

Propriétés asymptotiques d’un estimateur de matrice de covariance complexe robuste

Mélanie MAHOT¹, Philippe FORSTER², Frédéric PASCAL¹, Jean-Philippe OVARLEZ^{1,3*}

¹SONDRA, Supélec,
Plateau du Moulon, 3 rue Joliot-Curie, F-91190 Gif-sur-Yvette, France

²SATIE, ENS Cachan,
CNRS, UniverSud, 61, Av. du Pdt Wilson, F-94230 Cachan, France

³ONERA, DEMR/TSI,
Chemin de la Hunière, F-91120 Palaiseau, France
melanie.mahot@supelec.fr, philippe.forster@satie.ens-cachan.fr
frederic.pascal@supelec.fr, jean-philippe.ovarlez@onera.fr

Résumé – La Sample Covariance Matrix (SCM) est très utilisée en traitement de signal car elle a de bonnes propriétés statistiques et est facile à mettre en oeuvre. Cependant, lorsque le milieu est non-gaussien ou que les données sont contaminées ou manquantes, ses performances peuvent être très mauvaises. Il peut alors être intéressant d’utiliser un M -estimateur à la place. Dans cet article nous montrons qu’après une normalisation appropriée, le comportement asymptotique des M -estimateurs est le même que celui de la SCM. Ils ont la même distribution asymptotique gaussienne que la SCM à un facteur près. Ce résultat est illustré par des simulations d’estimation de direction d’arrivée (DOA) par la méthode MUSIC. Ainsi, la SCM peut facilement être remplacée par un M -estimateur avec des changements mineurs dans l’analyse des performances d’algorithmes de traitement de signal.

Abstract – The Sample Covariance Matrix (SCM) is widely used in signal processing applications for its good statistical properties and for its tractability. But it can exhibit poor performance in non-Gaussian, contaminated data or missing data contexts. M -estimators provide then a good alternative. In this paper, we show that with an appropriate normalization they asymptotically behave as the SCM. More precisely, they share the asymptotic Gaussianity of the SCM with an asymptotic variance different only up to a scale factor. This result is highlighted by simulations of DOA estimation using a MUSIC approach. A consequence is that the SCM can easily be replaced by M -estimators with minor changes in performance analysis of signal processing algorithms.

1 Introduction

Les applications de traitement de signal qui nécessitent l’estimation d’une matrice de covariance, utilisent souvent la Sample Covariance Matrix (SCM) pour ses bonnes propriétés statistiques et sa facilité de mise en oeuvre. Toutefois, lorsque le milieu est non gaussien, comme par exemple en Radar adaptatif ou en Sonar [1], ses performances peuvent être fortement dégradées. De plus, cet estimateur est peu robuste aux données aberrantes ou manquantes. Pour répondre à ces problèmes, de nombreux travaux ont été menés en théorie de l’estimation robuste [2, 3, 4]. Parmi les solutions proposées, les M -estimateurs introduits par Huber dans [5] et généralisés au cas multivarié par Maronna [6], offrent une alternative intéressante mais peu utilisée en traitement de signal, à l’exception des travaux récents d’Ollila dans le domaine du traitement d’antenne [7, 8, 9].

On peut expliquer ce manque d’intérêt par leur mise en oeuvre

(coup calculatoire supérieur, paramètres à régler) ainsi que la complexité apparente de leurs propriétés statistiques. Dans cet article nous étendons au cas complexe un résultat établi par Tyler [10] dans le cas des M -estimateurs réels. Plus précisément nous démontrons qu’après une normalisation appropriée de la matrice de covariance estimée, les M -estimateurs complexes et la SCM partagent la même loi asymptotique. Dans la plupart des applications de traitement de signal, cette normalisation n’affecte pas les résultats des traitements exploitant la matrice de covariance estimée. En effet, bien souvent seule la structure de la matrice de covariance importe. C’est le cas en localisation de source (Direction-Of-Arrival, DOA) ou dans la majorité des traitements Radar et Sonar. Cet article est organisé comme suit : la section 2 pose le problème tandis que la section 3 contient les résultats principaux. Nous présentons ensuite dans la section 4, des résultats de simulation qui illustrent les résultats théoriques. Cet article s’achève par une conclusion, section 5.

