

# Un schéma simplifié de détection

Patrick TORTELIER  
Orange Labs

38-40 Rue du General Leclerc  
92794 Issy-les-Moulineaux Cedex 9, France  
patrick.tortelier@orange-ftgroup.com

**Résumé** – On montre qu’il est possible d’optimiser les performances d’un schéma de détection faisant une quantification sur un bit de l’amplitude du signal reçu en déterminant judicieusement le seuil de quantification. La méthode repose sur une maximisation de la divergence de Kullback-Leibler de deux distributions de probabilités. On vérifie que le seuil  $\varepsilon$  varie peu en fonction du SNR et dépend donc seulement d’une caractéristique du récepteur (température de bruit).

**Abstract** – We describe a simple detection scheme using one bit quantization of the received signal amplitude. We show that the performance of this scheme can be optimized by a proper choice of the quantization threshold, and this is achieved by maximizing the Kullback-Leibler divergence of two probability density functions. Last, the optimum threshold varies slowly with the signal to noise ratio.

## 1 Introduction

Les méthodes de détection généralement utilisées sont basées sur l’énergie d’un signal reçu (somme des carrés d’une suite d’échantillons), ou utilisent certaines propriétés du signal à détecter, par exemple la cyclostationnarité pour des signaux modulés sur une porteuse, cette dernière méthode conduisant à des calculs complexes. On trouvera dans [1, 2, 3] des états de l’art récents sur les méthodes de détection utilisables dans un contexte Radio Cognitive, plus précisément les schémas d’accès opportuniste au spectre [4, 5].

D’une manière générale le processus de détection consiste à calculer une grandeur  $Z$ , à valeurs continues ou discrètes, à partir d’échantillons du signal reçu. Cette grandeur est distribuée différemment selon la présence ou l’absence du signal à détecter. On compare ensuite  $Z$  à un seuil  $\gamma$  qui sert à prendre la décision. Selon la valeur du seuil  $\gamma$  les probabilités de fausse alarme et de non détection, notées respectivement  $P_{FA}$  et  $P_{ND}$ , varient et tracent une courbe indiquant la performance du détecteur ; cette courbe est la courbe opérationnelle du récepteur (en anglais : ROC) [6].

Nous décrivons un schéma sous-optimal de détection pouvant être mis en œuvre sur des dispositifs ayant très peu de ressources de calculs, par exemple des capteurs disséminés dont il faut économiser la batterie car non rechargeable. Le schéma ne fait intervenir qu’un compteur incrémenté de 1 lorsque l’amplitude de l’échantillon dépasse un seuil donné ; le signal est dit présent lorsque le compteur dépasse une valeur donnée à la fin de la mesure. Nous montrons qu’il est possible de choisir ce seuil afin d’avoir la meilleure performance de détection.

## 2 Le schéma simplifié

On dispose de  $n$  observations  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  d’un signal Gaussien à valeurs réelles, centré, et de variance pouvant prendre deux valeurs possibles selon la présence ou non d’un signal de puissance  $P$  dans un bruit de variance  $\sigma^2$  :

$$\begin{aligned} H_0 &\Rightarrow \sigma_0^2 = \sigma^2 \\ H_1 &\Rightarrow \sigma_1^2 = \sigma^2 + P \end{aligned}$$

A partir de ces échantillons on forme la quantité  $Z = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  où les quantités  $Y_i$  sont obtenues par une décision ferme en comparant les amplitudes des échantillons  $X_i$  à un seuil  $\varepsilon$  :

$$Y_i = \begin{cases} 1, & |X_i| > \varepsilon \\ 0, & |X_i| \leq \varepsilon \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La variable  $Z$  compte donc le nombre d’échantillons  $X_i$  dont l’amplitude dépasse le seuil  $\varepsilon$ .

La figure 1 illustre l’allure du signal  $Y_i$  pour une valeur particulière du seuil  $\varepsilon$ . On conçoit facilement que si  $\varepsilon$  est choisi trop petit la variable  $Y_i$  sera systématiquement égale à 1 et on ne pourra discerner les deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  car elles conduiront aux mêmes signaux quantifiés sur un bit. Inversement un seuil  $\varepsilon$  trop grand conduit à  $Y_i = 0$  quasiment pour tout  $i$  et il faudrait un nombre  $n$  d’échantillons très grand pour avoir une chance de détecter le signal. Nous abordons ici l’effet du paramètre  $\varepsilon$  sur la performance de ce schéma simple de détection.

