

Estimation des paramètres d'un processus $S\alpha S$ à partir de ses modes empiriques

Ali KOMATY^{1,2}, Abdel BOUDRAA¹ et Delphine DARE¹

¹IRENav (EA3634), Ecole Navale
BCRM Brest, CC 600, 29240 Brest Cedex 9, France

²Lab-STICC (UMR CNRS 6285), ENSTA Bretagne
2, rue François Verny, 29806 Brest Cedex 9, France

akomaty@gmail.com, boudra@ecole-navale.fr, dare@ecole-navale.fr

Résumé – Dans ce travail nous nous intéressons au problème d'estimation des paramètres d'un processus α stable symétrique ($S\alpha S$) à partir de ses modes empiriques extraits par la décomposition modale empirique multivariée (MEMD). Nous exploitons le fait que le caractère impulsif du bruit est mieux préservé par ses premiers modes empiriques [1] pour estimer son exposant caractéristique ainsi que son facteur d'échelle. Nous montrons que les paramètres du processus sont mieux estimés à partir de ses modes empiriques que du processus lui-même. Des résultats d'estimation des paramètres utilisant le MEMD sont présentés et comparés à ceux des estimateurs basés sur les quantiles et la fonction caractéristique empirique.

Abstract – This paper focus on the estimation of the parameters of a symmetric α stable ($S\alpha S$) process using its empirical modes extracted by the multivariate EMD (MEMD). We exploit the fact the stability property of a $S\alpha S$ process is well preserved by its first intrinsic mode functions [1], to estimate the stability index and the dispersion parameter. We show that these parameters are better estimated from the first empirical modes than from the $S\alpha S$ process itself. The performances of the proposed strategy based on MEMD are evaluated and the results compared to those of quantile and empirical characteristic function estimators.

1 Introduction

Les distributions α stables constituent une classe très riche de lois de probabilités permettant de modéliser des phénomènes présentant une asymétrie et qui prennent en compte les queues lourdes. Ces lois constituent un modèle de bruits impulsifs et sont une généralisation de la loi Gaussienne [2]. Cette classe de lois est très intéressante pour la modélisation de nombreux phénomènes physiques ou biologiques. Ainsi ces lois sont largement utilisées en acoustique sous-marine, en turbulence, pour l'analyse des données financières ou le trafic internet. Les distributions α stables ont des propriétés très intéressantes les rendant bien adaptées pour la modélisation des signaux ou processus non-Gaussiens. Une étape cruciale pour la modélisation avec les lois α stables est l'estimation de leurs paramètres. L'objectif de ce travail est l'estimation de ces paramètres non pas à partir du processus lui-même mais plutôt à partir de sa décomposition en sous bandes. En effet, il a été récemment mis en évidence, sur la base de simulations intensives et contrôlées, l'aspect banc de filtres de la décomposition modale empirique multivariée (MEMD) [3] dans le cas d'un processus α stable [1]. L'intérêt d'une telle décomposition est l'extraction *locale* des sous-bandes (ou modes empiriques) et de façon adaptative, aucun filtre *pré déterminé* ne conditionnant a priori la décomposition. Le caractère impulsif ou α stable est essentiel-

lement préservé par les premiers modes empiriques extraits par MEMD. Le but est de montrer que les paramètres sont mieux estimés à partir des modes empiriques que du processus directement. Nous nous limitons dans ce papier à la sous-classe de la famille des α distributions, les processus α stable symétriques ($S\alpha S$) [2].

2 Principe du MEMD

Le MEMD est une extension de l'EMD classique [4] pour la décomposition des signaux multicanaux [3]. Contrairement à l'EMD, qui s'appuie sur la notion d'oscillation définie à partir des extrema locaux du signal, le MEMD est basé sur le concept de séparation de rotations. Ainsi, les données multivariées contiennent des modes de rotation couplés qui peuvent être vus comme une généralisation des modes extraits par l'EMD classique. Une propriété importante du MEMD est l'alignement des modes qui garantit que le nombre de rotations extraites est le même pour tous les canaux et assure une concordance en termes de contenu fréquentiel et de propriétés d'échelle des modes de même indice [3]. L'objectif est aussi de prendre en compte les liens possibles entre les différents canaux. Sur le principe, le MEMD reprend l'aspect récursif de l'EMD mais avec des opérateurs de tamisage différents de l'approche origi-

