

Un Lisseur de Rauch–Tung–Striebel sur Groupe de Lie

Guillaume BOURMAUD

Laboratoire IMS, Bordeaux
guillaume.bourmaud@ims-bordeaux.fr

Résumé – Dans ce travail, le formalisme du lisseur de Kalman étendu, également connu sous le nom de lisseur de Rauch-Tung-Striebel (RTS), est généralisé au cas où l'état évolue sur un groupe de Lie matriciel. La solution proposée repose sur le lien que l'on peut établir entre l'algorithme de Gauss-Newton sur groupe de Lie et une distribution Gaussienne concentrée sur groupe de Lie qui constitue une généralisation possible de la distribution Gaussienne à un groupe de Lie. Le lisseur de Rauch-Tung-Striebel sur groupe de Lie (LG-RTS) obtenu fournit des expressions analytiques pour le lissage des paramètres issus d'un filtrage de Kalman étendu sur groupe de Lie (LG-EKF). L'algorithme proposé est appliqué au problème du lissage de la trajectoire d'une caméra. Les résultats obtenus sur données synthétiques montrent que, pour cette application, le LG-RTS permet d'améliorer sensiblement les performances obtenues par le LG-EKF.

Abstract – In this paper, we propose a generalization of the Rauch-Tung-Striebel smoother (RTS), also known as Extended Kalman Smoother, to the case where the state evolves on a matrix Lie group. Our solution relies on the link between the Gauss-Newton algorithm on Lie groups and the formalism of the concentrated Gaussian distribution on Lie groups. Our formalism yields closed-form equations for the smoothing of parameters produced by the Extended Kalman Filter on Lie groups (LG-EKF). The proposed algorithm, called LG-RTS, is applied to a camera trajectory estimation problem. Results show that, in this application, the LG-RTS significantly improves the output of the LG-EKF.

1 Introduction

Dans cet article nous nous intéressons au problème du lissage sur variétés. Ce travail est motivé par le besoin d'une méthodologie de lissage, s'appliquant notamment au mouvement de caméras portées utilisées pour l'observation d'activités¹, où les variables à estimer appartiennent à un groupe de Lie matriciel (GdL).

Un certain nombre de contributions ont déjà été apportées dans le domaine du filtrage sur variétés (Riemann [1, 2], Stiefel [3, 4], Grassmann [5], groupe de Lie [6, 7, 8]). Cependant, pour notre application, le filtrage n'est pas suffisant. En effet, lorsque l'on cherche à estimer la position (et l'orientation) d'une caméra à un instant donné, les observations futures apportent une information non négligeable.

Cet article fournit un cadre générique permettant de lisser les paramètres issus du filtre de Kalman étendu sur groupe de Lie (LG-EKF) [8], c'est à dire de corriger les paramètres estimés à chaque pas de temps par le LG-EKF (qui ne tient compte que des observations passées) en y incorporant l'information des observations futures. La solution proposée repose sur le lien que l'on peut établir entre l'algorithme de Gauss-Newton sur GdL et une distribution gaussienne concentrée sur GdL qui constitue une générali-

sation possible de la distribution gaussienne à un GdL. Le lisseur proposé est appelé lisseur de Rauch-Tung-Striebel sur groupe de Lie (LG-RTS) car l'algorithme obtenu se réduit au lisseur de Rauch-Tung-Striebel [9] lorsque l'état évolue sur un espace Euclidien.

La suite de l'article est organisée de la manière suivante: La partie 2 introduit les notions de groupes et algèbres de Lie ainsi que le formalisme de la distribution gaussienne concentrée sur GdL. Le lisseur de Rauch-Tung-Striebel sur GdL que nous développons dans cet article est présenté dans la section 3. Dans la partie 4, les performances du lisseur sont illustrées sur un problème d'estimation de la trajectoire d'une caméra. Finalement, la conclusion et les directions de recherche seront énoncées dans une dernière partie.