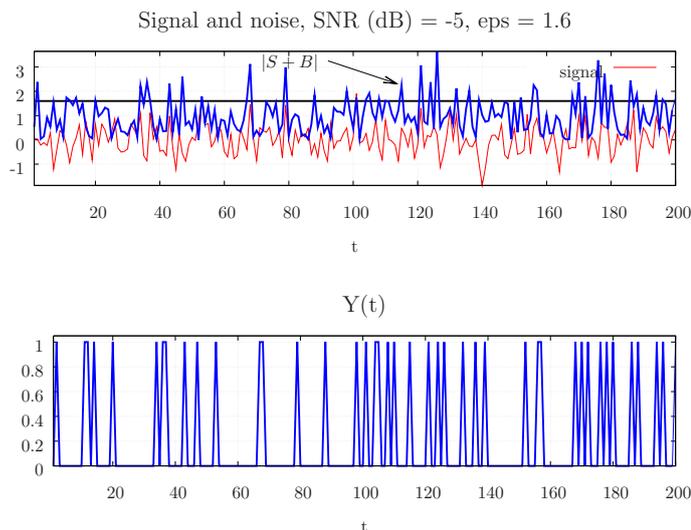


FIGURE 1 – Un exemple : on visualise les  $n = 200$  échantillons d'un signal Gaussien (en rouge), de l'amplitude du signal bruité reçu  $|X_i|$ . La figure du dessous donne les quantités  $Y_i$  correspondantes

### 3 Calcul des performances

On notera  $p_i = \Pr[Y_i = 1|H_i]$ ,  $i = 0, 1$  les probabilités respectives que l'amplitude d'un échantillon  $X_i$  dépasse le seuil  $\varepsilon$  dans les deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ . Le caractère Gaussien des  $X_i$  permet de les calculer selon :

$$\begin{aligned} p_0 &= 2Q\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \\ p_1 &= 2Q\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1+SNR}}\right) = 2Q\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{1+SNR}}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

où nous avons noté  $SNR = P/\sigma^2$  et  $Q(x)$  est la fonction définie de manière classique par

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$$

La variable aléatoire  $Z$  suit une loi binomiale et prend donc les valeurs  $0, 1, \dots, n$  avec les probabilités respectives

$$\Pr[Z = k|H_i] = \binom{n}{k} p_i^k (1 - p_i)^{n-k}, \quad i = 0, 1$$

Pour décider de la présence ou non d'un signal on compare la variable  $Z$  à un seuil  $\gamma$  :

$$\begin{cases} Z > \gamma & \Rightarrow H_1 \\ Z \leq \gamma & \Rightarrow H_0 \end{cases}$$

Les deux types d'erreur de décision qu'on peut commettre sont

- Fausse alarme, lorsque  $Z > \gamma$  alors qu'il n'y a pas de signal, événement dont la probabilité est notée  $P_{FA}$ .
- Non détection lorsque  $Z \leq \gamma$  alors qu'un signal est présent, événement de probabilité notée  $P_{ND}$ .

Les probabilités de fausse alarme et de non détection sont alors respectivement données par

$$\begin{aligned} P_{FA} &= \sum_{k>\gamma} \Pr[Z = k|H_0] = \sum_{k>\gamma} \binom{n}{k} p_0^k (1 - p_0)^{n-k} \\ P_{ND} &= \sum_{k\leq\gamma} \Pr[Z = k|H_1] = \sum_{k\leq\gamma} \binom{n}{k} p_1^k (1 - p_1)^{n-k} \end{aligned} \quad (2)$$

En toute rigueur la courbe opérationnelle du récepteur est un ensemble discret de points obtenus en faisant varier  $\gamma$ , mais nous montrons dans la section suivante que ces points coïncident avec l'approximation Gaussienne dès lors que  $P_{FA} \geq 0.01$ .

