

Estimation des noyaux d'un système de Volterra linéaire-quadratique à partir d'observations bruitées par un algorithme LMS modifié non biaisé

Zoé SIGRIST^{1,2}, Eric GRIVEL¹ et Benoît ALCOVERRO²

¹Université Bordeaux 1 - IPB ENSEIRB-MATMECA - IMS - Département LAPS - UMR CNRS 5218
Bât A4, 351 cours de la libération 33405 Cedex, TALENCE, France

²Commissariat de l'énergie atomique CEA CESTA, BP 2, 33114 LE BARP, France
zoe.sigrist@ims-bordeaux.fr, eric.grivel@ims-bordeaux.fr
benoit.alcoverro1@cea.fr

Résumé – Dans cette communication, un algorithme LMS modifié est proposé pour estimer les noyaux d'un système de Volterra linéaire-quadratique lorsque les observations de l'entrée et de la sortie sont perturbées par des bruits additifs blancs gaussiens et centrés. Pour obtenir une estimation au sens des moindres carrés non-biaisée nous introduisons, dans la mise à jour du vecteur des paramètres à estimer, une matrice de compensation et un vecteur de compensation qui dépendent de la variance du bruit additif. La méthode proposée est efficace même pour de faibles rapports signaux à bruit en entrée et en sortie.

Abstract – In this paper, an unbiased modified LMS algorithm is proposed to estimate the kernels of a linear-quadratic Volterra system when the input and the output observations are disturbed by additive white Gaussian noises. To get an unbiased estimation in the LS sense we suggest introducing when updating the estimate a compensation matrix and a compensation vector which depend on the input-noise variance. The proposed method is efficient even for low signal-to-noise ratio at the input and the output.

1 Introduction

Le traitement des signaux non-linéaires est devenu un sujet de recherche à part entière depuis plusieurs décennies. Parmi les modèles les plus utilisés, le développement en séries de Volterra est souvent exploité car il est linéaire par rapport aux paramètres, à savoir les noyaux de Volterra, mais non-linéaire vis-à-vis du signal d'entrée. Cela permet d'envisager des méthodes d'identification habituellement utilisées pour des modèles linéaires. De plus, le modèle de Volterra est stable au sens entrée bornée et sortie bornée.

Dans un contexte SISO ou MIMO, il suscite toujours un grand intérêt [3], [4], [10] et [15] et ce dans de nombreux champs d'application tels que l'annulation d'écho ou les systèmes de communication mobile pour tenir compte des non-linéarités au niveau de l'étage RF, etc. De plus, les auteurs dans [14] et [6] ont proposé d'exploiter la théorie du "compressed sensing" pour réduire le nombre d'observations nécessaire, souvent très élevé, pour mener à bien l'identification de systèmes de Volterra.

Cette communication traite de l'identification d'un système SISO non-linéaire fondée sur le développement en séries de Volterra à partir d'observations bruitées de l'entrée et de la sortie du système. Classiquement, dans un cas non bruité, les noyaux de Volterra peuvent être estimés au sens des moindres carrés. Quand l'ordre du modèle est connu, une approche par

bloc reposant sur l'équation de Wiener-Hopf (WH) peut être utilisée si l'entrée du système est une excitation persistante¹. Cette condition permet de garantir l'inversibilité de la matrice de corrélation du vecteur d'entrée stockant tous les produits possibles des entrées.

Dans le cadre d'une approche récursive, Tsimbinos [16] a proposé des formules empiriques pour fixer le pas d'adaptation du LMS jusqu'à un ordre du modèle égal à 5. Pour améliorer la vitesse de convergence et être moins dépendant des statistiques du signal d'entrée, on applique un principe d'orthogonalisation au signal d'entrée. Dans ce cadre, on opte souvent pour une structure en treillis [9]. Par ailleurs, Griffith et al. [5] ont proposé de formuler l'estimation des noyaux de Volterra d'ordre p comme un problème d'estimation à $p - 1$ contraintes traduisant les valeurs que devraient prendre les noyaux des ordres précédents. Cela découle sur une structure impliquant p LMS opérant en parallèle avec des pas d'adaptation différents.