nale. En effet, la recherche des extrema dans un espace multidimensionnel est très compliquée et les interpolations des enveloppes multidimensionnelles ne peuvent pas être obtenues directement. Ce problème d'extrema locaux est résolu dans le cas du signal multivarié à R canaux en utilisant le concept de projection sur $(R-1)$ sphères [3]. Ainsi, une enveloppe à R dimensions est obtenue par projection du signal multivarié sur les différentes directions de l'espace à R -dimensions. Ces directions de l'espace sont construites en considérant un ensemble de points sur une sphère générée par une séquence de Hammersley à faible discrédance. Les différentes enveloppes s'appuyant sur les extrema des projections, obtenues en pratique par une interpolation spline cubique, sont moyennées pour estimer la valeur moyenne du signal multivarié. Soit $\mathbf{x}[n]$ un signal multivarié à R canaux. Le MEMD réalise une décomposition de $\mathbf{x}[n]$ sur un nombre de modes rotationnels couplés restreint comme suit [3] :

$$\mathbf{x}[n] = \sum_{m=1}^M \mathbf{c}_m[n] + \mathbf{d}[n] \quad (1)$$

où M est la profondeur de la décomposition à R dimensions, les composantes \mathbf{c}_m sont les modes rotationnels et $\mathbf{d}[n]$ est le résidu. A l'instar de l'EMD classique, le MEMD considère que tout signal multivarié peut être décrit comme une somme de rotation rapide et d'une rotation lente.

3 Distribution $S\alpha S$

La loi $S\alpha S$ est définie par sa fonction caractéristique [6] :

$$\phi(t) = \exp(-\gamma|t|^\alpha) \quad (2)$$

où t est une variable aléatoire. Cette loi est déterminée par deux paramètres : $\alpha \in]0, 2]$ est l'exposant caractéristique et γ est le paramètre d'échelle. La valeur de α mesure le caractère impulsif de la distribution. Pour $\alpha = 2$ nous retrouvons la distribution de Gauss et pour $\alpha = 1$ nous obtenons la distribution de Cauchy.

4 Estimation des paramètres

Il existe essentiellement quatre grandes familles d'estimateurs des paramètres des lois $S\alpha S$ dont découlent des méthodes fondées sur les quantiles, la fonction caractéristique empirique (ECF), le maximum de vraisemblance et les moindres carrés [5]. Ces méthodes, qui estiment directement les paramètres à partir du signal ou du processus d'entrée, même avec des complexités algorithmiques différentes ont en général, des performances comparables. Nous présentons ici le cas où ces méthodes n'atteignent pas les résultats attendus. Nous illustrons ces propos par un signal sinusoïdal entaché d'un bruit additif $S\alpha S$ de paramètres $\alpha = 1.5$ et $\gamma = 1$, représenté sur la figure (1).

Soit $X[n]$ un processus $S\alpha S$. Rappelons d'abord que pour un processus $S\alpha S$, seuls les moments d'ordre $p < \alpha$ existent. Ces

moments sont appelés moments fractionnaires d'ordre inférieur (FLOM). Le moment d'ordre p est donné par [5] :

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E} \exp(p \log |X|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \mathbb{E}Z^k \quad (3)$$

avec

$$\mathbb{E}Z^k = \frac{d^k}{dp^k} \left(C(p, \alpha) \gamma^{p/\alpha} \right) \Big|_{p=0} \quad (4)$$

où

$$C(p, \alpha) = \frac{2^{p+1} \Gamma(\frac{p+1}{2}) \Gamma(\frac{-p}{\alpha})}{\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(-\frac{p}{2})} \quad (5)$$

avec $Z = \log |X|$ et $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction Gamma. Pour $k=1$, l'équation (4) est le moment d'ordre 1 de Z donné par [5] :

$$\mathbb{E}Z = C_e \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) + \frac{1}{\alpha} \log \gamma \quad (6)$$

avec $C_e = 0.57721566 \dots$ est la constante d'Euler [5]. Ainsi, la variance s'exprime par :

$$\text{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z - \mathbb{E}Z]^2 = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

En utilisant les équations (6) et (7), la moyenne et la variance du processus $\log |S\alpha S|$ s'écrivent comme suit :

$$\hat{\mathbb{E}}Z = \hat{\mu}_Z = \frac{\sum_{n=1}^N Z_n}{N}, \quad \hat{\text{Var}}(Z) = \hat{\sigma}_Z^2 = \frac{\sum_{n=1}^N (Z_n - \hat{\mu}_Z)^2}{N-1} \quad (8)$$

En combinant (8) avec (6) et (7), nous obtenons les estimateurs :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \left(\frac{6}{\pi^2} \hat{\sigma}_Z^2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \hat{\gamma} &= \exp \left(\left(\hat{\mu}_Z - \left(\frac{1}{\hat{\alpha}^2} - 1 \right) C_e \right) \hat{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

En utilisant la relation (1) et le fait que le caractère impulsif est essentiellement "capturé" par les premiers modes empiriques [1], les paramètres sont mis à jour comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{1}{RM_s} \sum_m \sum_r \left(\frac{6}{\pi^2} \hat{\sigma}_{\zeta_{m,r}}^2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \hat{\gamma} &= \frac{1}{RM_s} \sum_m \sum_r \exp \left(\left(\hat{\mu}_{\zeta_{m,r}} - \left(\frac{1}{\hat{\alpha}^2} - 1 \right) C_e \right) \hat{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

où $\zeta_{m,r} = \log |c_{m,r}|$, $r = 1, \dots, R$, $m = 1, \dots, M_s$ avec R le nombre de canaux et M_s est le nombre de modes sélectionné pour l'estimation.