*Les auteurs remercient la Direction Générale de l’Armement (DGA) pour le financement de ce projet.

2 Contexte

Dans cette partie, $'$ représente selon le contexte, l'opérateur transposé T ou l'opérateur transposé conjugué H . Pour toute matrice \mathbf{A} , on définit :

$$\text{cov}(\mathbf{A}) = E [(\text{vec}\mathbf{A} - E[\text{vec}\mathbf{A}]) (\text{vec}\mathbf{A} - E[\text{vec}\mathbf{A}])'].$$

On note \mathbf{K} la matrice de commutation qui transforme $\text{vec}\mathbf{A}$ en $\text{vec}(\mathbf{A}^T)$ et \otimes le symbole de Kronecker.

2.1 Distribution elliptique

Soit \mathbf{z} un vecteur aléatoire réel (resp. complexe) de dimension m . \mathbf{z} a une distribution elliptique réelle (resp. complexe) si sa densité de probabilité peut s'écrire

$$g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = |\mathbf{\Lambda}|^{-1} h_z((\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Lambda}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})), \quad (1)$$

où $h_z : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction telle que (1) définit une densité de probabilité. $\boldsymbol{\mu}$ est la moyenne statistique et $\mathbf{\Lambda}$ une matrice de dispersion. La matrice de dispersion $\mathbf{\Lambda}$ reflète la structure de la matrice de covariance de \mathbf{z} ; en d'autres termes, la matrice de covariance est égale à $\mathbf{\Lambda}$ à un coefficient près. Cette distribution elliptique réelle (resp. complexe) sera notée $E(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Lambda})$ (resp. $CE(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Lambda})$). Dans cet article, nous supposons que la matrice de dispersion est égale à la matrice de covariance. En effet, la fonction $g_{\mathbf{z}}$ dans (1) peut toujours être définie de manière à ce que cette égalité soit vérifiée.

2.2 M -estimateurs de la matrice de dispersion

Soit $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$ un N -échantillon de vecteurs réels (resp. complexes, circulaires) aléatoires indépendants de dimension m avec $\mathbf{z}_i \sim E(\mathbf{0}, \mathbf{\Lambda})$ (resp. $CE(\mathbf{0}, \mathbf{\Lambda})$), $i = 1, \dots, N$. Le M -estimateur \mathbf{V}_N réel (resp. complexe) de $\mathbf{\Lambda}$ est défini comme la solution de

$$\mathbf{V}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(\mathbf{z}'_n \mathbf{V}_N^{-1} \mathbf{z}_n) \mathbf{z}_n \mathbf{z}'_n, \quad (2)$$

où u est une fonction satisfaisant un ensemble d'hypothèses listées dans [6]. Bien que [6] considère des M -estimateurs réels, Ollila a montré dans [7] que ces hypothèses s'appliquent également au cas complexe. Elles sont rappelées ici dans le cas où $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$:

- u est non-négative, non croissante, et continue sur $[0, \infty)$.
- Soit $\psi(s) = su(s)$ et $K = \sup_{s \geq 0} \psi(s)$. $m < K < \infty$, ψ est croissante, et strictement croissante sur l'intervalle où $\psi < K$.
- Soit $P_N(\cdot)$ la distribution empirique de $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N)$. Il existe $a > 0$ tel que pour tout hyperplan H , $\dim(H) \leq m - 1$, $P_N(H) \leq 1 - \frac{m}{K} - a$. Cette dernière contrainte peut être fortement relaxée [11, 12].

