

Nouvelle méthode de détection de sources, d'estimation de puissances et de localisation dans un système de communication sans fil avec des statistiques de bruit inconnues

Julia VINOGRADOVA¹, Romain COUILLET², Walid HACHEM¹

¹Département COMELEC
46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France

²Département de Télécommunications
3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

`julia.vinogradova,walid.hachem@telecom-paristech.fr, romain.couillet@supelec.fr`

Résumé – Dans cet article nous considérons un réseau de capteurs de grande dimension. Le nombre de capteurs et la taille de la fenêtre d'observation sont supposés du même ordre de grandeur, ce qui est le cas dans des systèmes de dynamique rapide. Nous supposons de plus que le signal reçu comporte un bruit de corrélation temporelle inconnue. Sous l'hypothèse d'isotropie entre le sous-espace signal et le sous-espace bruit, des estimateurs consistants du nombre de sources, de leurs puissances et des angles d'arrivée sont proposés. Le travail présenté dans cet article est basé sur l'analyse du spectre de la matrice de covariance empirique.

Abstract – We consider a large dimensional sensor array in which the number of sensors and the size of the observation window are of the same order of magnitude. This is particularly relevant in systems with fast dynamics. Moreover, we assume that the noise data can be correlated across successive observations. Under an isotropy assumption between signal and noise eigenspaces, new algorithms for source number estimation, power estimation, and localization by a sensor array under noise with unknown correlation model are proposed. The results fundamentally rely on recent advances in small rank perturbations of large dimensional random matrices.

1 Introduction

Dans les réseaux de communication radio-mobiles modernes, dans beaucoup de situations, la dimension du signal observé N et la taille de la fenêtre d'observation T sont d'ordre de grandeurs comparables. Dans ce cas, il est pertinent de faire l'hypothèse de régime asymptotique noté par $T \rightarrow \infty$, pour lequel $N, T \rightarrow \infty$ au même rythme avec $N/T \rightarrow c > 0$. Dans cet article nous considérons un système de communication sans fil constitué de N capteurs observant des signaux issus de K sources pendant une fenêtre d'observation de taille T . Nous supposons que le nombre de sources K est fixe quand $T \rightarrow \infty$. Nous supposons aussi que le signal reçu contient un bruit de corrélation temporelle inconnue : les échantillons de bruit ne sont pas indépendants d'une observation à l'autre. Cette situation est souvent rencontrée dans les radars. Nous supposons que tous les paramètres du système, à l'exception de N et T , sont inconnus, y compris K . Il est également supposé que les corrélations temporelles du bruit sont inconnues et que les sous-espaces du bruit et

du signal sont isotropes, qui signifie dans le cas du bruit corrélé temporellement que la matrice signal est supposée unitairement invariante à droite. L'objectif est de concevoir des estimateurs consistants pour le nombre de sources, leurs puissances respectives et les angles d'arrivée à partir du spectre de la matrice de covariance du signal reçu en utilisant les T observations uniquement.

Les méthodes de détection non paramétriques les plus connues sont l'AIC (Akaike Information Criterion) [1] et le MDL (Minimum Description Length) [2]. Quand $N \rightarrow \infty$ et $T \rightarrow \infty$ un algorithme MDL amélioré a été récemment proposé dans [4]. En ce qui concerne l'estimation de puissances, on peut citer [5] qui a proposé un estimateur (N, T) -consistant basé sur la théorie des matrices aléatoires. Les techniques d'estimation d'angles d'arrivés sont souvent basées sur l'algorithme MUSIC [3]. Un algorithme amélioré basé sur la théorie de matrices aléatoires a été développé en [6].

Les méthodes de détection-estimation citées ci-dessus, conçues pour le régime asymptotique, supposent toutes que le bruit est blanc. Lorsque le bruit est corrélé, on

suppose souvent avoir accès à une séquence de bruit pur. La matrice de corrélation du bruit est ensuite estimée à partir de cette séquence. Le modèle est ramené ainsi au cas blanc en blanchissant la matrice de covariance empirique [7]. Nous supposons qu'une telle séquence de bruit pur n'est pas disponible, ce qui est plus réaliste dans les environnements de dynamique rapide. Les méthodes de détection-estimation existantes ne peuvent pas s'appliquer dans ce cas.

