

# Apprentissage de treillis complets pour une morphologie mathématique multivariée sur variétés

Olivier LÉZORAY, Abderrahim ELMOATAZ

Université de Caen Basse-Normandie, GREYC UMR CNRS 6072, ENSICAEN,

Équipe Image, 6 Bd. Maréchal Juin, F-14050 Caen, France

{olivier.lezoray, abderrahim.elmoataz-billah}@unicaen.fr

**Résumé** – L’extension de la Morphologie Mathématique aux variétés multivariées est toujours un thème de recherche très actif. Dans cet article, nous proposons de construire explicitement des treillis complets par apprentissage en remplaçant chaque élément d’une variété par son rang. Ceci définit une transformée de rang qui correspond à la définition d’un treillis complet. L’apprentissage non-linéaire de variétés et la réduction de données sont les ingrédients de base de notre méthode.

**Abstract** – Extending Mathematical Morphology to multivariate manifolds is still an active research topic. In this paper, we propose to explicitly build complete lattices with machine learning to replace each element of a manifold by its rank. This defines a rank transform that corresponds to the definition of a complete lattice. Learning non-linear varieties and data reduction are the basic ingredients of our method.

## 1 Introduction

La Morphologie Mathématique (MM) est une approche non-linéaire du traitement d’images qui repose sur une structure fondamentale, le treillis complet  $\mathcal{L}$  [6] (un ensemble non vide équipé d’une relation d’ordre totale). Avec la théorie des treillis complets, il est possible de définir des opérateurs morphologiques pour n’importe quel type de données dès qu’un ordre approprié a été défini [1]. Cependant, si la morphologie mathématique est bien définie pour les images binaires et à niveaux de gris, il n’existe pas encore de formalisme général qui permette d’effectuer les opérations morphologiques de base sur des données multivariées vivant sur des variétés. Ceci vient naturellement du fait qu’il n’existe pas d’ordre naturel pour ordonner des vecteurs. Dans ce résumé, nous proposons d’utiliser une transformée de rang à base d’apprentissage de variété pour la création d’un treillis complet. Ceci permet alors l’extension de la MM à toutes données multivariées sur variétés.

## 2 Transformée de rang

Une variété est considérée comme une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  où  $p$  est la dimension des vecteurs vivant sur la variété. Une manière de définir une relation d’ordre entre des vecteurs est d’utiliser une transformation [4]  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , avec  $q \ll p$  suivi d’un ordre lexicographique sur chaque dimension de  $\mathbb{R}^q$ . Alors,  $\forall(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, \mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_j \Leftrightarrow h(\mathbf{x}_i) \leq h(\mathbf{x}_j)$ . À partir de là, il est facile de montrer l’équivalence suivante [3] : (treillis complet sur  $\mathbb{R}^p$ )  $\Leftrightarrow$  (application bijective  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ )  $\Leftrightarrow$  (Transformée de rang sur  $\mathbb{R}^p$ ). Ceci implique que, pour disposer d’un treillis complet, les valeurs des vecteurs ne sont pas importantes mais seulement leur position dans le treillis :

cela correspond à une transformée de rang définie par  $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{N}$ . Les comparaisons d’ordre induites par les opérateurs morphologiques sont effectuées directement sur les rangs et nous obtenons un formalisme général valide pour des données de dimensions arbitraires.