Considérons maintenant l'équation suivante, en quelque sorte la limite de (2) :

$$\mathbf{V} = E[u(\mathbf{z}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{z}) \mathbf{z} \mathbf{z}'], \quad (3)$$

où $\mathbf{z} \sim E(\mathbf{0}, \mathbf{\Lambda})$ (resp. $CE(\mathbf{0}, \mathbf{\Lambda})$). Alors, les hypothèses précédentes étant respectées,

- l'équation (3) (resp. (2)) admet une unique solution \mathbf{V} (resp. \mathbf{V}_N) et

$$\mathbf{V} = \sigma \mathbf{\Lambda}, \quad (4)$$

où σ est donné dans [13],

- une simple procédure itérative permet d'obtenir \mathbf{V}_N ,
- \mathbf{V}_N est un estimateur consistant de \mathbf{V} .

2.3 Distributions de Wishart

La distribution de Wishart réelle $W(N, \mathbf{\Lambda})$ (resp. complexe $CW(N, \mathbf{\Lambda})$) est la distribution de $\sum_{n=1}^N \mathbf{z}_n \mathbf{z}'_n$, où les \mathbf{z}_n sont réels (resp. complexes, circulaires), i.i.d, gaussiens, centrés et de matrice de covariance $\mathbf{\Lambda}$. La SCM, estimateur du maximum de vraisemblance en gaussien, largement utilisée en traitement de signal pour sa simplicité et ses propriétés statistiques bien connues, est définie comme $\mathbf{W}_N = N^{-1} \sum_{n=1}^N \mathbf{z}_n \mathbf{z}'_n$. Par la suite, nous appellerons \mathbf{W}_N , matrice de Wishart, bien qu'elle en diffère en toute rigueur d'un facteur N . La distribution asymptotique de la matrice de Wishart \mathbf{W}_N est gaussienne.

$$\sqrt{N}(\text{vec}\mathbf{W}_N - \text{vec}\mathbf{\Lambda}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (\text{resp. } \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})) \quad (5)$$

avec en réel, $\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{\Lambda} \otimes \mathbf{\Lambda})(\mathbf{I} + \mathbf{K})$ et en complexe, $\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{\Lambda}^T \otimes \mathbf{\Lambda})$.

2.4 Distribution asymptotique des M -estimateurs réels

Soit \mathbf{M}_N un M -estimateur réel qui vérifie les conditions de Maronna dans [6] et dont les échantillons sont i.i.d. La distribution asymptotique de \mathbf{M}_N est donnée par Tyler dans [14],

$$\sqrt{N}(\text{vec}\mathbf{M}_N - \text{vec}\mathbf{M}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Pi}), \quad (6)$$

où $\boldsymbol{\Pi} = \sigma_1(\mathbf{I} + \mathbf{K})(\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}) + \sigma_2 \text{vec}\mathbf{M}(\text{vec}\mathbf{M})^T$, σ_1 et σ_2 sont des scalaires donnés dans [14, 13].

Comme le montre Tyler dans [10], après une normalisation adéquate, les M -estimateurs réels ont la même distribution asymptotique qu'une matrice de Wishart réelle, au coefficient σ_1 près. Nous nous proposons dans cet article, d'étendre ce résultat au cas complexe.

3 Principaux résultats en complexe

3.1 Notations

- On pose pour tout n , $\mathbf{z}_n = \mathbf{x}_n + j\mathbf{y}_n$, $\mathbf{u}_n = (\mathbf{x}_n^T, \mathbf{y}_n^T)^T$ et $\mathbf{v}_n = (-\mathbf{y}_n^T, \mathbf{x}_n^T)^T$. On peut montrer que \mathbf{u}_n et \mathbf{v}_n partagent la même distribution elliptique.

$$-\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$-\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ -j\mathbf{I}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{g}^T \otimes \mathbf{g}^H.$$