2 Prérequis

2.1 Définitions et Notations

Dans cette partie, nous rappelons les définitions et nos notations concernant les GdL. Nous référons le lecteur à l'ouvrage [10] pour une étude plus approfondie sur ces derniers et une compréhension de l'intérêt de ce formalisme. Un GdL noté $G \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ est une variété différentielle munie d'une structure de groupe compatible où les opérateurs de composition et d'inversion correspondent à la multiplication et à l'inversion matricielle avec la matrice

¹Ce travail a reçu le support du septième programme-cadre de la Communauté Européenne (FP7/2007-2013) - subvention 288199 - Dem@Care

identité Id_n comme l'élément identité. Grâce aux applications "logarithme de matrice" \log_G et "exponentielle de matrice" \exp_G , nous disposons localement d'un difféomorphisme entre un voisinage autour de l'identité du groupe et l'espace tangent à l'identité $T_e G$ du groupe, appelé algèbre de Lie \mathfrak{g} . Cette algèbre se trouve être isomorphe à un espace Euclidien \mathbb{R}^p où p est le nombre de degrés de liberté intrinsèque de la variété. En choisissant une base de \mathfrak{g} , il est donc possible de représenter un élément de \mathfrak{g} dans \mathbb{R}^p grâce à l'application linéaire $[\cdot]_G^\vee$. L'application inverse est notée $[\cdot]_G^\wedge$. Afin d'alléger les notations, nous définissons : $\exp_G^\wedge(\cdot) = \exp_G([\cdot]_G^\wedge)$ et $\log_G^\vee(\cdot) = [\log_G(\cdot)]_G^\vee$.

Finalement, nous introduisons la formule de Baker-Campbell-Hausdorff linéarisée (les B_n sont les nombres de Bernoulli):

$$\log_G^\vee(\exp_G^\wedge(a) \exp_G^\wedge(b)) = b + \varphi_G(b) a + O(\|a\|^2) \quad (1)$$

où

$$\varphi_G(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n \text{ad}_G(b)^n}{n!} = Id_p + \frac{1}{2} \text{ad}_G(b) + \dots \quad (2)$$

$$\text{et } \text{ad}_G(b) a = [[b]_G^\wedge [a]_G^\wedge - [a]_G^\wedge [b]_G^\wedge]_G^\vee.$$

2.2 Distribution gaussienne Concentrée sur groupe de Lie

Nous introduisons ici la notion de distribution gaussienne concentrée sur GdL [11, 12]. Cette distribution paramétrique va nous permettre d'étendre simplement le formalisme de distribution gaussienne au cas des GdL. Soit $x \in G$ de distribution gaussienne concentrée sur GdL (notée $x \sim \mathcal{N}_G(x; \mu, P)$), alors elle peut s'écrire:

$$x = \exp_G^\wedge(\epsilon) \mu \quad (3)$$

où $\mu \in G$ et $\epsilon \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^p}(\epsilon; \mathbf{0}_{p \times 1}, P)$ (où $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^p}$ représente une distribution normale dans \mathbb{R}^p). Dans le cas où la plus grande valeur propre de P est suffisamment petite, on peut alors effectuer l'approximation suivante: $\log_G^\vee(x\mu^{-1}) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}^p}(\log_G^\vee(x\mu^{-1}); \mathbf{0}_{p \times 1}, P)$.

3 Un lisseur de Rauch-Tung-Striebel sur groupe de Lie

Cette section fournit un cadre générique permettant de lisser les paramètres issus du filtre de Kalman étendu sur groupe de Lie (LG-EKF) [8]. La démonstration du lisseur proposé est présentée ci-après.

3.1 Formulation du problème

On souhaite approcher la distribution suivante par une gaussienne concentrée sur groupe de Lie, où l'on considère un modèle markovien sur l'état $x_t \in G$. Une observation

y_t dépend uniquement de l'état courant x_t et est conditionnellement indépendante des autres états sachant l'état x_t . Par conséquent nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}, x_t | y_{1:T}) &= p(x_t | x_{t+1}, y_{1:T}) p(x_{t+1} | y_{1:T}) \\ &= p(x_t | x_{t+1}, y_{1:t}) p(x_{t+1} | y_{1:T}) \\ &= \frac{p(x_{t+1}, x_t | y_{1:t})}{p(x_{t+1} | y_{1:t})} p(x_{t+1} | y_{1:T}) \end{aligned} \quad (4)$$

où $y_{1:T}$ représente l'ensemble des observations disponibles de l'instant 1 à l'instant T . On suppose que les 3 distributions qui interviennent dans (4) sont des gaussiennes concentrées de la forme suivante:

$$p(x_{t+1}, x_t | y_{1:t}) = \mathcal{N}_G \left(\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mu_{t+1|t} \\ \mu_{t|t} \end{bmatrix}, \right) \quad (5)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Q_t + F_t P_{t|t} F_t^T & F_t P_{t|t} \\ P_{t|t} F_t^T & P_{t|t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(x_{t+1} | y_{1:t}) &= \mathcal{N}_G(x_{t+1}; \mu_{t+1|t}, P_{t+1|t} = Q_t + F_t P_{t|t} F_t^T) \\ p(x_{t+1} | y_{1:T}) &= \mathcal{N}_G(x_{t+1}; \mu_{t+1|T}, P_{t+1|T}) \end{aligned} \quad (6) \quad (7)$$