Nous proposons ici des estimateurs consistants du nombre de sources, de leurs puissances et des angles d'arrivées en utilisant les résultats récents en théorie de grandes matrices aléatoires avec perturbations de rang fini [8]. Le travail de cet article est généralisé dans [9] avec des contraintes détendues.

2 Modèle

On considère des signaux issus de K sources reçus par un réseau de N capteurs pendant T observations successives. Le signal reçu $y_t \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ à l'instant t est donné par

$$y_t = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_k} a_T(\theta_k) s_{k,t} + v_t$$

où p_k est la puissance de la source k avec $p_1 \geq \dots \geq p_K$, $\theta_k \in [-\pi/2, \pi/2]$ est son angle d'arrivée, $a_T(\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, e^{-2i\pi d \sin \theta_k}, \dots, e^{-2i\pi d(N-1) \sin \theta_k}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ est le vecteur directionnel avec $d > 0$. Le signal transmis par la source k à l'instant t est représenté par $s_{k,t}$ et le bruit par le vecteur v_t . La relation entre entrées-sorties du système en concaténant T réalisations du signal successives s'écrit

$$Y_T = H_T P^{1/2} S_T^H + V_T \quad (1)$$

où $Y_T = [y_1, \dots, y_T]$, $H_T = [a_T(\theta_1), \dots, a_T(\theta_K)]$, $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_K)$, $S_T = T^{-1/2} [s_{t,k}^*]_{t,k=1}^{T,K}$ avec $s_{t,k}$ aléatoires i.i.d. de moyenne nulle, variance unité et le moment d'ordre huit fini, et $V_T = [v_1, \dots, v_T]$. On suppose que le bruit est corrélé temporellement, *i.e.*, les colonnes de V_T ne sont pas indépendantes. Dans cet article on fait l'hypothèse que le bruit est un processus stationnaire causal ARMA, mais cela n'est pas nécessaire pour la validité des résultats (voir [9] pour un modèle plus général). Chaque colonne de V_T est la réponse d'un filtre dont la fonction de transfert est donnée par $\mathbf{p}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l z^{-l}$ et dont l'entrée est le bruit blanc. On écrit alors $V_T = W_T R_T^{1/2}$ où $[W_T]_{i,j} \sim \mathcal{CN}(0, 1/T)$ et $R_T \in \mathbb{C}^{T \times T}$ est une matrice de Toeplitz non négative de mesure spectrale ν_T . Dans le cadre du bruit ARMA, la matrice R_T a la forme suivante:

$$R_T = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_{T-1} \\ r_{-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_1 \\ r_{1-T} & \dots & r_{-1} & r_0 \end{bmatrix}$$

avec $r_k \triangleq \sum_{l \geq 0} \psi_{l+k} \psi_l^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. D'après [12, Lemma 6], ν_T converge vers ν dont le support est un intervalle compact et toutes les valeurs propres de R_T sont asymptotiquement contenues dans le support de ν . Il est aussi possible de caractériser la mesure spectrale de la matrice $V_T V_T^H$ qui converge vers la mesure limite notée μ dont la transformée de Stieltjes est la solution d'une équation à point fixe [10]. Le modèle (1) peut s'écrire comme $Y_T = A_T + V_T$ où A_T est de rang K fixe avec les valeurs singulières $\omega_1 \geq \dots \geq \omega_K \geq 0$. Ce modèle est connu dans la littérature sous le nom "spiked models". La matrice A_T est vue comme une perturbation de rang fini de V_T . La mesure spectrale de $Y_T Y_T^H$ converge également vers μ . Toutefois, sous certaines conditions sur ω_i et c , jusqu'à K valeurs propres isolées peuvent être observées à droite du support de μ [11]. Dans cet article, les estimateurs sont basés sur l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres isolées de $Y_T Y_T^H$.