En supposant qu'un bruit additif blanc gaussien perturbe la sortie du système, Mathews [11] a comparé les performances de l'algorithme LMS avec celui récursif des moindres carrés (RLS) avec un facteur d'oubli, en termes de rapidité de convergence et de coût calculatoire. De plus, Kibangou *et al.* ont pro-

1. Une "excitation persistante" assure que tous les modes non-linéaires du système sont excités. Par exemple, un bruit blanc est une excitation persistante d'ordre infini tandis que l'échelon de Heaviside est persistant d'ordre 1.

posé dans [7] des formules analytiques pour estimer les noyaux d'un système de Volterra d'ordre 5 avec des entrées i.i.d..

Dans les méthodes précédentes, l'ordre est supposé connu. Pour lever cette hypothèse, Abbas *et al.* [1] proposent de prendre un ordre élevé. Puis, pour conserver les noyaux les plus représentatifs, ils proposent d'évaluer les coefficients de corrélation entre le processus défini à partir du noyau étudié et celui généré à partir de tous les noyaux à l'exception de ce dernier.

A notre connaissance, il y a peu de publications sur l'identification d'un modèle de Volterra où l'entrée et la sortie du système sont perturbées par des bruits additifs. Dans [12], les auteurs suggèrent l'emploi d'une entrée cyclo-stationnaire modulée en amplitude et préconisent l'usage des statistiques d'ordres supérieurs. Si l'entrée est persistante d'ordre supérieur à celui du modèle de Volterra, Kim *et al.* [8] proposent d'estimer la variance du bruit d'entrée en exploitant l'intercorrélation entre la sortie bruitée observée et celle du modèle dont l'entrée est bruitée. Puis, les noyaux de Volterra sont estimés itérativement en exploitant l'expression du biais d'estimation des noyaux à partir des observations bruitées. Dans [13], l'identification repose sur la recherche du noyau d'une matrice dont les coefficients correspondent aux produits de termes de la fonction d'intercorrélation entre les sorties observées bruitées et l'entrée bruitée. Cela permet de déduire les noyaux de Volterra à un facteur multiplicatif près. Cependant, ce dernier ne peut être estimé que si l'entrée est colorée.

Cette communication s'organise de la manière suivante : la partie 2 traite du biais de l'estimation au sens des moindres carrés des noyaux d'un modèle de Volterra à partir d'observations bruitées. Nous proposons alors un algorithme LMS modifié compensant l'influence des bruits de mesure. Ce travail est complémentaire à celui présenté dans le chapitre 7 de [2]. Dans la partie 3, des exemples numériques montrent l'efficacité de notre méthode. Enfin, nous dressons des conclusions et proposons des perspectives de travail.

2 Position du problème

2.1 Système de Volterra avec des observations bruitées

Soit le modèle de Volterra dans le domaine discret de mémoire M et d'ordre P :

$$y(n) = \sum_{i=1}^P \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{M-1} \dots \sum_{n_i=0}^{M-1} h_i(n_1, n_2, \dots, n_i) \prod_{j=1}^i u(n - n_j) \quad (1)$$

où u désigne le signal d'entrée du système, y le signal de sortie du système et h_i les noyaux de Volterra d'ordre i .