Les équations (5) et (6) sont issues de l'étape de propagation du LG-EKF (voir [8]) alors que (7) correspond à la sortie du lisseur à l'instant $t+1$ (le lisseur part de l'instant T et lisse les états jusqu'à l'instant 1). F_t est la matrice de transition alors que Q_t est la matrice de covariance du bruit de modèle (voir [8]).

Sous l'hypothèse de gaussienne concentrée, on peut approximer l'opposé du logarithme de (4) de la manière suivante:

$$l(x_{t+1}, x_t) = \left\| \begin{bmatrix} \log_G^\vee(x_{t+1} \mu_{t+1|t}^{-1}) \\ \log_G^\vee(x_t \mu_{t|t}^{-1}) \\ \log_G^\vee(x_{t+1} \mu_{t+1|t}^{-1}) \\ \log_G^\vee(x_{t+1} \mu_{t+1|T}^{-1}) \end{bmatrix} \right\|_{\mathfrak{e}}^2 \quad (8)$$

où

$$\mathfrak{e} = \text{diag}(\Sigma, -(Q_t + F_t P_{t|t} F_t^T), P_{t+1|T}) \quad (9)$$

et $\|\cdot\|_{\mathfrak{e}}^2$ représente la distance de Mahalanobis.

On s'intéresse au minimum de (8), i.e on souhaite trouver $\{\hat{x}_{t+1}, \hat{x}_t\} = \underset{x_{t+1}, x_t}{\text{argmin}} \{l(x_{t+1}, x_t)\}$. Pour ce faire on propose d'appliquer un algorithme de Gauss-Newton.

3.2 Application de l'algorithme de Gauss-Newton

Commençons par linéariser le terme à l'intérieur de la norme de (8) en $\delta_{t+1}^{l+1/l} = 0$ et $\delta_t^{l+1/l} = 0$ où l'on a posé $x_t = \exp_G^\wedge(\delta_t^{l+1/l}) x_t^{(l)}$ et $x_{t+1} = \exp_G^\wedge(\delta_{t+1}^{l+1/l}) x_{t+1}^{(l)}$. Pour cela, on définit:

$$\delta_{t+1}^{l,t} = \log_G^\vee(x_{t+1}^{(l)} \mu_{t+1|t}^{-1}) \quad (10)$$

$$\delta_t^{l,t} = \log_G^\vee(x_t^{(l)} \mu_{t|t}^{-1}) \quad (11)$$

$$\delta_{t+1}^{l,T} = \log_G^\vee \left(x_{t+1}^{(l)} \mu_{t+1|T}^{-1} \right) \quad (12)$$

En utilisant (1) on obtient un nouveau problème qui s'écrit alors:

$$\underset{\delta_{t+1}^{l+1/l}, \delta_t^{l+1/l}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \left\| e_l + J_l \begin{bmatrix} \delta_{t+1}^{l+1/l} \\ \delta_t^{l+1/l} \end{bmatrix} \right\|_{\mathfrak{E}}^2 \right\} \quad (13)$$

où

$$J_l = \begin{bmatrix} \varphi_G \left(\delta_{t+1}^{l,t} \right) & 0 \\ 0 & \varphi_G \left(\delta_t^{l,t} \right) \\ \varphi_G \left(\delta_{t+1}^{l,t} \right) & 0 \\ \varphi_G \left(\delta_{t+1}^{l,T} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad e_l = \begin{bmatrix} \delta_{t+1}^{l,t} \\ \delta_t^{l,t} \\ \delta_{t+1}^{l,T} \\ \delta_{t+1}^{l,t} \end{bmatrix} \quad (14)$$

On définit également: $\varphi_G \left(\delta_{t+1}^{l,t} \right) = \mathcal{M}$, $\varphi_G \left(\delta_t^{l,t} \right) = \mathcal{S}$ et $\mathcal{L} = \varphi_G \left(\delta_{t+1}^{l,T} \right)$.