3 Préliminaires

D'après [10] et la section ci-dessus, le spectre limite de la matrice $Y_T Y_T^H$ est constitué d'un intervalle, appelé "bulk", correspondant à la partie bruit et, éventuellement, de quelques valeurs propres isolées situées à droite du bulk. Dans le cadre du modèle (1) et le régime asymptotique $T \rightarrow \infty$, $N/T \rightarrow c > 0$ et K fixe, la transformée de Stieltjes de μ , la mesure spectrale limite de $V_T V_T^H$, est donnée par la solution de l'équation

$$m(z) = \left(-z + \int_0^1 \frac{\mathcal{S}(u)}{1 + cm(z)\mathcal{S}(u)} du \right)^{-1} \quad (2)$$

avec, pour $z \in \mathbb{C}^+$, $m(z) \in C^+$ et $\mathcal{S}(u) = |\mathbf{p}(e^{2\pi i u})|^2$. Ce résultat est un corollaire de [10] et [12, Lemme 6].

La borne supérieure du support de μ est caractérisée par la proposition suivante [9] :

Proposition 1. *Soit μ la mesure spectrale dont la transformée de Stieltjes est la solution de l'équation (2) et dont le support est l'intervalle $[a, b]$. Alors,*

$$b = -\frac{1}{m_b} + \int_0^1 \frac{\mathcal{S}(u)}{1 + cm_b \mathcal{S}(u)} du$$

où m_b est la solution unique dans $(-(cm_b \max_u \{\mathcal{S}(u)\})^{-1}, 0)$ de l'équation en variable m

$$\int_0^1 \left(\frac{m \mathcal{S}(u)}{1 + cm \mathcal{S}(u)} \right)^2 du = \frac{1}{c}.$$

La fonction $m(z)$, $z \in \mathbb{C}^+$, est prolongeable par continuité sur (b, ∞) et $\lim_{x \rightarrow b^+} m(x) = m_b$. Le comportement

des K plus grandes valeurs propres de la matrice $Y_T Y_T^H$ est décrit par la proposition suivante [8] :

Proposition 2. *Soit m la transformée de Stieltjes limite de la mesure μ de support $[a, b]$. Soient m_b et b définis*

comme dans la Prop. 1 et la fonction $g(x) = m(x)(xcm(x) + c - 1)$ décroissante de $m_b(cbm_b + c - 1)$ jusqu'à zéro sur (b, ∞) . Soit $q \in \mathbb{N}$ le plus grand entier pour lequel

$$p_q > p_{\text{lim}}$$

où $p_{\text{lim}} \triangleq 1/m_b(cbm_b + c - 1)$.

Soient $\hat{\lambda}_{1,T} \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{N,T}$ les valeurs propres de $Y_T Y_T^H$. Si $q = 0$, alors $\hat{\lambda}_{1,T} \xrightarrow[p.s.]{T \rightarrow \infty} b$. Sinon, pour $k = 1, \dots, q$, soit ρ_k la solution unique de l'équation $p_k g(x) = 1$ sur (b, ∞) . Alors,

$$\hat{\lambda}_{1,T} \xrightarrow[p.s.]{T \rightarrow \infty} \rho_1, \dots, \hat{\lambda}_{q,T} \xrightarrow[p.s.]{T \rightarrow \infty} \rho_q \text{ et } \hat{\lambda}_{q+1,T} \xrightarrow[p.s.]{T \rightarrow \infty} b.$$

D'après cette proposition, si q sources ont leurs puissances plus grandes que p_{lim} alors les q valeurs propres correspondantes seront situées à l'extérieur du support de μ . Chacune de ces valeurs propres $\hat{\lambda}_{k,T}$ converge vers ρ_k qui est une fonction de la puissance p_k . Ainsi, la position d'une valeur propre isolée peut être associée à la puissance de la source correspondante.

4 Résultats

4.1 Détection du nombre de sources

Soit L la borne supérieure du nombre de sources.

