signal utile soient séparées, pour le modèle *spiked* considéré ici, les valeurs propres de  $\mathbf{C}$  satisfont la *condition de séparation*, i.e.  $|\gamma_i| > \sqrt{c}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

Ce modèle très utilisé en RMT, que nous avons choisi, correspond au modèle des données de [5] et de cet article puisqu'il considère que la multiplicité des  $r$  ( $r$  connu) valeurs propres du signal rang faible (ici  $\mathbf{c}$ ) est fixe et n'augmente pas avec  $m$ .

### 3.1 Nouveau filtre adaptatif rang faible

Nous allons maintenant définir un nouveau filtre amenant à un signal filtré consistant dans le régime grandes dimensions et par conséquent à une meilleure estimation du signal filtré optimal  $p_{\text{LR}}$  lorsque  $K$  est fini et de meilleures performances de filtrage. En effet, la FQ  $\hat{p}_{\text{LR}}$  tend vers  $p_{\text{LR}}$  p.s. quand  $K \rightarrow \infty$  à  $m$  fixé mais ce n'est plus le cas en régime grandes dimensions, i.e.  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $m/K \rightarrow c > 0$  [8] :

$$\hat{p}_{\text{LR}} = \mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}})^H \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp \mathbf{x} \xrightarrow{\text{p.s.}} \bar{p}_{\text{LR}}^{(S)} = \mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}})^H \bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{x} \neq p_{\text{LR}} \quad (6)$$

où  $\bar{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \psi_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  et

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i > r \\ 1 - \frac{1 - c\gamma_i^{-2}}{1 + c\gamma_i^{-1}} & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (7)$$

Nous noterons abusivement  $c = m/K$  par la suite et la convergence p.s. quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $m/K \rightarrow c > 0$ .

La FQ correspondant au signal filtré  $\hat{p}_{\text{LR}}$  n'étant pas consistante en régime grandes dimensions, on peut alors utiliser l'estimateur Spike-MUSIC [8, 4] consistant dans ce régime :

$$\mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}})^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{x} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{a}(\Theta_{\mathbf{d}})^H \mathbf{\Pi}_{c,S}^\perp \mathbf{x} = p_{\text{LR}} \quad (8)$$

1. Ce cadre plus général englobe notre cas particulier où les entrées  $y_{ij}$  sont des variables aléatoires gaussiennes.

où  $\hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \eta_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H$ ,

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i > r \\ 1 - \frac{1 + c\hat{\gamma}_i^{-1}}{1 - c\hat{\gamma}_i^{-2}} & \text{si } i \leq r \end{cases} \quad (9)$$

et  $\hat{\gamma}_i = \frac{1}{2} \left( \hat{\lambda}_i - (c+1) + \sqrt{(c+1 - \hat{\lambda}_i)^2 - 4c} \right)$ . On définit donc le nouveau filtre comme suit :

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}^{(S)} = \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a}(\Theta_d) \quad (10)$$

de façon à satisfaire l'Eq.(8) avec  $\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)} = \hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}^{(S)H} \mathbf{x}$ .

### 3.2 Performance des filtres rang faible

On cherche maintenant à calculer les performances des filtres adaptatifs en termes de SINR loss et non en termes de convergence « classique » établie précédemment. Le SINR loss compare le RSIB en sortie du filtre au RSIB maximum, *i.e.* :

$$\rho = \frac{RSIB_{out}}{RSIB_{max}} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{d}|^2}{(\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w})(\mathbf{d}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d})} \quad (11)$$

Pour les filtres  $\mathbf{w}_{\text{LR}}$ ,  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}$  et  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}^{(S)}$ , on a donc :

$$\rho_{\text{LR}} = \frac{|\mathbf{a}(\Theta_d)^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta_d)|^2}{(\mathbf{a}(\Theta_d)^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a}(\Theta_d))(\mathbf{a}(\Theta_d)^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\Theta_d))} \quad (12)$$

$$\hat{\rho}_{\text{LR}} = \rho_{\text{LR}}|_{\mathbf{\Pi}_c^\perp = \hat{\mathbf{\Pi}}_c^\perp} \quad (13)$$

$$\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)} = \rho_{\text{LR}}|_{\mathbf{\Pi}_c^\perp = \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp} \quad (14)$$

L'estimation de ces deux dernières quantités par des itérations de Monte-Carlo pouvant être longue, nous cherchons à prédire leurs comportements en utilisant les outils de RMT. Il en résulte la proposition suivante.