5 Résultats

Pour évaluer l'estimateur basé sur le MEMD nous l'illustrons sur le signal de la figure 1. Nous nous limitons aux quatre premiers modes pour l'estimation de α et γ ($M_s = 4$). Le choix de la valeur de M_s est un problème ouvert. La taille du processus est fixé à 1000 échantillons et avec 1000 réalisations

indépendantes. Le nombre de canaux a été fixé à $R = 8$. Les résultats d'estimation sont présentés dans le tableau 1. Dans l'ensemble les performances de l'estimateur MEMD sont meilleures que celles des approches Quantiles, ECF et $\log |S\alpha S|$ pour toutes les valeurs de $\alpha \in [1; 2]$. En terme de robustesse les performances des quatre sont globalement similaires. Pour l'estimation de γ , le MEMD donne les meilleurs résultats par rapport aux autres estimateurs uniquement pour $\alpha \leq 1.5$. Pour $\alpha \geq 1.6$ aucune méthode ne se dégage des autres. L'estimateur MEMD se révèle moins performant dû au fait que quand $\alpha \rightarrow 2$, les probabilités des valeurs extrêmes sont faibles et donc les énergies des premiers modes empiriques sont également faibles. Par conséquent, l'impulsivité n'est pas limitée aux premiers modes et donc une solution est d'augmenter la valeur du nombre de modes empiriques sélectionné M_s pour améliorer les performances de l'estimateur MEMD.

Les performances de l'estimateur ont été obtenus pour un processus de taille fixée. Des estimations sur des réalisations du processus de tailles différentes sont nécessaires pour confirmer les résultats obtenus. Le but est d'analyser la sensibilité et la robustesse des performances au nombre d'échantillons du processus et à sa dimension R . Une comparaison à d'autres estimateurs tels que celui basé sur le maximum de vraisemblance permettra de mieux cerner le potentiel en termes d'estimation du MEMD.

6 Conclusions

Dans ce travail nous nous sommes intéressés au problème d'estimation des deux paramètres d'un processus $S\alpha S$ à savoir le paramètre d'échelle γ et l'exposant caractéristique α . Nous avons exploité le caractère impulsif d'un processus $S\alpha S$ essentiellement véhiculé par ses premiers modes empiriques, extraits par le MEMD, pour l'estimation des paramètres. L'estimateur est entièrement piloté par les données. Ses performances pour l'estimation du α sont les meilleures comparés à ceux des autres méthodes et ce pour toutes les valeurs de $\alpha \in [1; 2]$. Pour le paramètre γ , l'estimateur MEMD est le plus performant uniquement pour $\alpha \leq 1.5$.

Références

- [1] A. Komaty, A.O. Boudraa, J.P. Nolan, D. Dare, On the behavior of EMD and MEMD in presence of symmetric α -stable noise, *IEEE Sig. Proc. Lett.*, vol. 22, pp. 818-822, 2015.
- [2] Ch.L. Nikias, M. Shao, Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications, Wiley-Interscience, New York, USA, 1995.
- [3] N.U. Rehman and D. Mandic, "Multivariate empirical mode decomposition," *Proc. Royal Society of London*, vol. 466, no. 2117, pp. 1291-1302, 2010.

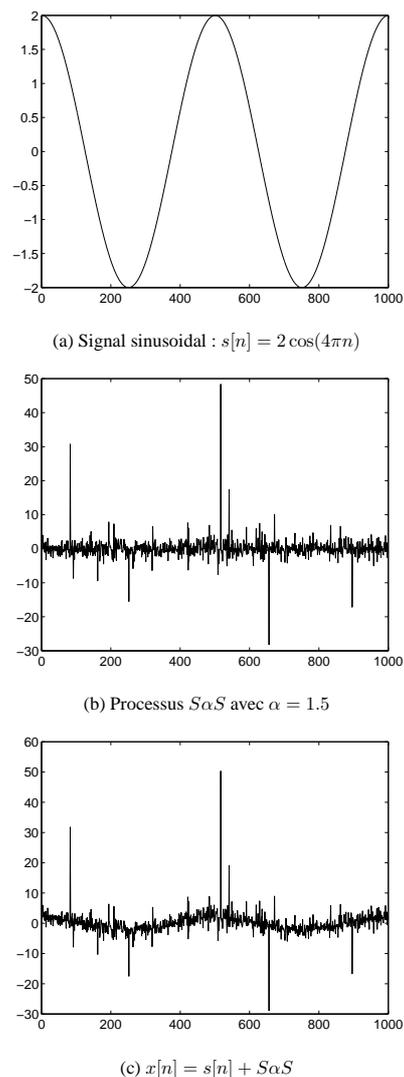


FIGURE 1 – Mélange d'un signal sinusoidal et d'un bruit $S\alpha S$.