## 3 Morphologie Mathématique sur graphes

Dans ce résumé, nous considérons qu’une variété est modélisée par un graphe. Un graphe est un couple  $G = (V, E)$  où  $V$  est un ensemble fini de noeuds et  $E \subset V \times V$  un ensemble d’arêtes. Deux noeuds  $u$  et  $v$  sont adjacents  $\exists(u, v) \in E$ . Nous noterons  $u \sim v$  l’ensemble des noeuds  $u$  connectés au noeud  $v$  par des arêtes  $(u, v) \in E$ . Un graphe est pondéré si une fonction de poids lui est associée  $k : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  et satisfaisant  $k(u, v) > 0$  si  $(u, v) \in E$ , et  $k(u, v) = 0$  si  $(u, v) \notin E$ . Nous introduisons à présent plusieurs définitions. L’ensemble des voisins  $\mathcal{N}(G, v)$  d’un noeud  $v$  est défini par  $\mathcal{N}(G, v) = \{u \in V : (u, v) \in E\} \cup \{v\}$ . L’ensemble des arêtes  $\mathcal{A}(G, v)$  connectant deux noeuds de  $\mathcal{N}(G, v)$  est défini par  $\mathcal{A}(G, v) = \{(u, w) \in E : u \in \mathcal{N}(G, v), w \in \mathcal{N}(G, v)\}$ . Un élément structurant  $\mathcal{S}(G, v)$  en un noeud  $v$  est le sous-graphe défini par  $\mathcal{S}(G, v) = (\mathcal{N}(G, v), \mathcal{A}(G, v))$ . Des définitions similaires peuvent être trouvées dans [5]. Avec ces définitions, l’érosion  $\epsilon$  d’une fonction  $f$  sur un graphe  $G$  en un noeud  $v$  est défini par

$$\epsilon(G, f, v) = \{f(u) : h(f(u)) = \wedge h(f(w)), w \in \mathcal{N}(G, v)\}.$$

Si l’on compare cette définition avec la définition usuelle d’une érosion, l’élément structurant est directement exprimé par la topologie du graphe et le treillis complet est défini via une transformée de rang. Avec ces définitions, la topologie d’un graphe n’est pas modifiée par une opération morphologique,

seulement les vecteurs associés aux noeuds. Nous pouvons reformuler l'érosion comme une érosion *contractante* qui modifie la topologie du graphe. Pour cela, nous définissons l'érosion en un noeud  $v$  en termes de préservation de noeuds :

$$\epsilon_V(G, f, v) = \{u : h(f(u)) = \wedge h(f(w)), w \in \mathcal{N}(G, v)\}.$$

Ensuite, nous pouvons définir l'érosion de noeuds  $\epsilon_V(G, f)$  et l'érosion d'arêtes  $\epsilon_E(G, f)$  d'un graphe par

$$\epsilon_V(G, f) = V \cap \{\epsilon_V(G, f, v), \forall v \in V\}$$

et

$$\epsilon_E(G, f) = \{(u, v) \in E, u \in \epsilon_V(G, f), v \in \epsilon_V(G, f)\}.$$

Finalement, une érosion *contractante* est une opération qui produit un nouveau graphe  $(\epsilon_V(G, f), \epsilon_E(G, f))$  qui est un sous-graphe de  $G$ . On en déduit des définitions similaires pour la dilatation.

## 4 Apprentissage de treillis complet

Dans les définitions précédentes, le treillis complet est supposé connu et exprimé par la transformée de rang  $h$ . Cependant, la construction d'une telle transformée est un problème difficile. Pour effectuer ceci, nous considérons une méthode d'apprentissage de variété qui permet d'effectuer une réduction de dimension non linéaire. Ceci est équivalent à une transformée de rang lorsque la dimension de l'espace de projection est égal à un. Les méthodes utilisant des graphes ont récemment émergé comme des méthodes très performantes de réduction de dimension non linéaires.

Parmi les méthodes existantes, nous considérons les Laplacian EigenMaps [2]. Soit  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \in \mathbb{R}^p$  un ensemble de  $n$  vecteur initiaux. L'apprentissage de variété a pour objectif de trouver une nouvelle représentation  $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$  avec  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^n$ . À partir d'un graphe de voisinage  $G$  construit à partir des données initiales, une matrice d'adjacence  $W$  est considérée :  $W_{ij} = \exp(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{\sigma^2})$ . Afin d'éviter de fixer empiriquement  $\sigma$ , nous considérons