Dans la suite, on étudie le cas d'un modèle de Volterra linéaire-quadratique ($P = 2$) défini par :

$$y(n) = \sum_{n_1=0}^{M-1} h_1(n_1)u(n - n_1) + \sum_{n_2=0}^{M-1} h_2(n_1, n_2)u(n - n_1)u(n - n_2) \quad (2)$$

Introduisons le vecteur d'entrée et le vecteur des paramètres de taille $N = \frac{M(M+3)}{2} \times 1$ sous la forme triangulaire :

$$\underline{U}(n) = [\underline{U}_1(n)^T \quad \underline{U}_2(n)^T]^T \quad (3)$$

avec $\underline{U}_1(n) = [u(n) \ u(n-1) \ u(n-2) \ \dots \ u(n-M+1)]^T$ et $\underline{U}_2(n) = [u(n)^2 u(n)u(n-1)u(n-2) \dots u(n)u(n-M+1)u(n-1)^2 \ u(n-1)u(n-2) \ \dots \ u(n-M+1)^2]^T$

$$\underline{\theta}(n) = [\underline{\theta}_1(n)^T \quad \underline{\theta}_2(n)^T]^T \quad (4)$$

avec $\underline{\theta}_1(n) = [h_1(0) \ h_1(1) \ h_1(2) \ \dots \ h_1(M-1)]^T$ et $\underline{\theta}_2(n) = [h_2(0,0) \ h_2(0,1) + h_2(1,0) \ h_2(0,2) + h_2(2,0) \ \dots \ h_2(0, M-1) + h_2(M-1,0) \ h_2(1,1) \ h_2(1,2) + h_2(2,1) \ \dots \ h_2(M-1, M-1)]^T$

En utilisant (3) et (4), (2) peut s'écrire :

$$y(n) = \underline{\theta}^T \underline{U}(n) = \underline{U}(n)^T \underline{\theta} \quad (5)$$

Dans le cas sans bruit, la solution optimale de WH est définie de la manière suivante :

$$\underline{\theta} = (E[\underline{U}(n)\underline{U}(n)^T])^{-1} E[\underline{U}(n)y(n)] = R_U^{-1} r_{Uy} \quad (6)$$

où $E[\cdot]$ représente l'espérance mathématique, R_U la matrice d'autocorrélation de taille $N \times N$ de $\underline{U}(n)$, et r_{Uy} le vecteur d'intercorrélation de taille $N \times 1$ du vecteur $\underline{U}(n)$ avec le signal de sortie $y(n)$.

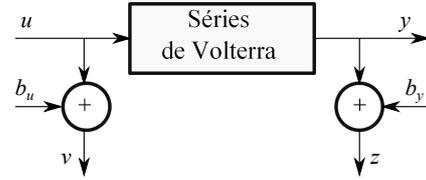


FIGURE 1 – Système de Volterra avec des observations bruitées

Cependant, l'entrée et la sortie du système sont perturbées par des BBGC b_u et b_y de variance $\sigma_{b_u}^2$ et $\sigma_{b_y}^2$ respectivement, voir figure 1 :

$$\begin{cases} v(n) = u(n) + b_u(n) \\ z(n) = y(n) + b_y(n) \end{cases} \quad (7)$$

L'estimation des noyaux de Volterra, si elle reposait directement sur les observations bruitées, s'exprimerait comme suit :

$$\underline{\theta}(\underline{V}, z) = (E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T])^{-1} E[\underline{V}(n)z(n)] = R_V^{-1} r_{Vz} \quad (8)$$

avec R_V la matrice d'autocorrélation du vecteur des observations d'entrée bruité $\underline{V}(n)$ défini de la même manière que $\underline{U}(n)$ et r_{Vz} le vecteur d'intercorrélation du vecteur $\underline{V}(n)$ avec le signal de sortie observé $z(n)$. Ils vérifient :

$$r_{Vz} = r_{Uy} + \underline{d}_M(\sigma_{b_u}^2) \quad (9)$$

$$R_V = R_U + C_M(\sigma_{b_u}^2, \sigma_{b_u}^4) \quad (10)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{d}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha E[z(n)] \end{bmatrix}^T \\ \underline{d}_{M>1}(\alpha) = \begin{bmatrix} \underline{0}_{M,1} & \alpha E[z(n)] & \underline{d}_{M-1}(\alpha)^T \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (11)$$

