

Une nouvelle classe générale de détecteurs non gaussiens fondée sur une heuristique géométrique

Olivier RABASTE, Nicolas TROUVÉ

ONERA, DEMR/TSI

BP 80100, 91123 Palaiseau, France

Prenom.Nom@onera.fr

Résumé – Dans cet article, nous traitons du problème de détection en environnement gaussien et non gaussien dans le cadre de fouillis modérément impulsionsnels. Après avoir rappelé les caractéristiques géométriques particulières des détecteurs gaussiens et non gaussiens, nous proposons de nouveaux détecteurs hybrides fondés sur une heuristique géométrique qui combine les avantages de ces deux détecteurs classiques. Les performances de ces nouveaux détecteurs sont aussi bonnes que celles du détecteur gaussien en présence de bruit gaussien, et meilleures que celles des détecteurs gaussiens et non gaussiens en présence de bruit non gaussien sur une plage importante de probabilités de détection.

Abstract – In this paper, we deal with the detection problem in gaussian and non gaussian environments with moderately impulsive clutter. After a study of the specific geometries of the gaussian and non gaussian detectors, we propose new hybrid detectors based on a geometric heuristic that permits to combine advantage of both detectors. Performances of these new detectors are similar to the gaussian detector for gaussian noise, and better than both gaussian and non gaussian detectors for non gaussian noise on a large range of detection probabilities.

1 Introduction

Les problèmes de détection se rencontrent dans de nombreuses applications. En radar, ils se modélisent formellement par le biais du test d'hypothèses composite

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{y} = \mathbf{n} & \text{(bruit seul),} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{y} = A\mathbf{s} + \mathbf{n} & \text{(signal + bruit),} \end{cases} \quad (1)$$

où \mathbf{y} est le signal reçu, \mathbf{s} est le signal émis de dimension m , A est l'amplitude complexe, inconnue, du signal et \mathbf{n} est un vecteur de bruit. Sous hypothèse de bruit gaussien, une solution classique de ce test est obtenue par une stratégie heuristique de type RVG (Rapport de Vraisemblance Généralisé) qui remplace l'amplitude inconnue par son estimateur au sens du maximum de vraisemblance. L'hypothèse gaussienne est toutefois de plus en plus souvent invalidée, par exemple dans des applications telles que la détection en présence de fouillis de mer, ou la détection en imagerie SAR haute résolution. De nouveaux modèles de bruits plus généraux ont alors été développés, les SIRV (Spherically Invariant Random Vector) [1], qui couplent un vecteur gaussien avec une variable de texture aléatoire. Ces modèles incluent un grand nombre de distributions, comme la K-distribution, la distribution de Fisher, la distribution de Weibull ou encore la distribution gaussienne. Le détecteur associé au modèle SIRV peut être de nouveau obtenu par une heuristique RVG permettant de gérer à la fois la méconnaissance de l'amplitude et de la texture. Il est connu dans la littérature sous le nom de GLRT-LQ [2], de BORD asymptotique [3] ou encore de NMF (Normalized Matched Filter) [4].

Étant obtenus par RVG, les détecteurs gaussiens et SIRV ne sont pas des tests UPP (Uniformément Plus Puissants) ; ils ne sont optimaux que dans leurs classes d'invariance respectives [4]. On peut ainsi observer les performances du détecteur gaussien surpasser celles du détecteur GLRT-LQ au-delà d'un certain SNR, et cela en présence de bruit non gaussien. Ce

phénomène, qui s'observe particulièrement pour des dimensions m petites (voir la figure 2(b)), n'est pas contraire à la théorie ; il peut d'ailleurs être théoriquement prouvé [5]. Ces détecteurs présentent par ailleurs des caractéristiques géométriques bien précises, mises en lumière pour la première fois par Scharf [6]. Ces caractéristiques géométriques permettent d'expliquer aussi bien leurs différences de comportement que leurs limitations respectives.

Dans un cadre applicatif, il est rare de rencontrer des fouillis ayant des comportements statistiques fortement impulsionsnels justifiant l'abandon complet du modèle gaussien au profit du modèle SIRV. Par exemple, l'amélioration des résolutions aboutit généralement à des bruits, certes non gaussiens, mais qui restent toutefois modérément impulsionsnels. Dans ce cas, la préférence d'un détecteur par rapport à un autre est difficile à justifier, chaque détecteur permettant d'obtenir de meilleures performances que l'autre dans une gamme de SNR donnée. En outre, leurs comportements diffèrent fortement lorsqu'on suppose une incertitude sur le signal à détecter.