**Proposition :** Sous les hypothèses résumées en début de section 3 et le modèle *spiked*, quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $m/K \rightarrow c > 0$ ,

$$\hat{\rho}_{\text{LR}} \xrightarrow{\text{p.s.}} \hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)} = \rho_{\text{LR}}|_{\mathbf{\Pi}_c^\perp = \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp} \neq \rho_{\text{LR}} \quad (15)$$

$$\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)} \xrightarrow{\text{p.s.}} \rho_{\text{LR}} \quad (16)$$

où  $\hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp = \sum_{i=1}^m \psi_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$  avec  $\psi_i$  défini en Eq.(7). ■

*Preuve :* Pour la preuve de l'Eq.(15), voir [10]. Pour la convergence de  $\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)}$  en régime grandes dimensions de l'Eq.(16), on note tout d'abord à partir des Eqs.(12, 14) que  $\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)}$  est un rapport de FQs : une simple  $(\mathbf{a}(\Theta_d)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a}(\Theta_d))$  et une structurée  $(\mathbf{a}(\Theta_d)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a}(\Theta_d))$ . La convergence de la FQ simple est connue contrairement à celle de la FQ structurée. Il est donc nécessaire de la déterminer.

Tout d'abord, on développe  $\mathbf{a}(\Theta_d)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a}(\Theta_d)$  en écrivant  $\mathbf{a}$  au lieu de  $\mathbf{a}(\Theta_d)$  pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a} &= - \left[ \sum_{i=1}^r \hat{\chi}_i^{-1} \mathbf{a}^H \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{a} + \sum_{i=1}^r \hat{\chi}_i^{-1} \mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{R} \mathbf{a} \right] \\ &+ \mathbf{a}^H \mathbf{R} \mathbf{a} + \sum_{j_1, j_2=1}^r \hat{\chi}_{j_1}^{-1} \hat{\chi}_{j_2}^{-1} \mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{j_1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{j_2} \mathbf{a} \quad (17) \end{aligned}$$

en ayant remarqué que  $\hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp = \mathbf{I}_m - \sum_{i=1}^r \hat{\chi}_i^{-1} \hat{\mathbf{\Pi}}_i$  avec  $\hat{\chi}_i = (1 - c\hat{\gamma}_i^{-2})/(1 + c\hat{\gamma}_i^{-1})$  et  $\hat{\mathbf{\Pi}}_i = \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H, \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ .

Ensuite, on calcule la convergence de tous les termes de l'Eq.(17). On sait que,  $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$  :

$$\hat{\chi}_i^{-1} \mathbf{a}^H \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{a} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{a}^H \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_i \mathbf{a} \quad (18)$$

$$\hat{\chi}_i^{-1} \mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_i \mathbf{R} \mathbf{a} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{a}^H \mathbf{\Pi}_i \mathbf{R} \mathbf{a} \quad (19)$$

avec  $\mathbf{\Pi}_i = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H, \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ . Pour la FQ structurée, par la méthode de [4] (preuve de la Prop.1) et les résultats de [8, 10] (resp. Corollaire 2 et, Props.3 et 4), on peut montrer que :

$$\hat{\chi}_{j_1}^{-1} \hat{\chi}_{j_2}^{-1} \mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{j_1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{j_2} \mathbf{a} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{a}^H \mathbf{\Pi}_{j_1} \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_{j_2} \mathbf{a} \quad (20)$$