Proposition 3. Soit q défini comme dans la Prop. 2. Soit $\varepsilon > 0$ et \hat{q}_T^ε le plus grand entier dans $\{0, \dots, L\}$ pour lequel

$$\hat{q}_T^\varepsilon = \arg \max_{k \in \{0, \dots, L\}} \left\{ \frac{\hat{\lambda}_{k,T}}{\hat{\lambda}_{k+1,T}} > 1 + \varepsilon \right\}.$$

Alors, pour ε suffisamment petit,

$$\hat{q}_T^\varepsilon - q \xrightarrow[p.s.]{T \rightarrow \infty} 0.$$

Nous avons un estimateur consistant du nombre de sources émettrices si la puissance $p_K > p_{\text{lim}}$, c'est-à-dire, lorsque $q = K$.

4.2 Estimation de puissances

Nous utilisons l'équation $p_k g(\rho_k) = 1$ de la Prop. 2 afin d'estimer les puissances p_k pour $k \geq q$ en remplaçant ρ_k et $g(x)$ par leurs estimés basés sur $\hat{\lambda}_{k,T}$.

Proposition 4. Soient tous les paramètres définis comme dans la Prop. 3 avec $\hat{q}_T \triangleq \hat{q}_T^\varepsilon$ pour tout ε petit, soit $\hat{g}_T(x) = \hat{m}_T(x)(x\hat{c}\hat{m}_T(x) + c - 1)$ où $\hat{m}_T(x)$ est donné par

$$\hat{m}_T(x) = \frac{1}{N - \hat{q}_T} \sum_{n=\hat{q}_T+1}^N \frac{1}{\hat{\lambda}_{n,T} - x}.$$

Pour $k = 1, \dots, \hat{q}_T$, soit $\hat{p}_{k,T} = \left(\hat{g}_T(\hat{\lambda}_{k,T}) \right)^{-1}$.

Alors,

$$\hat{p}_{k,T} - p_k \xrightarrow[p.s.]{T \rightarrow \infty} 0.$$

Il peut être démontré que la variance de l'estimateur proposé est de l'ordre de $1/T$ [9].

4.3 Localisation

Nous généralisons ici la méthode de [13] au cas du bruit corrélé. Soit q défini comme dans la Prop. 2 et soit $\Pi_{T,q}$ le projecteur orthogonal sur l'espace des colonnes de $H_{T,q} = [a_T(\theta_1), \dots, a_T(\theta_q)]$. Les angles $\theta_1, \dots, \theta_q$ sont les solutions de l'équation $a_T(\theta) (I_N - \Pi_{T,q}) a_T(\theta)^H = 0$. On définit par $\gamma_T(\theta) = a_T(\theta)^H \Pi_{T,q} a_T(\theta)$ la fonction de localisation, $\theta_1, \dots, \theta_q$ étant les arguments des maximums locaux de $\gamma_T(\theta)$. On peut estimer $\gamma_T(\theta)$ à partir des \hat{q}_T vecteurs propres de $Y_T Y_T^H$:

Proposition 5. Soient $\hat{u}_{1,T}, \dots, \hat{u}_{\hat{q}_T,T}$ les vecteurs propres de $Y_T Y_T^H$ associés respectivement à $\hat{\lambda}_{1,T}, \dots, \hat{\lambda}_{\hat{q}_T,T}$. Pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, soit

$$\hat{\gamma}_T(\theta) = \sum_{k=1}^{\hat{q}_T} \zeta_T(\hat{\lambda}_{k,T}) a_T(\theta)^H \hat{u}_{k,T} \hat{u}_{k,T}^H a_T(\theta)$$

$$\text{où } \zeta_T(x) = \frac{(x\hat{m}_T(x)(c\hat{m}_T(x) - (1-c)\frac{1}{x}))'}{x\hat{m}_T(x)^2(c\hat{m}_T(x) - (1-c)\frac{1}{x})}.$$

Alors,

$$\gamma_T(\theta) - \hat{\gamma}_T(\theta) \xrightarrow[p.s.]{T \rightarrow \infty} 0.$$