Dans cet article, nous proposons d'étendre l'étude géométrique de Scharf et d'exploiter la géométrie du problème de détection étudié pour définir de nouvelles familles de détecteurs, performants aussi bien en présence de bruits gaussiens que non gaussiens. Ces détecteurs sont donc obtenus par une démarche heuristique, non pas fondée sur le RVG, mais sur leur géométrie. Ils sont invariants par rotation autour de l'espace signal. Nous proposons aussi un critère de robustesse des détecteurs vis-à-vis d'une méconnaissance du signal recherché. Nous démontrons que les détecteurs proposés sont robustes pour ce critère.

L'organisation de cet article est la suivante : après une présentation des détecteurs gaussiens et non gaussiens et une étude de leur propriétés géométriques en section 2, nous proposons une nouvelle famille de détecteurs en section 3. Les performances des détecteurs proposés sont présentées en section 3.3.

2 Détecteurs gaussiens et non gaussiens

2.1 Tests statistiques

Tout vecteur de bruit SIRV \mathbf{n} peut se décomposer sous la forme $\mathbf{n} = \sqrt{\kappa}\mathbf{x}$, où κ est une variable aléatoire réelle positive appelée texture, et \mathbf{x} est un vecteur de bruit gaussien centré \mathbf{n} de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ [1]. Si κ est déterministe et constante, \mathbf{n} est alors un bruit gaussien. Sous cette hypothèse gaussienne, le test statistique \mathcal{T}_G obtenu par RVG est bien connu et s'écrit :

$$\mathcal{T}_G(\mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}|^2}{\mathbf{s}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s}} \underset{\tau_0}{\overset{\tau_1}{\gtrless}} \tau_G,$$

avec \mathbf{x}^H la transposée hermitienne du vecteur \mathbf{x} et τ_G le seuil de détection permettant d'assurer la probabilité de fausse alarme désirée P_{FA} . Sous hypothèse de texture inconnue mais supposée déterministe, le test statistique \mathcal{T}_S obtenu par une stratégie RVG en insérant les estimateurs au sens du maximum de vraisemblance de l'amplitude A et de la texture κ est donné par :

$$\mathcal{T}_S(\mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y}|^2}{(\mathbf{s}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s})(\mathbf{y}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{y})} \underset{\tau_0}{\overset{\tau_1}{\gtrless}} \tau_S,$$

avec τ_S le seuil de détection correspondant à la probabilité de fausse alarme P_{FA} . Nous appellerons respectivement GLRT-GAUSS et GLRT-SIRV les détecteurs associés aux tests \mathcal{T}_G et \mathcal{T}_S . A noter que dans cet article nous supposons la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ connue. Si elle n'est pas connue, elle peut être estimée dans le contexte SIRV au sens du maximum de vraisemblance par une méthode du Point Fixe [7, 8].

2.2 Géométrie

Géométriquement, le test \mathcal{T}_G consiste à projeter le signal reçu \mathbf{y} sur l'espace signal Ω_S défini par le vecteur complexe \mathbf{s} , puis à seuiller la norme du vecteur résultant. L'unique information retenue pour effectuer la détection est donc l'énergie du signal contenue dans l'espace Ω_S ; l'information localisée dans l'espace bruit $\overline{\Omega}_S$ n'est quant à elle pas utilisée. Cela explique l'efficacité de ce détecteur à fort SNR, même en présence de bruit non gaussien : tout signal est accepté dès lors que l'énergie rassemblée est suffisamment importante. La région de décision Φ_G du GLRT-GAUSS est délimitée par deux hyperplans (voir figure 1). La classe d'invariance du test \mathcal{T}_G est alors l'ensemble des tests invariants par translation dans un hyperplan orthogonal à Ω_S .