Par conséquent, en utilisant les Eqs.(18) à (20) dans la convergence de l'Eq.(17), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a} &\xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{a}^H \mathbf{R} \mathbf{a} - \left( \sum_{i=1}^r \mathbf{a}^H \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_i \mathbf{a} + \sum_{i=1}^r \mathbf{a}^H \mathbf{\Pi}_i \mathbf{R} \mathbf{a} \right) \\ &+ \sum_{j_1, j_2=1}^r \mathbf{a}^H \mathbf{\Pi}_{j_1} \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_{j_2} \mathbf{a} \quad (21) \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{R} \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{a}^H \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{R} \mathbf{\Pi}_c^\perp \mathbf{a} \quad (22)$$

Enfin, d'après la convergence de  $\mathbf{a}(\Theta_d)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{c,S}^\perp \mathbf{a}(\Theta_d)$  comme à l'Eq.(8), l'Eq. (22) et le *continuous mapping theorem* [11], on obtient la convergence de l'Eq.(16). □

On peut donc observer que la non consistance de  $\hat{\rho}_{\text{LR}}$  entraîne une perte en performance que l'on peut observer grâce à  $\hat{\rho}_{\text{LR}}^{(S)}$ . Mais ce dernier résultat permet d'obtenir une très bonne prédiction du comportement de  $\hat{\rho}_{\text{LR}}$  et du filtrage rang faible par  $\hat{\mathbf{w}}_{\text{LR}}$  non seulement en fonction de  $K$  mais aussi en fonction de  $\Theta_d$  [10]. En revanche, bien que le SINR loss du nouveau filtre tende vers celui du filtre  $\mathbf{w}_{\text{LR}}$ , ceci ne permet pas d'obtenir un bon indice de performance en fonction de  $K$ .

## 4 Simulations

Afin d'illustrer l'intérêt des RMT, on choisit une application brouillage. En effet, une application STAP n'aurait pas fonctionné [5] car, dans ce cas là, le rang  $r$  est fonction de  $m$  [12] et par conséquent n'est pas fixe mais augmente avec  $m$ . Plus précisément, le nombre de valeurs propres du bruit rang faible  $c$  augmente avec  $m$  tout en gardant une multiplicité de 1 chacune. De plus,  $r$  ne correspond pas au nombre de « sources véritables ». C'est pourquoi, nous avons choisi une application brouillage. Son principe est de détecter une cible  $\mathbf{d}$  grâce à une antenne linéaire uniforme de  $m$  capteurs malgré la présence de brouilleurs. On aura ici  $\Theta_d = \theta_d$  où  $\theta_d$  est l'AoA (angle d'arrivée) de  $\mathbf{d}$ . La réponse des brouilleurs  $c$  est composée de signaux similaires à  $\mathbf{d}$ , *i.e.* de 3 cibles synthétiques d'AoA  $-20^\circ$ ,  $0^\circ$  et  $20^\circ$  avec pour longueur d'onde  $l_0 = 0.667\text{m}$ . Ainsi, le brouillage (bruit rang faible) a un rang  $r = 3$ . Puis, la puissance de  $\mathbf{b}$  est  $\sigma^2 = 1$ . Finalement,  $\mathbf{R}$  peut être écrite comme  $\mathbf{R} = \frac{JNR}{\text{tr}(\Lambda)} \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_m$  avec  $\Lambda = \text{diag}([6, 2, 1])$  et où  $JNR$  est le rapport brouilleur à bruit. Excepté pour les convergences quand  $m, K \rightarrow \infty$  au même rapport  $c$ , on prendra

$m = 100$  pour avoir une grande dimension des données (valeur réaliste pour des applications spatio-temporelles ou en télécommunication par exemple) et  $K = 2r$ . Ainsi  $c \simeq 16$ .

On observe tout d'abord en Fig.1 la non convergence de  $\hat{\rho}_{LR}$  vers  $\rho_{LR}$  et la convergence de  $\hat{\rho}_{LR}$  (resp.  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$ ) vers  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  (resp.  $\rho_{LR}$ ) en régime grandes dimensions pour  $c = 16$ ,  $\theta_d = 20^\circ$  et  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{A})} = 10\text{dB}$  en termes d'EQM.