- [4] N. Huang, Z. Shen, S. Long, M. Wu, H. Shih, Q. Zheng, N. Yen, C. Tung, and H. Liu, "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," *Proc. Royal Society of London*, vol. 454, no. 1971, pp. 903-995, 1998.
- [5] M. Shao, Ch.L. Nikias, Signal processing with fractional lower order moments : stable processes and their applications, *Proc. IEEE* vol. 81, pp. 986-1010, 1993.
- [6] G. Samorodnitsky and M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*. New York : Chapman & Hall, 1994.

		MEMD- $\log S_{\alpha S} $	$\log S_{\alpha S} $	ECF	Quantile
$\alpha = 1, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	0.937 \pm 0.098	1.328 \pm 0.097	1.318 \pm 0.044	1.311 \pm 0.070
	$\hat{\gamma}$	1.738 \pm 0.169	2.304 \pm 0.285	1.813 \pm 0.060	1.802 \pm 0.057
$\alpha = 1.1, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.039 \pm 0.100	1.465 \pm 0.112	1.407 \pm 0.045	1.451 \pm 0.076
	$\hat{\gamma}$	1.297 \pm 0.123	2.409 \pm 0.337	1.658 \pm 0.052	1.691 \pm 0.056
$\alpha = 1.2, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.14 \pm 0.105	1.580 \pm 0.135	1.493 \pm 0.046	1.587 \pm 0.085
	$\hat{\gamma}$	0.995 \pm 0.092	2.482 \pm 0.380	1.613 \pm 0.045	1.666 \pm 0.055
$\alpha = 1.3, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.234 \pm 0.111	1.683 \pm 0.154	1.579 \pm 0.048	1.723 \pm 0.105
	$\hat{\gamma}$	0.803 \pm 0.076	2.536 \pm 0.453	1.583 \pm 0.044	1.644 \pm 0.059
$\alpha = 1.4, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.375 \pm 0.108	1.807 \pm 0.180	1.661 \pm 0.048	1.847 \pm 0.104
	$\hat{\gamma}$	0.730 \pm 0.061	2.629 \pm 0.538	1.553 \pm 0.041	1.619 \pm 0.058
$\alpha = 1.5, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.475 \pm 0.102	1.884 \pm 0.221	1.739 \pm 0.046	1.935 \pm 0.079
	$\hat{\gamma}$	0.512 \pm 0.047	2.651 \pm 0.670	1.531 \pm 0.049	1.597 \pm 0.054
$\alpha = 1.6, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.567 \pm 0.109	1.986 \pm 0.254	1.811 \pm 0.042	1.975 \pm 0.048
	$\hat{\gamma}$	0.422 \pm 0.040	2.721 \pm 0.820	1.509 \pm 0.038	1.573 \pm 0.056
$\alpha = 1.7, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.687 \pm 0.101	2.072 \pm 0.280	1.872 \pm 0.037	1.991 \pm 0.028
	$\hat{\gamma}$	0.348 \pm 0.027	2.786 \pm 0.882	1.487 \pm 0.035	1.550 \pm 0.053
$\alpha = 1.8, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.809 \pm 0.096	2.128 \pm 0.292	1.927 \pm 0.033	1.996 \pm 0.017
	$\hat{\gamma}$	0.286 \pm 0.020	2.767 \pm 1.799	1.475 \pm 0.033	1.527 \pm 0.050
$\alpha = 1.9, \gamma = 1$	$\hat{\alpha}$	1.931 \pm 0.094	2.195 \pm 0.319	1.978 \pm 0.023	1.998 \pm 0.013
	$\hat{\gamma}$	0.241 \pm 0.015	2.778 \pm 0.981	1.465 \pm 0.034	1.509 \pm 0.053

TABLE 1 – Estimation des deux paramètres (Moyenne \pm std) pour $\alpha \in [1; 1.9]$ utilisant les estimateurs : MEMD- $\log |S_{\alpha S}|$, $\log |S_{\alpha S}|$, ECF et Quantile. Les meilleurs résultats sont indiqués en gras.