Concernant le GLRT-SIRV, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire $\mathcal{T}_S = \cos^2 \theta_S$. Le test \mathcal{T}_S consiste donc à mesurer une quantité identifiable (même en complexe) à l'angle entre le signal reçu \mathbf{y} et l'espace signal Ω_S , puis à seuiller le résultat obtenu. Dans ce cas, l'unique information utilisée pour la détection est l'information angulaire, et l'information d'énergie du signal est abandonnée. Ce détecteur est donc aveugle aux impulsions de forte énergie, mais capable de détecter un signal de faible amplitude proche de l'espace signal, noyé au milieu d'impulsions de fortes amplitudes plus éloignées de Ω_S . La région de décision Φ_S du GLRT-SIRV est ainsi délimitée par un double cône d'ouverture angulaire θ_S (voir figure 1) qui contient la totalité de l'espace signal. Les très bonnes performances de détection à faible SNR sont fournies par la détection

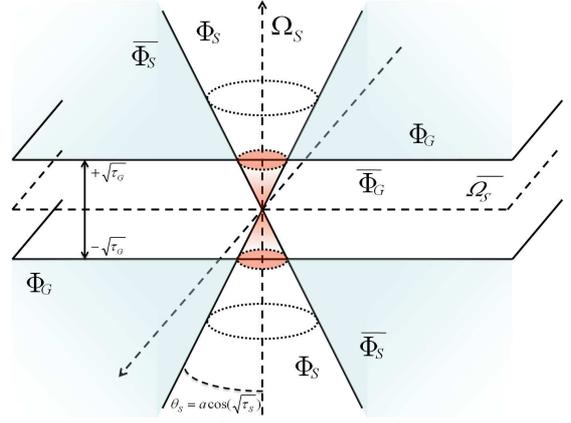


FIGURE 1 – Géométrie des détecteurs.

des vecteurs de faible énergie proches de l'espace signal qui sont toujours inclus dans le cône de détection Φ_S mais rejetés par le test d'énergie gaussien. En particulier, pour des distributions très impulsionnelles, le mode principal très étroit peut être entièrement contenu dans le cône de détection du SIRV même pour des valeurs de SNR pour lesquelles il se situe au dessous de l'hyperplan de décision du GLRT-GAUSS. Par contre, en faible dimension, l'angle de détection est très faible, le cône très resserré, et les performances du GLRT-SIRV sont inférieures à celles du GLRT-GAUSS en présence de bruit non gaussien modérément impulsionnel pour les probabilités de détection intéressantes [9]. La classe d'invariance du test \mathcal{T}_S est l'ensemble des tests invariants par translation le long d'un cône d'angle θ_S et rotation autour de Ω_S .

2.3 Robustesse à une méconnaissance du signal

Jusqu'à présent nous avons supposé sur le vecteur signal \mathbf{s} était parfaitement connu. Cependant, dans de nombreuses applications, cette connaissance peut être imparfaite, en raison d'une méconnaissance du signal attendu ou de la présence de distorsions lors de la propagation. Nous supposons donc ici que le signal reçu sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 s'écrit $\mathbf{y} = A\mathbf{s}_b + \mathbf{n}$, où \mathbf{s}_b représente le signal réfléchi par la cible, et que \mathbf{s}_b diffère du signal connu \mathbf{s} d'un angle de distorsion α défini par [9]

$$\cos^2 \alpha = \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s}_b|^2}{(\mathbf{s}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s})(\mathbf{s}_b^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s}_b)}.$$

Un bon détecteur doit permettre de fournir de bonnes performances de détection à fort SNR, même lorsque le signal utilisé n'est pas parfaitement connu. Nous proposons donc la définition de robustesse suivante :

Définition 1. Un détecteur est α -robuste si $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} P_D(\rho, \alpha) = 1$, où $P_D(\rho, \alpha)$ représente la probabilité de détection pour un SNR égal à ρ et un angle de distorsion α .

Clairement, il est préférable qu'un détecteur soit α -robuste pour un intervalle important d'angle α , surtout pour des α petits. Or il est possible de démontrer que le détecteur GLRT-GAUSS est α -robuste pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$ et que le détecteur GLRT-SIRV est α -robuste uniquement pour $\alpha \in [0, \theta_S[$ [9]. L'angle θ_S étant très petit en faible dimension, le détecteur GLRT-SIRV est alors peu robuste aux distorsions sur le signal.

3 De nouveaux détecteurs hybrides

Les tests statistiques \mathcal{T}_G et \mathcal{T}_S possèdent rejettent une partie de l'information utile portée par le signal \mathbf{y} , soit l'information d'angle, soit l'information d'énergie. Par ailleurs le GLRT-SIRV n'est que peu robuste à une méconnaissance sur le signal en faible dimension. Nous proposons donc une nouvelle classe générale de détecteurs, fondée sur une heuristique géométrique permettant de définir la frontière de décision.

Pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$, soit \mathbf{y}_S le projeté du signal reçu \mathbf{y} sur Ω_S et par $\mathbf{y}_N = \mathbf{y} - \mathbf{y}_S$ le projeté de \mathbf{y} sur l'espace bruit $\overline{\Omega}_S$. On a facilement $\|\mathbf{y}_S\|^2 = \mathcal{T}_G$ et $\|\mathbf{y}_N\|^2 = \mathcal{T}_G(1 - \mathcal{T}_S)/\mathcal{T}_S$. Nous proposons la classe de détecteurs \mathcal{D}_{IR} , définie par :

Définition 2. Un détecteur appartient à la classe \mathcal{D}_{IR} si son test statistique peut s'écrire sous la forme :

$$\|\mathbf{y}_S\| \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \tau_R f(\|\mathbf{y}_N\|), \text{ ou encore } \sqrt{\mathcal{T}_G} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \tau_R f\left(\frac{\mathcal{T}_G}{\mathcal{T}_S} - \mathcal{T}_G\right),$$

avec $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $\frac{df}{dx} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, et τ_R le seuil de détection assurant la probabilité de fausse alarme désirée.

La condition portant sur la croissance de la fonction f permet d'assurer des régions de décision permettant de détecter des signaux de faible SNR proche de l'espace signal et des signaux de fort SNR qui en sont plus éloignés. De par cette définition, tous les détecteurs de cette famille sont invariants par rotation autour de l'espace signal Ω_S . Le détecteur GLRT-GAUSS appartient à \mathcal{D}_{IR} car il correspond à l'application $f(x) = \sqrt{\mathcal{T}_G}$ qui vérifie bien les hypothèses. De même, le détecteur GLRT-SIRV fait partie de la classe \mathcal{D}_{IR} car il correspond à l'application $f(x) = \sqrt{\mathcal{T}_S}x$. Les détecteurs ASB (Adaptive Sidelobe Blanker) proposés dans [10], qui sont fondés sur une opération logique de type ET entre les tests \mathcal{T}_G et \mathcal{T}_S , appartiennent également à la famille \mathcal{D}_{IR} car ils correspondent à l'application $f(x) = \tau_1$ pour $x \in [0, \tau_1/\tau_2]$ et $f(x) = \tau_2 x$ pour $x \in [\tau_1/\tau_2, +\infty[$. Enfin les détecteurs OR proposés dans [9] font partie de \mathcal{D}_{IR} car ils sont définis par l'application $f(x) = \tau_1 x$ pour $x \in [0, \tau_2/\tau_1]$ et $f(x) = \tau_2$ pour $x \in [\tau_2/\tau_1, +\infty[$.

La classe proposée contient bien entendu bien d'autres détecteurs, qui ne sont pas tous intéressants. Partant des constatations géométriques précédentes, il est toutefois possible de définir de nouveaux détecteurs performants appartenant à cette classe, associés à des applications f particulières. Le principe des détecteurs que nous proposons est de combiner de manière souple les avantages des détecteurs gaussiens et non gaussiens ; la région de décision doit permettre d'accepter à la fois des signaux de faible énergie localisés près de l'espace signal Ω_S , et des mesures d'énergie très importante plus éloignées de l'espace Ω_S . Nous exhibons ici deux détecteurs différents, fondés sur des choix particuliers de l'application f , et conduisant à des performances de détection intéressantes.

3.1 Le détecteur PWL3

Le détecteur PWL3 peut être vu comme une hybridation entre le détecteur ASB et le détecteur OR. Il est défini par une

application linéaire par morceaux sur 3 intervalles :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, 1/a_1], \\ a_1 x & \text{pour } x \in [1/a_1, a_2/a_1], \\ a_2 & \text{pour } x \in [a_2/a_1, +\infty]. \end{cases}$$

Pour deux valeurs données de ces paramètres, le seuil de détection τ_R est complètement défini par la probabilité de fausse alarme voulue. Par ailleurs $a_2 \geq 1$ (le cas $a_2 = 1$ correspond au GLRT-GAUSS). Clairement le détecteur PWL3 appartient à la classe \mathcal{D}_{IR} .

Théorème 1. Le détecteur PWL3 est α -robuste quel que soit $\alpha \in [0, \pi/2[$.