- Soit $\widehat{\mathbf{M}}_R$ solution de $\widehat{\mathbf{M}}_R = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \left(u_r \left(\mathbf{u}_n^T \widehat{\mathbf{M}}_R^{-1} \mathbf{u}_n \right) \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T + u_r \left(\mathbf{v}_n^T \widehat{\mathbf{M}}_R^{-1} \mathbf{v}_n \right) \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T \right)$
où $u_r(s) = u(2s)$.
- Soit $\widehat{\mathbf{M}}_u$ solution de $\widehat{\mathbf{M}}_u = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(u_r \left(\mathbf{u}_n^T \widehat{\mathbf{M}}_u^{-1} \mathbf{u}_n \right) \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T \right)$.
- Soit \mathbf{M}_u solution de

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_u &= E \left[u_r \left(\mathbf{u}_n^T \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{u}_n \right) \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T \right] \\ &= E \left[u_r \left(\mathbf{v}_n^T \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{v}_n \right) \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T \right] \end{aligned} \quad (7)$$

- On peut montrer que $\mathbf{V}_N = 2\mathbf{g}^H \widehat{\mathbf{M}}_R \mathbf{g}$. (8)

3.2 Distribution asymptotique des M -estimateurs complexes

Un lemme, dont nous ne donnerons pas la démonstration par manque de place, est d'abord nécessaire.

Lemme 3.1 $\widehat{\mathbf{M}}_R$ et $\frac{1}{2} \left(\widehat{\mathbf{M}}_u + \mathbf{A} \widehat{\mathbf{M}}_u \mathbf{A}^T \right)$ ont la même distribution asymptotique et en particulier la même covariance asymptotique.

Théorème 3.1 La distribution asymptotique du M -estimateur complexe \mathbf{V}_N est donnée par

$$\sqrt{N} (\text{vec} \mathbf{V}_N - \text{vec} \mathbf{V}) \xrightarrow{d} \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad (9)$$

où

$$\mathbf{\Sigma} = \text{cov}(\sqrt{N} \mathbf{V}_N) = \sigma_1 \mathbf{V}^T \otimes \mathbf{V} + \sigma_2 \text{vec} \mathbf{V} (\text{vec} \mathbf{V})^H \quad (10)$$

σ_1 et σ_2 étant les variables apparaissant dans l'expression de la variance asymptotique de $\widehat{\mathbf{M}}_u$, dans (6).

Preuve 3.1 En utilisant (8),

$$\text{cov}(\sqrt{N} \mathbf{V}_N) = 4\mathbf{G} \text{cov}(\sqrt{N} \widehat{\mathbf{M}}_R) \mathbf{G}^H$$

On applique alors le lemme 3.1, ce qui nous donne

$$\text{cov}(\sqrt{N} \mathbf{V}_N) = 4\mathbf{G} \mathbf{\Pi} \mathbf{G}^H$$

$\mathbf{\Pi}$ étant défini dans (6). Il suffit alors de développer $\mathbf{\Pi}$ et simplifier l'expression obtenue pour finalement aboutir à (10).

3.3 Distribution asymptotique des M -estimateurs complexes normalisés

Nous montrons ici qu'après une normalisation appropriée ($\mathbf{\Lambda}$ -normalisation), les M -estimateurs et matrice de Wishart complexes ont la même distribution asymptotique. Soit \mathbf{M} une matrice de taille $m \times m$, la matrice $\mathbf{\Lambda}$ -normalisée $\widetilde{\mathbf{M}}$ est telle que

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \frac{m}{\text{tr}(\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{M})} \mathbf{A}. \quad (11)$$

A noter que pour toute matrice $\mathbf{M} = \alpha \mathbf{\Lambda}$, on a $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{\Lambda}$ et

donc

$$\widetilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \text{ et } \widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{\Lambda}. \quad (12)$$

Finalement, en utilisant l'égalité $\text{tr}(\mathbf{A}^H \mathbf{B}) = (\text{vec} \mathbf{A})^H \text{vec} \mathbf{B}$, la normalisation (11) peut s'écrire comme

$$\text{vec} \widetilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{\mathbf{c}^H \text{vec} \mathbf{M}} \text{vec} \mathbf{M}, \quad (13)$$

$$\text{où } \mathbf{c} = \frac{1}{m} \text{vec}(\mathbf{\Lambda}^{-1}). \quad (14)$$

Pour prouver le résultat principal, un lemme est d'abord nécessaire.