$$C_M(\alpha, \gamma) = \begin{bmatrix} K_M(\alpha) & \underline{0}_{M,N-M} \\ \underline{0}_{N-M,M} & F_M(\alpha, \gamma) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{cases} F_1(\alpha, \gamma) = 6\alpha r_{vv}(0) - 3\gamma \\ F_{M>1}(\alpha, \gamma) = \\ \begin{bmatrix} 6\alpha r_{vv}(0) - 3\gamma & \underline{0}_{1,M-1} & \underline{G}_{M-1}^T(\alpha, \gamma) \\ \underline{0}_{M-1,1} & (2\alpha r_{vv}(0) - \gamma)I_{M-1} & \underline{0}_{M-1,N-2M} \\ \underline{G}_{M-1}(\alpha, \gamma) & \underline{0}_{N-2M,M-1} & F_{M-1}(\alpha, \gamma) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \underline{G}_1(\alpha, \gamma) = 2\alpha r_{vv}(0) - \gamma \\ \underline{G}_{M>1}(\alpha, \gamma) = \begin{bmatrix} 2\alpha r_{vv}(0) - \gamma & \underline{0}_{M,N-M} & \underline{G}_{M-1}(\alpha, \gamma)^T \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (14)$$

où $K_M(\alpha) = \alpha I_M$, I_M est la matrice identité de taille M , $r_{vv}(0) = E[v^2(n)]$ et (α, β, γ) sont des constantes.

Dans le cas d'observations bruitées, l'algorithme LMS serait défini ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_{n+1} &= \underline{\theta}_n + \mu \underline{V}(n)(z(n) - \underline{V}(n)^T \underline{\theta}_n) \\ &= \underline{\theta}_n + \mu \underline{V}(n)e(n) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{avec } 0 < \mu < \frac{2}{\zeta_{max}} \quad (16)$$

où ζ_{max} désigne la valeur propre maximale de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée observé et $\underline{\theta}_n$ l'estimation du vecteur des noyaux de Volterra reposant sur n observations.

En prenant l'espérance mathématique de (15), en se plaçant à l'état d'équilibre, i.e. $E[\underline{\theta}_{n+1}] = E[\underline{\theta}_n]$ et en supposant que $E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T \underline{\theta}_n] = E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T]E[\underline{\theta}_n]$ on obtient, en utilisant (8), l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} E[\underline{\theta}_{n+1}] &= E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T]^{-1}E[\underline{V}(n)z(n)] \\ &= R_V^{-1}r_{Vz} = \underline{\theta}(V, z) = E[\underline{\theta}(V, z)] \end{aligned} \quad (17)$$

Ainsi, en combinant (6), (8) et (10) et en utilisant le lemme d'inversion matricielle², le biais B de l'estimation au sens des moindres carrés, dans le cas d'un algorithme LMS ou avec l'équation de WH, à partir d'observations bruitées vaut :

$$\begin{aligned} B &= E[\underline{\theta}_n] - \underline{\theta} \\ &= -R_V^{-1}C_M(\sigma_{bu}^2, \sigma_{bu}^4)\underline{\theta} + R_V^{-1}\underline{d}_M(\sigma_{bu}^2) \end{aligned} \quad (18)$$

Remarque : Il est à noter que d'après (9) et (10) l'estimation des noyaux de Volterra dépend de σ_{bu}^2 et est indépendante de σ_{by}^2 .

2. Si A, D et F trois matrices inversibles, alors $(A + FD^T)^{-1} = (A^{-1} - A^{-1}F(I + D^T A^{-1}F)^{-1}D^T A^{-1})^{-1}$.