La solution de (13) s'écrit alors:

$$\begin{bmatrix} \delta_{t+1}^{l+1/l} \\ \delta_t^{l+1/l} \end{bmatrix} = - \left(J_l^T \mathfrak{E}^{-1} J_l \right)^{-1} J_l^T \mathfrak{E}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_{t+1}^{l,t} \\ \delta_t^{l,t} \\ \delta_{t+1}^{l,T} \\ \delta_{t+1}^{l,t} \end{bmatrix} \quad (15)$$

où

$$\mathfrak{E}^{-1} = \operatorname{diag} \left(\begin{bmatrix} Q_t^{-1} & -Q_t^{-1} F_t \\ -F_t^T Q_t^{-1} & F_t^T Q_t^{-1} F_t + P_{t|t}^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (F_t P_{t|t} F_t^T + Q_t)^{-1} \\ P_{t+1|T}^{-1} \end{bmatrix} \right) \quad (16)$$

3.2.1 Calcul de $(J_l^T \mathfrak{E}^{-1} J_l)^{-1}$

Calculons l'inverse de $J_l^T \mathfrak{E}^{-1} J_l$:

$$(J_l^T \mathfrak{E}^{-1} J_l)^{-1} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B'^T & D' \end{bmatrix} \quad (17)$$

Il est possible de prouver que:

$$A' = \mathcal{L}^{-1} P_{t+1|T} \mathcal{L}^{-T} \quad (18)$$

$$D' = \mathcal{S}^{-1} \left(P_{t|t} + L_t (\mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} P_{t+1|T} \mathcal{L}^{-T} \mathcal{M}^T - P_{t+1|t}) L_t^T \right) \mathcal{S}^{-T} \quad (19)$$

où

$$L_t = P_{t|t} F_t^T P_{t+1|t}^{-1} \quad (20)$$

et

$$B' = \mathcal{L}^{-1} P_{t+1|T} \mathcal{L}^{-T} \mathcal{M}^T L_t^T \mathcal{S}^{-T} \quad (21)$$

3.2.2 Calcul de $\delta_{t+1}^{l+1/l}$

Commençons par supposer que $x_{t+1}^{(l)} = \mu_{t+1|T}$. Alors d'après (12), $\delta_{t+1}^{l,T} = 0$ et par conséquent $\mathcal{L} = Id$.

D'après (15) et en utilisant (14), (16) et (17) on obtient alors:

$$\begin{aligned} \delta_{t+1}^{l+1/l} &= -P_{t+1|T} \mathcal{M}^T \\ & \left(\left(\left(Q_t^{-1} - (Q_t + F_t P_{t|t} F_t^T)^{-1} \right) - L_t^T F_t^T Q_t^{-1} \right) \delta_{t+1}^{l,t} \right. \\ & \quad \left. + \left(-Q_t^{-1} F_t + L_t^T (F_t^T Q_t^{-1} F_t + P_{t|t}^{-1}) \right) \delta_t^{l,t} \right) \quad (22) \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que, dans l'équation ci-dessus, le terme en $\delta_{t+1}^{l,t}$ est nul, ainsi que le terme en $\delta_t^{l,t}$. Donc en initialisant $x_{t+1}^{(0)} = \mu_{t+1|T}$, on a montré que:

$$\delta_{t+1}^{l+1/l} = 0 \quad (23)$$

pour tout l . Par conséquent: $\delta_{t+1}^{l,T} = 0$ et $\mathcal{L} = Id$.

3.2.3 Calcul de $\delta_t^{l+1/l}$

D'après (15) et en utilisant (14), (16) et (17) ainsi que le fait que $\delta_{t+1}^{l,T} = 0$ et $\mathcal{L} = Id$, on obtient:

$$\begin{aligned} \delta_t^{l+1/l} &= -\mathcal{S}^{-1} \left\{ \left(L_t \mathcal{M} P_{t+1|T} \mathcal{M}^T (Q_t^{-1} - (Q_t + F_t P_{t|t} F_t^T)^{-1}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (P_{t|t} + L_t (\mathcal{M} P_{t+1|T} \mathcal{M}^T - P_{t+1|t}) L_t^T) F_t^T Q_t^{-1} \right) \delta_{t+1}^{l,t} \right. \\ & \quad \left. + \left((P_{t|t} + L_t (\mathcal{M} P_{t+1|T} \mathcal{M}^T - P_{t+1|t}) L_t^T) (F_t^T Q_t^{-1} F_t + P_{t|t}^{-1}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - L_t \mathcal{M} P_{t+1|T} \mathcal{M}^T Q_t^{-1} F_t \right) \delta_t^{l,t} \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