Lemme 3.2 soit $(\mathbf{z}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ une séquence de vecteurs aléatoires tels que

$$\sqrt{N}(\mathbf{z}_N - \mathbf{m}) \xrightarrow{d} \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}). \quad (15)$$

On pose $\widetilde{\mathbf{z}}_N = \frac{1}{\mathbf{c}^H \mathbf{z}_N} \mathbf{z}_N$ et $\widetilde{\mathbf{m}} = \frac{1}{\mathbf{c}^H \mathbf{m}} \mathbf{m}$, où \mathbf{c} est un vecteur arbitraire. Alors

$$\sqrt{N}(\widetilde{\mathbf{z}}_N - \widetilde{\mathbf{m}}) \xrightarrow{d} \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{A} \mathbf{\Sigma} \mathbf{A}^H), \quad (16)$$

$$\text{avec } \mathbf{A} = \frac{1}{\mathbf{c}^H \mathbf{m}} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{m} \mathbf{c}^H}{\mathbf{c}^H \mathbf{m}} \right).$$

Preuve 3.2 Définissons $\delta_N = \mathbf{z}_N - \mathbf{m}$. Alors

$$\widetilde{\mathbf{z}}_N = \frac{\mathbf{m} + \delta_N}{\mathbf{c}^H (\mathbf{m} + \delta_N)} = \frac{\mathbf{m} + \delta_N}{\mathbf{c}^H \mathbf{m} (1 + \frac{\mathbf{c}^H \delta_N}{\mathbf{c}^H \mathbf{m}})}. \quad (17)$$

Ainsi, pour N grand, i.e. δ_N petit, un développement limité à l'ordre 1 nous donne

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{z}}_N &= \frac{1}{\mathbf{c}^H \mathbf{m}} \left(1 - \frac{\mathbf{c}^H \delta_N}{\mathbf{c}^H \mathbf{m}} \right) (\mathbf{m} + \delta_N) \\ &= \frac{1}{\mathbf{c}^H \mathbf{m}} \left(\mathbf{m} + \delta_N - \frac{\mathbf{c}^H \delta_N}{\mathbf{c}^H \mathbf{m}} \mathbf{m} \right) \\ &= \widetilde{\mathbf{m}} + \mathbf{A} \delta_N. \end{aligned} \quad (18)$$

Ainsi, $\sqrt{N}(\widetilde{\mathbf{z}}_N - \widetilde{\mathbf{m}}) = \mathbf{A} \sqrt{N} \delta_N$ lorsque N est grand, ce qui conclut la preuve.

Théorème 3.2 Soit $\widetilde{\mathbf{V}}_N$ (resp. $\widetilde{\mathbf{W}}_N$) un M -estimateur complexe (resp. matrice de Wishart complexe) $\mathbf{\Lambda}$ -normalisé(e). Alors $\sqrt{N}(\widetilde{\mathbf{V}}_N - \mathbf{\Lambda})$ et $\sqrt{\sigma_1 N}(\widetilde{\mathbf{W}}_N - \mathbf{\Lambda})$ ont la même distribution asymptotique.

Preuve 3.3 A partir de (5) dans le cas complexe, on applique le lemme 3.2 avec $\mathbf{z}_N = \text{vec} \mathbf{W}_N$, $\mathbf{m} = \text{vec} \mathbf{\Lambda}$ et \mathbf{c} donné par (14) donne

$$\sqrt{\sigma_1 N} (\text{vec} \widetilde{\mathbf{W}}_N - \text{vec} \mathbf{\Lambda}) \xrightarrow{d} \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma_1 \mathbf{\Sigma}_A), \quad (19)$$

avec $\mathbf{\Sigma}_A = \text{cov}(\sqrt{N} \widetilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{A} (\mathbf{\Lambda}^T \otimes \mathbf{\Lambda}) \mathbf{A}^H$.