Démonstration. La preuve est simple. Comme la fonction $f(x)$ représentant le détecteur PWL3 est bornée supérieurement par $M = a_2$, la région de décision correspondante contient complètement le détecteur GLRT-GAUSS de seuil $\tau_G = \tau_R^2 a_2^2$. Par conséquent $P_D^{PWL3}(\rho, \alpha) \geq P_D^{G, \tau_R^2 a_2^2}(\rho, \alpha)$, où $P_D^{PWL3}(\rho, \alpha)$ et $P_D^{G, (\tau_R^2 a_2^2)}(\rho, \alpha)$ sont respectivement les probabilités de détection du détecteur PWL3 et du détecteur GLRT-GAUSS de seuil de $\tau_G = \tau_R^2 a_2^2$ pour un SNR ρ et un angle de distorsion α . Or comme le détecteur GLRT-GAUSS est α -robuste pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$, quelque soit $\alpha \in [0, \pi/2[$,

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} P_D^{G, \tau_R^2 a_2^2}(\rho, \alpha) = 1, \text{ d'où } \lim_{\rho \rightarrow +\infty} P_D^{PWL3}(\rho, \alpha) = 1. \quad \square$$

3.2 Le détecteur BELL

Le détecteur PWL3 présente une région de décision linéaire par morceaux. Nous proposons une autre famille de détecteurs présentant définis par une application de dérivée continue sur \mathbb{R}^+ . Ces détecteurs BELL sont caractérisés par l'application

$$f(x) = 1 + \beta(1 - \exp(-\gamma x^2)), \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Etant donné β et γ , le seuil de détection τ_R est complètement défini par la probabilité de fausse alarme désirée.

Théorème 2. Le détecteur BELL est α -robuste quel que soit $\alpha \in [0, \pi/2[$.

Démonstration. La preuve est identique à celle du détecteur PWL3, en remarquant que l'application $f(x)$ pour le détecteur BELL est bornée supérieurement par $c + \beta$. \square

3.3 Résultats de simulation et conclusion

Nous comparons ici les performances obtenues pour les détecteurs PWL3 et BELL à celles des détecteurs GLRT-GAUSS et GLRT-SIRV pour un vecteur \mathbf{s} connu. Les performances sont obtenues d'une part en présence de bruit gaussien (figure 2(a)) et d'autre part en présence de bruit K-distribué de paramètre de forme $\nu = 1$ (figure 2(b)). Pour chaque détecteur et chaque distribution de bruit considérée ont été effectuées 10^5 simulations de Monte Carlo. Par ailleurs le SNR est ici défini par : $SNR = A^2 \mathbf{s}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s} / \mathbf{n}^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{n}$. Le GLRT-GAUSS et les détecteurs proposés n'étant pas CFAR-texture, les seuils de détection sont estimés à partir de données bruit seul pour garantir une probabilité de fausse alarme égale à 10^{-3} , procédure utilisée en pratique

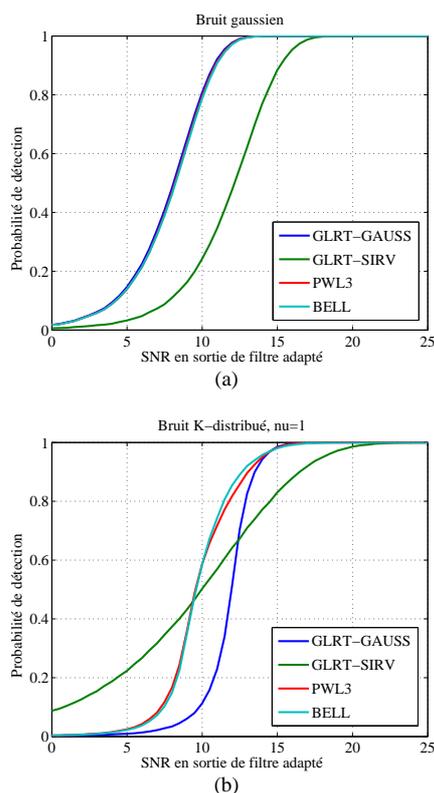


FIGURE 2 – (a) Performances de détection en présence de bruit gaussien : $P_{FA} = 10^{-3}$, $m = 5$. (b) Performances de détection pour un bruit K-distribué de paramètre de forme $\nu = 1$: $P_{FA} = 10^{-3}$, $m = 5$.