5 Résultats numériques

Les simulations ont été réalisées pour des signaux modulés QPSK avec le bruit autorégressif d'ordre 1 et paramètre a pour lequel $[R_T]_{k,l} = a^{|k-l|}$. L'algorithme proposé (pour lequel R_T est inconnue) est comparé au cas où la matrice R_T est connue parfaitement et le modèle (1) est blanchi. La Fig. 1 représente le taux de détection correcte pour le détecteur de la Prop. 3 qui est comparé à ceux des algorithmes AIC et MDL pour $K = 2$, N croissant et le ratio c fixe. Nous remarquons que l'estimateur proposé est meilleur que les algorithmes AIC et MDL qui ne sont pas consistants dans ce scénario. La Fig. 2 décrit les erreurs quadratiques moyennes normalisées (NMSE) de l'estimateur de puissance de la Prop. 4 pour des valeurs de a différentes qui sont également comparées avec la version blanchie. Pour un N fixe, plus le bruit est corrélé et plus l'écart entre la courbe d'erreur de l'estimateur proposé et celle du cas blanchi est grand. L'écart asymptotique est égal à $10 \log \left(\int_0^1 \mathcal{S}(u)^{-1} du \int_0^1 \mathcal{S}(u) du \right)$ dB et est positif sauf dans le cas où le bruit est blanc pour lequel $\mathcal{S}(u)$ est une constante [9]. On note que des bonnes performances sont obtenues pour un N assez petit. Sur la Fig. 3 les erreurs quadratiques moyennes (MSE) de la fonction de localisation donnée par la Prop. 5 sont tracées. Elles sont comparées à celles de l'algorithme MUSIC traditionnel pour lequel $\hat{\gamma}_{\text{trad},T}(\theta) = \sum_{k=1}^{\hat{q}_T} a_T(\theta)^H \hat{u}_{k,T} \hat{u}_{k,T}^H a_T(\theta)$. D'après le tracé, pour un SNR assez grand, l'algorithme proposé présente un gain de 4 dB par rapport au MUSIC traditionnel. L'écart entre la courbe de la version blanchie et celle de l'algorithme proposé dépend fortement du paramètre a .

6 Conclusion

Nous avons présenté des estimateurs (N, T) -consistants pour le nombre de sources, leurs puissances respectives et les directions d'arrivées en présence d'un bruit de corrélation temporelle inconnue. Les résultats numériques ont montré que les performances des estimateurs proposés dépendent fortement du paramètre de corrélation du bruit. Toutefois, lorsque la corrélation n'est pas très grande, des bons résultats sont obtenus pour une taille de système raisonnable.

References

- [1] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Trans. Aut. Cont.*, pp. 716–723, num. 6, 1974.
- [2] J. Risannen, "Modeling by shortest data description," *Automatica*, pp. 465–471, 1978.
- [3] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Ant. and Prop.*, pp. 276–280, num. 3, 1986.
- [4] R. R. Nadakuditi and A. Edelman, "Sample eigenvalue based detection of high-dimensional signals in white noise using relatively few samples," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, pp. 2625–2638, num. 7, 2008.
- [5] R. Couillet, J. W. Silverstein, Z. D. Bai, and M. Debbah, "Eigen-inference for energy estimation of multiple sources," *IEEE Trans. Inf. Th.*, pp. 2420–2439, num. 4, 2011.
- [6] X. Mestre and M. A. Lagunas, "Modified subspace algorithms for DoA estimation with large arrays," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, pp. 598–614, num. 2, 2008.
- [7] B. Nadler and I. M. Johnstone, "Detection performance of Roy's largest root test when the noise covariance matrix is arbitrary," in *Proc. SSP'11*, Nice, France, 2011, pp. 681–684.
- [8] F. Chapon, R. Couillet, W. Hachem, and X. Mestre, "On the isolated eigenvalues of large Gram random matrices with a fixed rank deformation," soumis à *E. J. P.*, 2012, arXiv:1207.0471.
- [9] J. Vinogradova, R. Couillet, and W. Hachem, "Statistical inference in large antenna arrays under unknown noise pattern," sous révision à *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 2012, arxiv.org/abs/1301.0306.
- [10] J. W. Silverstein and Z. D. Bai, "On the empirical distribution of eigenvalues of a class of large-dimensional random matrices," *J. M. A.*, pp. 175–192, num. 2, 1995.
- [11] J. Baik and J. W. Silverstein, "Eigenvalues of large sample covariance matrices of spiked population models," *J. M. A.*, pp. 1382–1408, num. 6, 2006.
- [12] R. M. Gray, "Toeplitz and circulant matrices: A review," *Now Pub.*, 2006.