$$\begin{aligned} \text{et } \mathbf{A} &= \frac{1}{\mathbf{c}^H \text{vec} \mathbf{\Lambda}} \left(\mathbf{I} - \frac{\text{vec} \mathbf{\Lambda} \mathbf{c}^H}{\mathbf{c}^H \text{vec} \mathbf{\Lambda}} \right) \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{m} \text{vec} \mathbf{\Lambda} (\text{vec}(\mathbf{\Lambda}^{-1}))^H \right). \end{aligned}$$

De manière similaire, à partir de (10) nous obtenons

$$\sqrt{N}(\tilde{\mathbf{V}}_N - \mathbf{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Pi}_A), \quad (20)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_A &= \text{cov}(\sqrt{N}\tilde{\mathbf{V}}_N) \\ &= \mathbf{A}_M (\sigma_1 \mathbf{V}^T \otimes \mathbf{V} + \sigma_2 \text{vec}\mathbf{V}(\text{vec}\mathbf{V})^H) \mathbf{A}_M^H \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{et } \mathbf{A}_M = \frac{1}{\mathbf{c}^H \text{vec}\mathbf{V}} \left(\mathbf{I} - \frac{\text{vec}\mathbf{V} \mathbf{c}^H}{\mathbf{c}^H \text{vec}\mathbf{V}} \right) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{A}, \quad (22)$$

la dernière égalité découlant de (4). En remarquant que

$$\text{Avec}\mathbf{V} = \text{vec}\mathbf{V} - \frac{1}{m} \text{vec}\mathbf{V}(\text{vec}(\mathbf{V}^{-1}))^H \text{vec}\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (23)$$

on a

$$\begin{aligned} \text{cov}(\sqrt{N}\tilde{\mathbf{V}}_N) &= \mathbf{A}_M (\sigma_1 \mathbf{V}^T \otimes \mathbf{V}) \mathbf{A}_M^H \\ &= \sigma_1 \text{cov}(\sqrt{N}\tilde{\mathbf{W}}) \end{aligned} \quad (24)$$

ce qui conclue la preuve.

Remarque 3.1 σ_1 est un paramètre donné dans [14] et rappelé ici. Soit $\phi(s) = su_r(s)$, u_r étant la fonction du M -estimateur réel \mathbf{M}_w , et p est la taille des vecteurs \mathbf{u}_n ($p = 2m$). Alors $\sigma_1 = a1(p+2)^2(2a2+2p)^{-2}$ avec $a1 = (p(p+2))^{-1}E[\phi(\sigma s)^2]$, $a2 = m^{-1}E[\sigma s\phi'(\sigma s)]$, $s = \|\mathbf{t}\|$ et \mathbf{t} est un vecteur aléatoire de dimension p avec une distribution elliptique réelle de moyenne nulle et de matrice de dispersion \mathbf{I} . σ est tel que $E[\phi(\sigma s)] = p$.

4 Simulations

Considérons une antenne linéaire uniforme de 6 capteurs recevant un signal gaussien stationnaire de DOA 20° , auquel s'ajoute un bruit blanc gaussien. Le SNR est de 5dB par capteur et les N données sont supposées indépendantes. Les estimateurs de matrice de covariance utilisés ici sont la SCM et le M -estimateur d'Huber défini par $u_c(s) = \frac{1}{\beta} \min(1, \frac{k^2}{s})$, où k^2 et β dépendent d'un paramètre q vérifiant $q = F_m(k^2)$, et $\beta = F_{m+2}(k^2) + k^2(1-q)/m$. $(1-q)$ représente la probabilité pour qu'une donnée gaussienne soit traitée comme une donnée aberrante, ainsi $q = 1$ correspondra à la SCM. Ici, $q = 0.05$. F_m est la fonction de répartition d'un χ^2 à m degrés de liberté. Le nombre de sources est connu et vaut 1. La figure 1 représente l'erreur quadratique moyenne (EQM) de la DOA estimée avec la méthode MUSIC, avec N données pour la SCM et l'estimateur d'Huber. Une troisième courbe représente l'EQM de l'estimateur d'Huber estimé avec $\sigma_1 N$ données. Cette dernière se confond avec celle de la SCM dès que N est suffisamment grand ($N \geq 40$), illustrant ainsi nos résultats théoriques.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons étudié les propriétés statistiques des M -estimateurs complexes de la matrice de dispersion. Plus