### 3.1 Approximation Gaussienne

Pour des valeurs de  $n$  suffisamment grandes la variable  $Z = Y_1 + \dots + Y_n$  peut être approximée par une loi Gaussienne de moyenne  $m = \mathbb{E}[Z] = n \times \mathbb{E}[Y] = n p_i$ , avec  $i = 0, 1$  selon l'hypothèse  $H_0$  ou  $H_1$ , la variance étant donnée par :

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = n p_i \times (1 - p_i), \quad i = 0, 1$$

Nous pouvons alors calculer les probabilités de fausse alarme et de non détection selon les formules du cas Gaussien avec les moyenne et variance ci-dessus, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_{FA} &= Q\left(\frac{\gamma - n p_0}{\sqrt{n p_0 (1 - p_0)}}\right) \\ P_{ND} &= 1 - Q\left(\frac{\gamma - n p_1}{\sqrt{n p_1 (1 - p_1)}}\right) \end{aligned}$$

L'élimination de la variable  $\gamma$  entre ces deux expressions permet d'exprimer la probabilité de détection  $P_D = 1 - P_{ND}$  en fonction de celle de fausse alarme  $P_{FA}$ , ce qui permet de tracer la courbe caractéristique du récepteur :

$$P_D = Q\left(\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p_1(1-p_1)}} Q^{-1}(P_{FA}) + \frac{\sqrt{n}(p_0 - p_1)}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right) \quad (3)$$

Les équations (1) et (3) permettent de tracer l'approximation Gaussienne de la courbe opérationnelle (ROC), en trait plein dans la fig. 2. La suite de points correspondant à l'expression exacte 2 est représentée par des croix, on observe que l'approximation Gaussienne est précise, mais elle ne restitue cependant pas le caractère discret de la courbe ROC exacte.

On a aussi représenté sur la même figure 2 la courbe correspondant à une détection d'énergie sur le même nombre d'échantillons ; comme on pouvait s'y attendre le schéma simplifié donne de moins bonnes performances, il s'agit en effet d'un schéma sous optimal.

Les quantités  $p_0$  et  $p_1$  dépendent toutes deux du paramètre  $\varepsilon/\sigma$  qui influe sur la performance du schéma de détection comme l'illustre la figure 3 où on a utilisé les

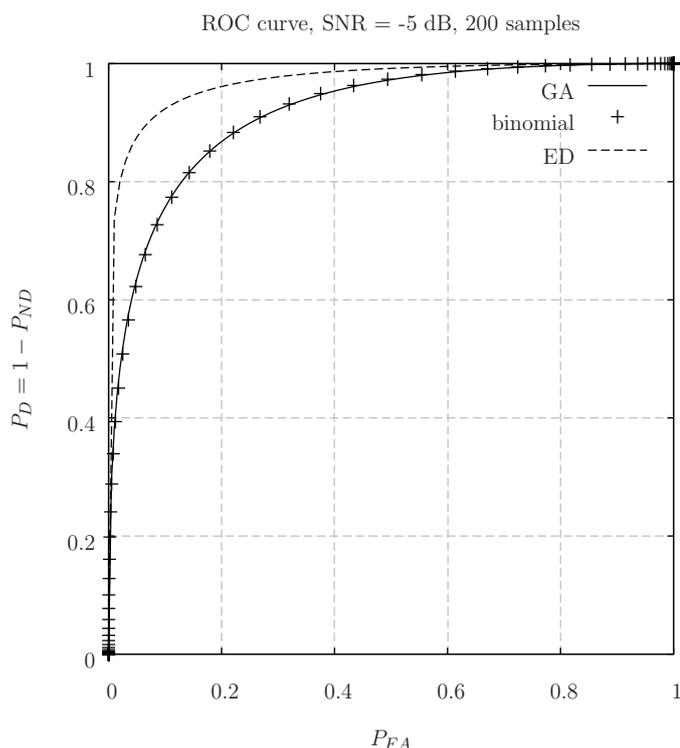


FIGURE 2 – Performance du schéma simplifié de détection : Approximation Gaussienne (3) (courbe trait plein), formule exacte (2) (croix). Comparaison avec la détection d'énergie (tirets). ( $\varepsilon/\sigma = 1$ )  
courbes ROC, SNR = -5 dB, 200 samples