2.2 Algorithme adaptatif LMS modifié non biaisé pour l'identification du modèle

Pour pallier le problème de biais d'estimation, on propose d'adopter la formule du LMS modifié suivante :

$$\underline{\theta}_{n+1} = \gamma \underline{\theta}_n + \mu \underline{V}(n)e(n) + \underline{\lambda} \quad (19)$$

où $\gamma = I_N + f(\sigma_{bu}^2)$ et f une fonction à évaluer.

Déterminons f et $\underline{\lambda}$ pour obtenir une estimation non biaisée. En prenant l'espérance mathématique de (19), il vient :

$$\begin{aligned} E[\underline{\theta}_{n+1}] &= E[\underline{\theta}_n] + f(\sigma_{bu}^2)E[\underline{\theta}_n] \\ &\quad + \mu E[\underline{V}(n)z(n)] - \mu E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T \underline{\theta}] + \underline{\lambda} \end{aligned} \quad (20)$$

Ensuite, en supposant que l'on est à l'état d'équilibre et que $E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T \underline{\theta}_n] = E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T]E[\underline{\theta}_n]$ et sous réserve que $f(\sigma_{bu}^2) - R_V$ soit inversible, (20) devient :

$$E[\underline{\theta}_n] = (R_V - \frac{1}{\mu}f(\sigma_{bu}^2))^{-1}r_{Vz} - (f(\sigma_{bu}^2) - \mu R_V)^{-1}\underline{\lambda} \quad (21)$$

En combinant (9), (10) et (21), on a :

$$\begin{aligned} E[\underline{\theta}_n] &= (R_U + C_M(\sigma_{bu}^2, \sigma_{bu}^4) - \frac{1}{\mu}f(\sigma_{bu}^2))^{-1}r_{Uy} \\ &\quad - (f(\sigma_{bu}^2) - \mu R_V)^{-1}(\mu d_M(\sigma_{bu}^2) + \underline{\lambda}) \end{aligned} \quad (22)$$

Ainsi, en combinant (6) et (22), on aboutit par identification aux relations suivantes :

$$\begin{cases} C_M(\sigma_{bu}^2, \sigma_{bu}^4) - \frac{1}{\mu}f(\sigma_{bu}^2) = 0 \\ (f(\sigma_{bu}^2) - \mu R_V)^{-1}(\mu d_M(\sigma_{bu}^2) + \underline{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\sigma_{bu}^2) = \mu C_M(\sigma_{bu}^2, \sigma_{bu}^4) \\ \underline{\lambda} = -\mu d_M(\sigma_{bu}^2) \end{cases}$$

Remarque : La matrice $f(\sigma_{bu}^2) - \mu R_V$ est bien inversible, car $f(\sigma_{bu}^2) - \mu R_V = \mu C_M(\sigma_{bu}^2, \sigma_{bu}^4) - \mu R_V = -\mu R_U$ et R_U est définie positive.

Finalement, l'équation de l'algorithme proposé s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_{n+1} &= (I_N + \mu C_M(\sigma_{bu}^2, \sigma_{bu}^4))\underline{\theta}_n \\ &\quad + \mu(\underline{V}(n)e(n) - d_M(\sigma_{bu}^2)) \end{aligned} \quad (24)$$

On montre que la formulation (19) ne modifie pas la condition sur le choix du pas, à savoir qu'il vérifie (16), dès lors que $E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T \underline{\theta}_n] = E[\underline{V}(n)\underline{V}(n)^T]E[\underline{\theta}_n]$.

Remarque : pour éviter le problème du choix du pas μ , l'algorithme NLMS aurait pu être utilisé. Cependant la normalisation par $\|\underline{V}(n)\|_2^2$ dans (19) fait que l'égalité (17) n'est plus satisfaite ($\|\cdot\|_2^2$ désigne la norme 2). Par ailleurs, on peut s'inspirer de l'approche de Giffith [5] pour améliorer la convergence de l'algorithme. De plus, une alternative intégrant une étape de pre-orthogonalisation pourrait être étudiée.