Il est alors possible de montrer que, dans l'équation ci-dessus, le terme en $\delta_{t+1}^{l,t}$ vaut $-\mathcal{S}^{-1} \delta_t^{l,t}$ alors que le terme en $\delta_t^{l,t}$ vaut $\mathcal{S}^{-1} L_t \delta_{t+1}^{l,t}$. Au final, on a donc:

$$\delta_t^{l+1/l} = \mathcal{S}^{-1} \left(L_t \delta_{t+1}^{l,t} - \delta_t^{l,t} \right) \quad (25)$$

3.3 Solution obtenue

En initialisant $x_{t+1}^{(0)} = \mu_{t+1|T}$, on a obtenu (eq.(23) et eq.(25)):

$$\begin{bmatrix} \delta_{t+1}^{l+1/l} \\ \delta_t^{l+1/l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{S}^{-1} \left(L_t \delta_{t+1}^{l,t} - \delta_t^{l,t} \right) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Ce qui nous donne alors:

$$\delta_t^{l+1,t} = \log_G^\vee \left(x_t^{(l+1)} \mu_{t|t}^{-1} \right) \simeq \delta_t^{l,t} + \mathcal{S} \delta_t^{l+1/l} = L_t \delta_{t+1}^{l,t} \quad (27)$$

On obtient donc l'équation de mise à jour suivante:

$$\begin{aligned} x_t^{(l+1)} &= \exp_G^\wedge \left(\delta_t^{l+1,t} \right) \mu_{t|t} = \exp_G^\wedge \left(L_t \delta_{t+1}^{l,t} \right) \mu_{t|t} \\ &= \exp_G^\wedge \left(L_t \log_G^\vee \left(\mu_{t+1|T} \mu_{t+1|t}^{-1} \right) \right) \mu_{t|t} \quad (28) \end{aligned}$$

La solution est obtenue après une seule itération et on a donc $\hat{x}_t = \exp_G^\wedge \left(L_t \log_G^\vee \left(\mu_{t+1|T} \mu_{t+1|t}^{-1} \right) \right) \mu_{t|t}$.

On pose alors $\mu_{t|T} = \hat{x}_t$ et on approxime la covariance par D' :

$$P_{t|T} = \mathcal{S}^{-1} \left(P_{t|t} + L_t (\mathcal{M} P_{t+1|T} \mathcal{M}^T - P_{t+1|t}) L_t^T \right) \mathcal{S}^{-T} \quad (29)$$

Notons que $\hat{x}_{t+1} = \mu_{t+1|T}$ et que donc A' vaut bien $P_{t+1|T}$.

	LG-EKF	LG-RTS
EQM (norm.unit)	55.7	30.5

Table 1: Erreur Quadratique Moyenne sur la pose (position et orientation) de la caméra: $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \log_{SE(3)}^{\vee} \left(c_t^{estimé} (c_t^{vrai})^{-1} \right) \right\|^2$ (100 trajectoires)

4 Résultats sur données simulées

Nous avons choisi d'évaluer les performances du formalisme proposé sur un problème d'estimation de la trajectoire d'une caméra. L'objectif est d'estimer la pose $c \in SE(3)$ de la caméra en considérant un modèle de propagation où l'accélération est un bruit blanc Gaussien:

$$c_{t+1} = \exp_{SE(3)}^{\wedge}(v_t \Delta t) c_t \quad (30)$$

Par conséquent, la vitesse de la caméra $v \in \mathbb{R}^6$ est également estimée. Elle est décrite par le modèle suivant:

$$v_{t+1} = v_t + n_t \quad (31)$$

où n_t est un bruit blanc Gaussien centré de covariance Q_{v_t} . Nous supposons également que c est directement observé mais uniquement disponible un pas de temps sur 5:

$$y_t = \exp_{SE(3)}^{\wedge}(w_t) c_t \quad (32)$$

où w_t est un bruit blanc Gaussien centré de covariance R_t . Dans nos simulations, $\Delta t = 0.1$, $Q_{v_t} = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ et $R_t = \text{diag}(10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3})$ (nous utilisons la base de l'algèbre de Lie de [13]).