dans les applications radar pour fixer les seuils de détection. On remarque que les détecteurs proposés sont presque aussi efficaces que le GLRT-GAUSS en présence de bruit gaussien (le GLRT-SIRV étant inférieur de 4 dB), et fournissent en présence de bruit non gaussien des performances supérieures à celles des deux détecteurs classiques pour les probabilités de détection intéressantes ($P_D > 0.5$) : pour $P_D = 0.7$, ils sont environ 2 dB meilleurs que les détecteurs GLRT-GAUSS et GLRT-SIRV. Pour $P_D = 0.8$, l'écart avec le GLRT-GAUSS est de 1.5 dB tandis que l'écart avec le GLRT-SIRV est de 3.5 dB. On observe par ailleurs que pour cette dimension faible $m = 5$, le GLRT-SIRV est moins performant que le GLRT-GAUSS à partir de $P_D = 0.7$. Enfin la figure 3 présente les performances obtenues en présence d'une distorsion sur le signal d'angle égal à θ_S . Comme prévu, on observe que les détecteurs GLRT-GAUSS, PWL3 et BELL sont robustes, alors que les performances du GLRT-SIRV sont fortement détériorées.

Dans cet article, nous avons proposé une classe générale de détecteurs invariant par rotation autour de l'espace signal, et nous avons exhibé de détecteurs de cette classe. Ces deux détecteurs présentent des performances de détection intéressantes, avec une amélioration notable en environnement modérément non gaussien par rapport aux détecteurs GLRT-GAUSS et GLRT-SIRV.

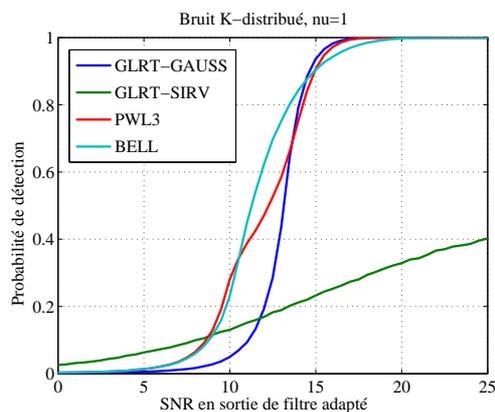


FIGURE 3 – Performances de détection pour un bruit K-distribué de paramètre de forme $\nu = 1$ en présence d'une distorsion d'angle θ_S : $P_{FA} = 10^{-3}$, $m = 5$.

Références

- [1] K. Yao. *A Representation Theorem and Its Applications to Spherically-Invariant Random Processes*. IEEE Trans. on Information Theory, Vol.19, No.5, 600–608, 1973.
- [2] E. Conte, M. Lops et G. Ricci. *Asymptotically Optimum Radar Detection in Compound-Gaussian Clutter*. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol.31, No.2, 617–625, 1995.
- [3] E. Jay, J.-P. Ovarlez, D. Declercq et P. Duvaut. *BORD : Bayesian Optimum Radar Detector*. Signal Processing, Vol.83, 1151–1162, 2003.
- [4] L. Scharf et B. Friedlander. *Matched Subspace Detectors*. IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.42, No.8, 2146–2157, 1994.
- [5] O. Rabaste et N. Trouvé. *Gaussian and Non Gaussian Hybrid Detectors based on Geometrical Modelling of the Decision Regions*. Soumis à IEEE Trans. on signal Processing.
- [6] L. Scharf et S. Kraut. *Geometries, invariances, and SNR interpretations of matched and adaptive subspace detectors*. Traitement du Signal, Vol.15, No.6, 527–534, 1998.
- [7] F. Gini et M. Greco. *Covariance matrix estimation for CFAR detection in correlated heavy tailed clutter*. IEEE Trans. on signal Processing, Vol.82, 1847–1859, 2002.
- [8] F. Pascal, Y. Chitour, J.-P. Ovarlez et P. Forster. *Covariance Structure Maximum-Likelihood Estimates in Compound Gaussian Noise : Existence and Algorithm Analysis*. IEEE Trans. on signal Processing, Vol.56, No.1, 34–48, 2008.
- [9] O. Rabaste et N. Trouvé. *A New Family of Robust Non Gaussian Detectors based on a Geometric Heuristic*. Accepté pour publication à la conférence Eusipco 2011.
- [10] C. Richmond *Performance of the Adaptive Sidelobe Blanker Detection Algorithm in Homogeneous Environments*. IEEE Trans. on signal Processing, Vol.48, No.5, 1235–1247, 2000.