TABLE 1 – Valeurs des paramètres de simulation

		$h_1(0)$	$h_1(1)$	$h_2(0,0)$	$h_2(0,1) + h_2(1,0)$	$h_2(1,1)$	σ_u^2	μ	nombre d'échantillons
modèle 1	Cas 1	2.5	-18.5	-1.3	3.2	64	1	5×10^{-4}	40000
	Cas 2	2.5	-18.5	-1.3	3.2	64	10	6×10^{-5}	20000
modèle 2	Cas 1	9.8	6.2	0.5	0.2	-1.1	1	5×10^{-4}	40000
	Cas 2	9.8	6.2	0.5	0.2	-1.1	10	6×10^{-5}	20000

TABLE 2 – Simulation pour un RSB de sortie égal à 15 dB. Moyenne sur 200 tests.

	Méthode	RSB d'entrée (dB)							
		10		15		20		25	
		$e_1\%$	e_2	$e_1\%$	e_2	$e_1\%$	e_2	$e_1\%$	e_2
Cas 1	LMS	20.08	3.2282	9.02	3.7356×10^{-1}	6.26	4.3169×10^{-2}	5.49	8.2735×10^{-3}
	notre approche	12.54	2.2882×10^{-2}	7.91	9.4052×10^{-3}	6.13	5.7902×10^{-3}	5.50	4.6757×10^{-3}
Cas 2	LMS	20.32	3.2710	7.23	3.8940×10^{-1}	3.98	4.8376×10^{-2}	2.97	9.9387×10^{-3}
	notre approche	9.92	4.2895×10^{-2}	5.60	1.4537×10^{-2}	3.73	7.3659×10^{-3}	2.94	5.2034×10^{-3}
Cas 3	LMS	20.74	1.1546	11.97	1.3352×10^{-1}	9.00	1.5583×10^{-2}	8.14	3.0427×10^{-3}
	notre approche	17.44	7.6839×10^{-3}	11.11	3.1966×10^{-3}	8.91	2.0201×10^{-3}	8.14	1.6681×10^{-3}
Cas 4	LMS	19.81	1.1690	7.52	1.3806×10^{-1}	4.36	1.6636×10^{-2}	3.48	3.0668×10^{-3}
	notre approche	10.55	9.5953×10^{-3}	5.81	2.9431×10^{-3}	4.08	1.6062×10^{-3}	3.43	1.2561×10^{-3}

3 Exemples numériques

De nombreux modèles de Volterra ont été testés. Nous présentons les résultats pour deux modèles à coefficients déterministes excités par des entrées BBGC de variances différentes (qui sont donc persistantes d'ordre infini). Cf. Tableau 1. Ces modèles présentent des fonctions d'incohérence différentes, permettant de traiter plusieurs cas de non-linéarité. Les simulations de type Monte-Carlo ont été réalisées avec 200 séquences de bruits additifs selon un RSB donné. Le RSB en décibels (dB) s'exprime en entrée et en sortie de la manière suivante :

$$\text{RSB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_{b_x}} \right) \quad (25)$$

où P_x désigne la puissance du signal x (avec $x = u$ ou $x = y$) et P_{b_x} celle du bruit additif b_x .

Les critères choisis pour évaluer les performances de l'algorithme LMS classique avec notre algorithme LMS modifié non biaisé sont les erreurs suivantes :

$$e_1(\hat{\theta}) = \max \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\hat{\theta}_i - \theta_i|}{|\theta_i|} \right) \text{ et } e_2(\hat{\theta}) = \|\hat{\theta} - \theta\|_2^2 \quad (26)$$

avec $\hat{\theta}_i$ le $i^{\text{ème}}$ coefficient du vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}$ de taille $N \times 1$.

D'après le Tableau 2, l'estimation des noyaux de Volterra avec notre approche est meilleure que celle avec un algorithme LMS même pour de faibles RSB d'entrée.