La Figure 1 représente l'erreur d'estimation de la position de la caméra pour une trajectoire. Le tableau 1 représente l'erreur quadratique moyenne de la pose de la caméra (position et orientation). Pour cette application, le LG-RTS permet d'améliorer sensiblement les performances obtenues par le LG-EKF.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un nouvel algorithme appelé lisseur de Rauch-Tung-Striebel sur groupe de Lie qui permet de lisser les paramètres issus du filtre de Kalman étendu sur groupe de Lie. A l'aide d'un algorithme de Gauss-Newton sur groupe de Lie, nous avons obtenu des expressions explicites permettant de lisser les paramètres issus du filtrage. Les performances de l'algorithme proposé ont été testées sur un problème d'estimation de trajectoire d'une caméra. Les résultats ont montré que dans cette application, le LG-RTS permettait d'améliorer sensiblement les performances obtenues par le LG-EKF.

Dans nos recherches futures, nous souhaitons, utiliser cet algorithme au sein d'un lisseur particulière Rao-Blackwellisé.

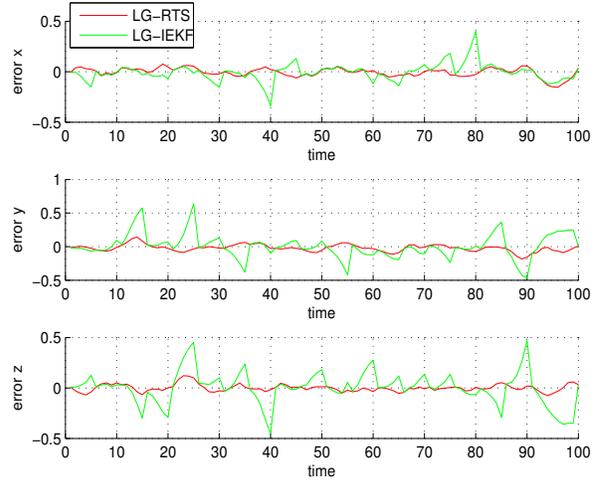


Figure 1: Erreur d'estimation de la position de la caméra sur une trajectoire

References

- [1] H. Snoussi and A. Mohammad-Djafari, "Particle filtering on Riemannian manifolds," in *AIP Conference*, Vol. Issue 1, p219, vol. 872, 2006.
- [2] S. Hauberg, F. Lauze, and K. S. Pedersen, "Unscented Kalman filtering on Riemannian manifolds," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, pp. 1–18, 2013. [Online]. Available: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10851-012-0372-9>
- [3] F. Tompkins and P. J. Wolfe, "Bayesian filtering on the Stiefel manifold," in *IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*, 2007.
- [4] J. Boulanger, S. Said, N. L. Bihan, and J. Manton, "Filtering from Observations on Stiefel Manifolds," *arXiv preprint arXiv:1409.7442*, 2014.
- [5] Q. Rentmeesters, P. Absil, P. Van Dooren, K. Gallivan, and A. Srivastava, "An efficient particle filtering technique on the Grassmann manifold," in *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, 2010.
- [6] S. Bonnabel, P. Martin, and E. Salaun, "Invariant extended Kalman filter : theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem," in *IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, 2009.
- [7] G. Bourmaud, R. Mégret, A. Giremus, and Y. Berthoumieu, "Discrete extended Kalman filter on Lie groups," in *Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2013 Proceedings of the 21st European*, 2013.
- [8] —, "From Intrinsic Optimization to Iterated Extended Kalman Filtering on Lie Groups," *Submitted to J Math Imaging Vis. Available at <https://sites.google.com/site/guillaumbourmaud/>*, 2015.
- [9] H. E. Rauch, C. Striebel, and F. Tung, "Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems," *AIAA journal*, vol. 3, no. 8, pp. 1445–1450, 1965.
- [10] G. S. Chirikjian, *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups, Volume 2*. Springer-Verlag, 2012.
- [11] T. D. Barfoot and P. T. Furgale, "Associating uncertainty with three-dimensional poses for use in estimation problems," *IEEE Trans. Robot.*, vol. 30, no. 3, pp. 679–693, Jun 2014.
- [12] G. Bourmaud, R. Mégret, M. Arnaudon, and A. Giremus, "Continuous-discrete extended Kalman filter on matrix Lie groups using concentrated Gaussian distributions," *J Math Imaging Vis*, Jul 2014.
- [13] J. M. Selig, "Lie groups and Lie algebras in robotics," *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*, pp. 101–125, 2005.