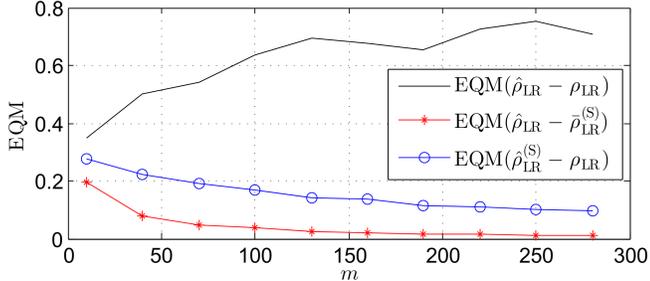


FIGURE 1 – EQMs sur  $(\hat{\rho}_{LR} - \rho_{LR})$ ,  $(\hat{\rho}_{LR} - \bar{\rho}_{LR}^{(S)})$  et  $(\hat{\rho}_{LR}^{(S)} - \rho_{LR})$  quand  $m, K \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c = 16$ ,  $\theta_d = 20^\circ$  et  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{A})} = 10\text{dB}$ .

Puis, on montre à la Fig.2 que  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  permet de mieux prédire le comportement de  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}]$  (calculé sur  $10^3$  itérations de Monte Carlo avec  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{A})} = 10\text{dB}$ ,  $m = 100$  et  $K = 2r$ ) en fonction de  $\theta_d$  que  $\rho_{LR}$  et l'approximation grossière  $1 - r/K$  déterminée par [2, 13] malgré un décalage d'environ 1dB. Ceci permet donc de prédire la valeur de  $\theta_d$  à partir de laquelle les performances du filtre  $\hat{w}_{LR}$  se dégradent fortement (ici environ  $21.1^\circ$ ).

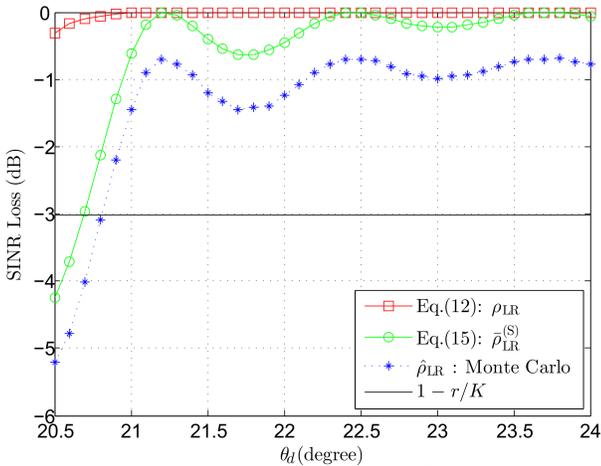


FIGURE 2 – Visualisation de  $\rho_{LR}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}$ ,  $\bar{\rho}_{LR}^{(S)}$  et de l'estimation traditionnelle de  $\mathbb{E}[\hat{\rho}_{LR}]$  en fonction de  $\theta_d$  (sur  $10^3$  réalisations) avec  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{A})} = 10\text{dB}$ ,  $m = 100$  et  $K = 2r$ .

Enfin, en Fig.3, on visualise les performances du nouveau filtre  $\hat{w}_{LR}^{(S)}$  grâce à  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  et on les compare à celles de  $w_{LR}$  ( $\rho_{LR}$ ) et  $\hat{w}_{LR}$  ( $\hat{\rho}_{LR}$ ) en fonction de  $\theta_d$  (sur  $10^3$  réalisations) avec  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{A})} = 30\text{dB}$ ,  $m = 100$  et  $K = 2r$ . On observe alors de meilleures performances avec une valeur de  $\theta_d$  inférieure à partir de laquelle les performances du filtre  $\hat{w}_{LR}^{(S)}$  se dégradent fortement (environ  $20.2^\circ$ ).