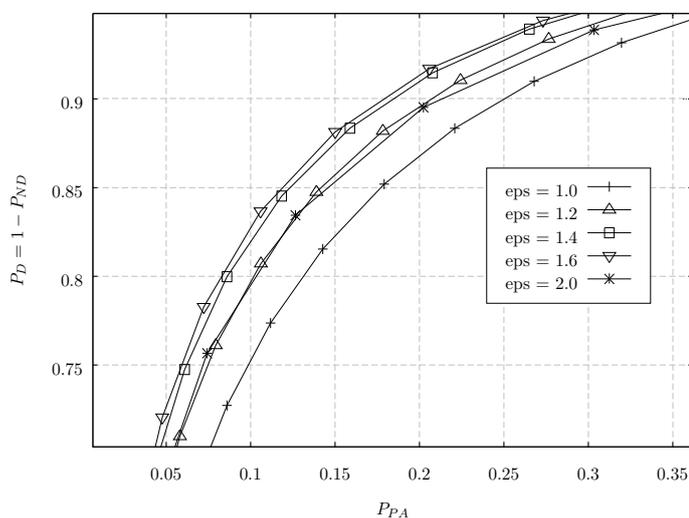


FIGURE 3 – Effet du rapport  $\varepsilon/\sigma$  (zoom). Pour la commodité de l'affichage on a relié les points correspondants aux différents marqueurs (+,  $\triangle$ ,  $\nabla$ ,  $\square$ , \*)

expressions exactes (2) de  $P_{FA}$  et  $P_{ND}$  : on observe une amélioration des performances quand on passe de  $\varepsilon/\sigma = 1$  à  $\varepsilon/\sigma = 1.6$  puis la performance décroît pour  $\varepsilon/\sigma = 2$ . On peut donc se demander s'il y a une valeur optimale du seuil  $\varepsilon$  et s'il est possible de la déterminer, au moins numériquement.

## 4 Valeur optimale du seuil $\varepsilon/\sigma$

Bien que suboptimal le schéma simplifié de détection peut donc voir ses performances améliorées par un choix judicieux du paramètre  $\varepsilon/\sigma$ . Le lemme de Stein [7] nous dit que, pour une valeur donnée de la probabilité de fausse alarme  $P_{FA}$ , la probabilité de non détection se comporte asymptotiquement (pour un grand nombre d'échantillons  $n$ ) comme

$$P_{ND} \simeq \exp(-nD(P_1||P_0)) \quad (4)$$

où

$$D(P||Q) = \sum_x P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)}$$

est la divergence de Kullback-Leibler (KL) des deux distributions (discrètes) de probabilité  $P(x)$  and  $Q(x)$ . Les deux distributions  $P_0$  et  $P_1$  de (4) sont les distributions de Bernoulli de paramètres respectifs  $p_0$  et  $p_1$  définies par (1), un calcul rapide nous donne leur divergence KL :

$$D(P_1||P_0) = p_1 \log \frac{p_1}{p_0} + (1 - p_1) \log \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \quad (5)$$

Les deux quantités  $p_0$  et  $p_1$  dépendent du rapport  $\varepsilon/\sigma$  comme l'indique (1), il en est donc de même de leur divergence KL et la figure 4 montre que cette divergence atteint un maximum pour un rapport  $\varepsilon/\sigma$  voisin de 1.6, valeur qui dépend peu du SNR. Il est ainsi possible de minimiser la probabilité de non détection  $P_{ND}$  sur une assez large plage de SNR. On observe aussi que cette divergence diminue lorsque le SNR diminue : les deux hypothèses (présence ou absence de signal) sont de moins en moins discernables.

On retrouve ce comportement si on trace la probabilité de détection du schéma en fonction de  $\varepsilon/\sigma$  pour une valeur donnée de la probabilité de fausse alarme, par exemple  $P_{FA} = 0.1$ .

Pour une valeur donnée de  $\varepsilon/\sigma$  on peut tout d'abord utiliser l'approximation Gaussienne et déterminer le seuil  $\gamma$  par

$$\gamma = np_0 + \sqrt{np_0 p_0 (1 - p_0)} Q^{-1}(P_{FA})$$

On en déduit la probabilité de détection par

$$P_D = Q\left(\frac{\gamma - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}}\right)$$

On peut ainsi tracer la courbe continue de la figure 5 dont l'allure est en accord avec la figure 4, avec en particulier

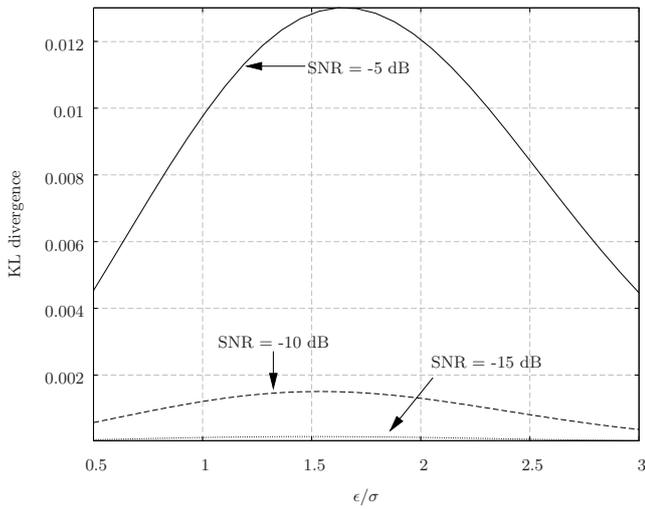


FIGURE 4 – Divergence de Kullback-Leibler  $D(P_1||P_0)$  pour plusieurs valeurs du SNR

un maximum en  $\varepsilon/\sigma \approx 1.6$  prédit par la maximisation de la distance KL.