- [13] W. Hachem, P. Loubaton, X. Mestre, J. Najim, and P. Vallet, "A subspace estimator for fixed rank perturbations of large random matrices," accepté à *J. M. A.*, 2012.

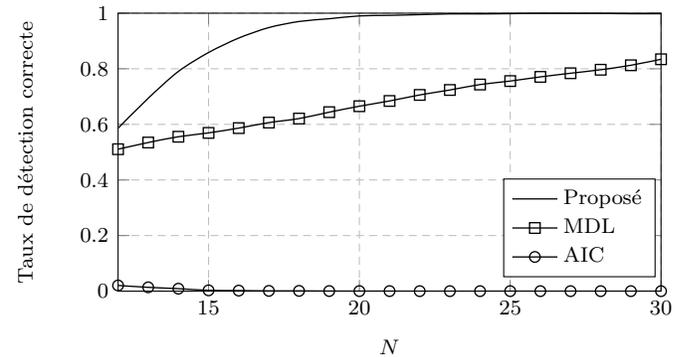


FIG. 1: Taux de détection correcte en fonction de N avec $K = 2$, $\text{SNR} = 10$ dB (la même puissance pour chaque source), $L = 5$, $\varepsilon = 0.75$, $c = 0.5$ et $a = 0.6$.

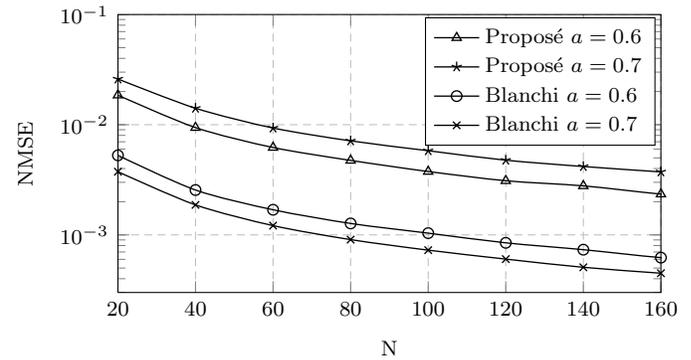


FIG. 2: Erreurs quadratiques moyennes normalisées (NMSE) de l'estimateur de puissance en fonction de N avec $K = 1$, $\text{SNR} = 7$ dB, $N/T = 0.5$ et $c = 0.5$.

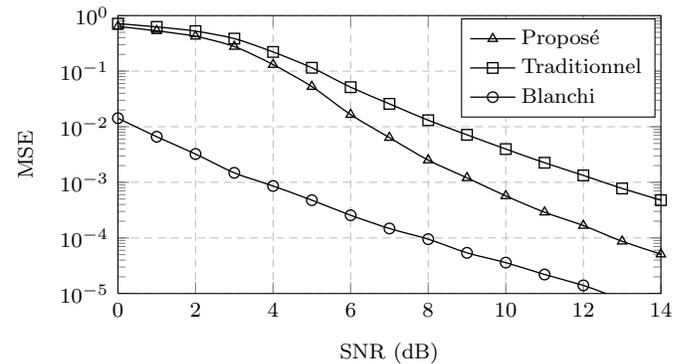


FIG. 3: Erreurs quadratiques moyennes (MSE) de la fonction de localisation avec $K = 1$, $N = 20$, $T = 40$, $c = 0.5$ et $a = 0.6$.