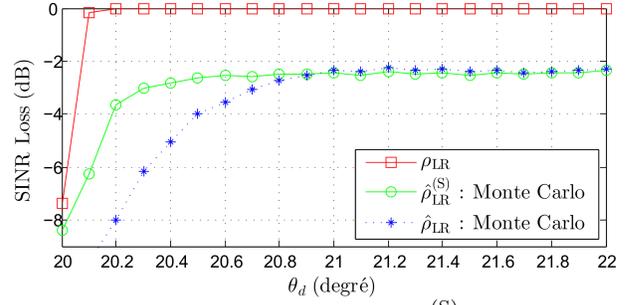


FIGURE 3 – Visualisation de  $\rho_{LR}$ ,  $\hat{\rho}_{LR}$  et  $\hat{\rho}_{LR}^{(S)}$  en fonction de  $\theta_d$  (sur  $10^3$  réalisations) avec  $\frac{JNR}{\text{tr}(\mathbf{A})} = 30\text{dB}$ ,  $m = 100$  et  $K = 2r$ .

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons défini en utilisant les outils de RMT un nouveau filtre adaptatif rang faible présentant de meilleures performances en termes de perte en RSIB que le filtre adaptatif rang faible classique. Pour cela, nous avons déterminé les convergences des pertes en RSIB respectifs en régime grandes dimensions et observé, sur une application de brouillage, une meilleure prédiction des performances du filtre classique et de meilleures performances pour le nouveau filtre en fonction des paramètres de localisation du signal d'intérêt.

## Références

- [1] I. KIRSTEIN and D. TUFTS, "Adaptive detection using a low rank approximation to a data matrix," *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, vol. 30, pp. 55 – 67, 1994.
- [2] A. HAIMOVICH, "Asymptotic distribution of the conditional signal-to-noise ratio in an eigenanalysis-based adaptive array," *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, vol. 33, pp. 988 – 997, 1997.
- [3] X. MESTRE, "On the asymptotics behavior of the sample estimates of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 11, pp. 5353 – 5368, November 2008.
- [4] W. HACHEM, P. LOUBATON, X. MESTRE, J. NAJIM, and P. VALLET, "A subspace estimator of fixed rank perturbations of large random matrices," *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 114, 2013.
- [5] A. COMBERNOUX, F. PASCAL, G. GINOLHAC, and M. LESTURGIE, "Performances of low rank detectors based on random matrix theory with application to stap," *RADAR*, Oct. 2014.
- [6] A. COMBERNOUX, F. PASCAL, G. GINOLHAC, and M. LESTURGIE, "Asymptotic performance of the low rank adaptive normalized matched filter in a large dimensional regime," *ICASSP*, Apr. 2015, accepted.
- [7] I. JOHNSTONE, "On the distribution of the largest principal component," *The Annals of Statistics*, vol. 29, no. 2, pp. 295 – 327, 2001.
- [8] R. COUILLET and W. HACHEM, "Fluctuations of spiked random matrix models and failure diagnosis in sensor networks," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 59, no. 1, pp. 509 – 525, 2013.
- [9] V.A. MARČENKO and L.A. PASTUR, "Distributions of eigenvalues for somme set of random matrices," *Math USSR-Sbornik*, vol. 1, no. 4, pp. 457 – 483, April 1967.
- [10] A. COMBERNOUX, F. PASCAL, G. GINOLHAC, and M. LESTURGIE, "Convergence of structured quadratic forms with application to theoretical performances of adaptive filters in low rank gaussian context," *IEEE Trans. on Signal Process.*, March 2015, submitted.
- [11] P. BILLINGSLEY, *Probability and Measure*, Wiley, New York, NY, 3rd edition, 1995.
- [12] L. E. BRENNAN and L. S. REED, "Theory of adaptive radar," *IEEE Trans. on Aero. and Elec. Syst.*, vol. 9, no. 2, pp. 237 – 252, 1973.
- [13] G. GINOLHAC, P. FORSTER, F. PASCAL, and J.-P. OVARLEZ, "Performance of two low-rank STAP filters in a heterogeneous noise," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 61, pp. 57 – 61, 2013.