4 Conclusion et perspectives

La compensation de biais d'estimation d'un algorithme LMS permet d'obtenir des résultats significatifs, même pour des RSB d'entrée de 10 dB. Le coût calculatoire supplémentaire vient du calcul de la matrice de compensation C_M et du vecteur de compensation d_M . Les résultats de simulations d'un nombre fini de modèles de Volterra de coefficients tirés aléatoirement a abouti

aux mêmes conclusions. Concernant l'extension de cette approche pour $P > 2$, elle reste sujette à plusieurs contraintes (orthogonalité, etc.).

Références

- [1] H. M. Abbas and M. M. Bayoumi, "Volterra System Identification Using Adaptive Genetic Algorithms," *Applied Soft Computing*, vol. 5, pp. 75-86, 2004.
- [2] G. Favier, "Signaux aléatoires : modélisation, estimation, détection," Chap. 7 : Estimation paramétrique de modèles entrée-sortie, Ed. M. Guglielmi, Hermes, Lavoisier, 2004.
- [3] G. Favier and T. Bouilloc, "Parametric Complexity Reduction of Volterra Models Using Tensor Decompositions," *EUSIPCO 2009*, pp. 2288-2292, 2009.
- [4] C. Fernandes, G. Favier, J. Mota, "PARAFAC-based Channel Estimation and Data Recovery in Nonlinear MIMO Spread Spectrum Communication Systems," *Signal Process.*, vol. 91, pp. 311-322, 2011.
- [5] D. Griffith and G. Arce, "Partially Decoupled Volterra Filters : Formulation and LMS adaptation," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 45, n°6, pp. 1485-1494, 1997.
- [6] N. Kalouptsidis, G. Mileounis, B. Babadi and V. Tarokh, "Adaptive Algorithms for Sparse System Identification," *Signal Process.*, Vol. 91, pp. 1910-1019, 2011.
- [7] A. Y. Kibangou, and G. Favier, "Identification of fifth-order Volterra systems using i.i.d. inputs," *IET Signal Process.*, Vol. 4, n°1, pp. 30-44, 2010.
- [8] J. H. Kim and S. W. Nam, "Bias-Compensated Identification of Quadratic Volterra System with Noisy Input and Output," *IEEE Elec. Letters*, vol. 46, n°6, pp. 448-450, 2010.
- [9] T. Koh and E. J. Powers, "An Adaptive Nonlinear Digital Filter with Lattice Orthogonalization," *ICASSP 1983*, pp. 37-40.
- [10] G. Linlin and S. Puthusserypady, "Performance Analysis of Volterra-Based Non-linear Adaptive Blind Multiuser Detectors for DS-CDMA Systems," *Signal Process.*, vol. 84, pp. 1941-1956, 2004.
- [11] J. Mathews, "Adaptive Polynomial Filters," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 8, n°3, pp. 10-26, July 1991.
- [12] D. Mattered and L. Paura, "Higher-Order Cyclostationarity-Based Methods for Identifying Volterra Systems by Input-Output Noisy Measurements", *Signal Process.*, vol. 67, pp. 77-98, 1998.
- [13] U. Ozertem and D. Erdogmus, "Second-Order Volterra system Identification With Noisy Input-Output Measurements," *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 16, n°1, pp. 18-21, 2009.
- [14] K. Shi and P. Shi, "Adaptive Sparse Volterra System Identification with l0-norm Penalty," *Signal Process.*, Vol. 91, pp. 2432-2436, 2011.
- [15] A. Stenger, L. Trautmann and R. Rabenstein, "Nonlinear Acoustic Echo Cancellation with 2nd Order Adaptive Volterra Filters", *ICASSP 1999*, vol. 2, pp. 877-880, 1999.
- [16] J. Tsimbinos, "Identification and Compensation of Nonlinear Distorsion," Phd thesis, Institute for Telecommunications Research School of Electronic Engineering University of South Australia, 1995.