La courbe en tirets de la fig. 5 est obtenue de manière analogue à partir des valeurs exactes (2); le comportement en dents-de-scie s’explique par le fait que les courbes ROC exactes sont des suites de points, il n’est pas possible lorsqu’on change  $\varepsilon$  d’avoir la même probabilité de fausse alarme, comme indiqué sur la fig. 3, on choisit alors le point avec la valeur de  $P_{FA}$  immédiatement inférieure à la valeur cible, soit 0.1 dans notre cas. Cette courbe a cependant une allure voisine de celle obtenue avec l’approximation Gaussienne, elle est aussi légèrement décalée par rapport à l’approximation Gaussienne. On retrouve ce décalage avec la courbe obtenue par simulation sur 10000 tirages (marques  $\square$ ).

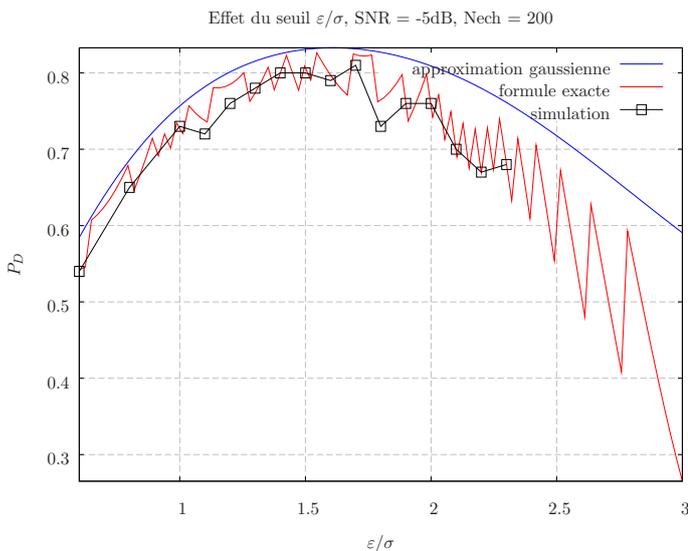


FIGURE 5 – Effet du seuil  $\varepsilon$  pour  $P_{FA} = 0.1$

## 5 Conclusion

Le schéma sous-optimal qui a été décrit est très simple, il ne fait intervenir qu’un comparateur de l’amplitude à un seuil et un accumulateur. De plus il est possible de choisir ce seuil de manière à maximiser sa performance (augmenter la probabilité de détection à probabilité de fausse alarme donnée), et l’approximation Gaussienne, bien que non exacte en toute rigueur car elle ne rend pas le caractère discret de la courbe ROC, permet cependant de calculer simplement le seuil  $\varepsilon/\sigma$  optimal, qui de plus varie peu avec le rapport signal sur bruit.

## Références

- [1] T. Yücek and H. Arslan, “A survey of spectrum sensing algorithms for cognitive radio applications,” *IEEE Communications surveys and tutorials*, vol. 11, no. 1, pp. 116–130, 2009.
- [2] S. Haykin, D. Thomson, and J. Reed, “Spectrum sensing for cognitive radio,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 97, no. 5, pp. 849–877, may 2009.
- [3] D. Noguét and al. (2009) Sensing techniques for cognitive radio - state of the art and trends, edited by Dominique Noguét. IEEE SCC 41.
- [4] M. Buddhikot, “Understanding dynamic spectrum access : Models, taxonomy and challenges,” in *Proceedings of IEEE DySPAN 2007*, Dublin, Ireland, April 17-21 2007.
- [5] Q. Zhao and B. Sadler, “A survey of dynamic spectrum access : Signal processing, networking, and regulatory policy,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 3, pp. 79–89, May 2007.
- [6] T. Fawcett, “An introduction to ROC analysis,” *Pattern recognition letters*, vol. 27, pp. 861–874., 2006.
- [7] T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2nd ed. Wiley, 2006.