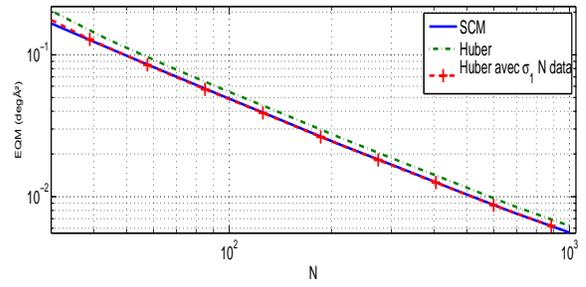


FIG. 1 – EQM des DOAs obtenues avec les estimés d'Huber et la SCM. Echelles logarithmiques. $\sigma_1 = 1.15$

précisément, nous avons montré que ces estimateurs normalisés ont la même matrice de covariance asymptotique que la matrice de Wishart complexe normalisée, à un facteur près. Ainsi, moyennant un accroissement des données d'un facteur σ_1 , ces estimateurs, plus robustes aux perturbations ou à un modèle non gaussien, atteignent les mêmes performances qu'une SCM classique.

Références

- [1] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing - Detection Theory*, vol. 2, Prentice-Hall PTR, 1998.
- [2] P. J. Huber and E. M. Ronchetti, *Robust statistics*, John Wiley & Sons Inc, 2009.
- [3] F. R. Hampel, E. M. Ronchetti, P. J. Rousseeuw, and W. A. Stahel, *Robust Statistics : The Approach Based on Influence Functions*, Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 1986.
- [4] R. A. Maronna, D. R. Martin, and J. V. Yohai, *Robust Statistics : Theory and Methods*, Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 2006.
- [5] P. J. Huber, "Robust estimation of a location parameter," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, no. 1, pp. 73–101, 1964.
- [6] R. A. Maronna, "Robust M -estimators of multivariate location and scatter," *Annals of Statistics*, vol. 4, no. 1, pp. 51–67, January 1976.
- [7] E. Ollila and V. Koivunen, "Robust antenna array processing using M -estimators of pseudo-covariance," in *Proc. 14th IEEE Int. Symp. Personal, Indoor, Mobile Radio Commun.(PIMRC)*, 2003, pp. 7–10.
- [8] E. Ollila and V. Koivunen, "Influence functions for array covariance matrix estimators," *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP), ST Louis, MO*, pp. 445–448, October 2003.
- [9] E. Ollila, L. Quattropani, and V. Koivunen, "Robust space-time scatter matrix estimator for broadband antenna arrays," *Vehicular Technology Conference, 2003. VTC 2003-Fall. 2003 IEEE 58th*, vol. 1, pp. 55 – 59 Vol.1, oct. 2003.
- [10] D.E. Tyler, "Robustness and efficiency properties of scatter matrices," *Biometrika*, vol. 70, no. 2, pp. 411, 1983.
- [11] D.E. Tyler, "Some results on the existence, uniqueness, and computation of the M -estimates of multivariate location and scatter," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 9, pp. 354, 1988.
- [12] J. T. Kent and D. E. Tyler, "Redescending M -estimates of multivariate location and scatter," *Annals of Statistics*, vol. 19, no. 4, pp. 2102–2119, December 1991.
- [13] M. Bilodeau and D. Brenner, *Theory of multivariate statistics*, Springer Verlag, 1999.
- [14] D.E. Tyler, "Radial estimates and the test for sphericity," *Biometrika*, vol. 69, no. 2, pp. 429, 1982.