$$\sigma = \max_{v \in V, u \sim v} \|f(v) - f(u)\|.$$

Ensuite, nous cherchons à minimiser

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} W_{ij} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|_2 = \text{Tr}(\mathbf{Y}^T \Delta \mathbf{Y})$$

avec  $\Delta = D - W$  qui représente le Laplacien non-normalisé ( $D$  est la matrice des degrés). La solution de ce problème de minimisation peut être obtenue en résolvant  $\Delta \mathbf{y} = \lambda \mathbf{D} \mathbf{y}$ . Les vecteurs propres de cette équation correspondant aux plus petites valeurs propres non nulles forment la nouvelle représentation. Pour apprendre un treillis complet à partir d'un apprentissage de variété, un noeud est associé à chaque vecteur d'entrée des données et un graphe de voisinage est construit. Nous pouvons ensuite trier les vecteur initiaux par un ordre lexicographique dans l'espace de projection construit : ceci définit la

transformée de rang. L'apprentissage de variété, bien qu'attractif, est cependant très consommateur de temps pour l'apprentissage d'un treillis complet lorsque les données sont nombreuses car la complexité de l'algorithme est en  $O(n^3)$ . Afin de pallier ceci, nous proposons deux stratégies.

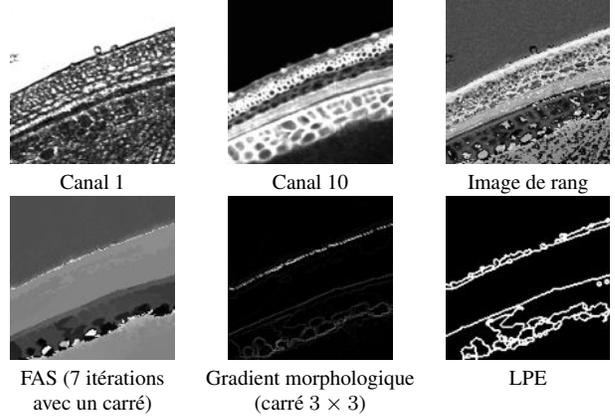


FIGURE 2 – Exemples de traitement avec une transformée de rang obtenue par apprentissage de variété et quantification vectorielle pour une image multispectrale.

### 4.1 Quantification vectorielle

La première stratégie proposée consiste à réduire le volume des données par Quantification Vectorielle (QV). Étant donné un ensemble initial de taille  $n$ ,  $QV : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est appliquée pour produire un dictionnaire  $C : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$  et un encodeur  $I : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{N}$ . Un index  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  peut être déduit de  $D$  et  $I$  en appliquant  $h(x) = I(f(x))$  à chaque vecteur  $f(x) = \mathbf{x}$  de l'ensemble initial. Les données initiales peuvent être reconstruites avec perte à partir de l'index et du dictionnaire par  $C(h(x))$  : les données obtenues sont une approximation des données initiales avec seulement  $2^k$  éléments. Le dictionnaire étant de taille réduite, nous pouvons appliquer un apprentissage de variété sur le graphe complet associé au dictionnaire. Cela permet la construction du treillis complet (l'ordre des éléments du dictionnaire) et définit ainsi la transformée de rang comme la fonction index  $h$  de la QV. On peut ensuite étendre le treillis complet construit à l'ensemble des données initiales par l'extension de Nyström.

### 4.2 Apprentissage d'un treillis complet local

La seconde stratégie consiste à effectuer localement la création du treillis complet local. La transformée de rang est définie alors sur les sous-graphes du graphe initial : les éléments structurants  $\mathcal{S}(G, v)$ . Cela revient à définir la transformée de rang sur un nombre réduit de noeuds du graphe  $\mathcal{N}(G, v)$  et à effectuer l'apprentissage de variété sur  $\{f(u), u \in \mathcal{N}(G, v)\}$ . Avec cette stratégie, le treillis complet n'est pas défini sur l'ensemble des données de la variété mais uniquement sur des sous-variétés. Ceci implique alors que les opérateurs morphologiques

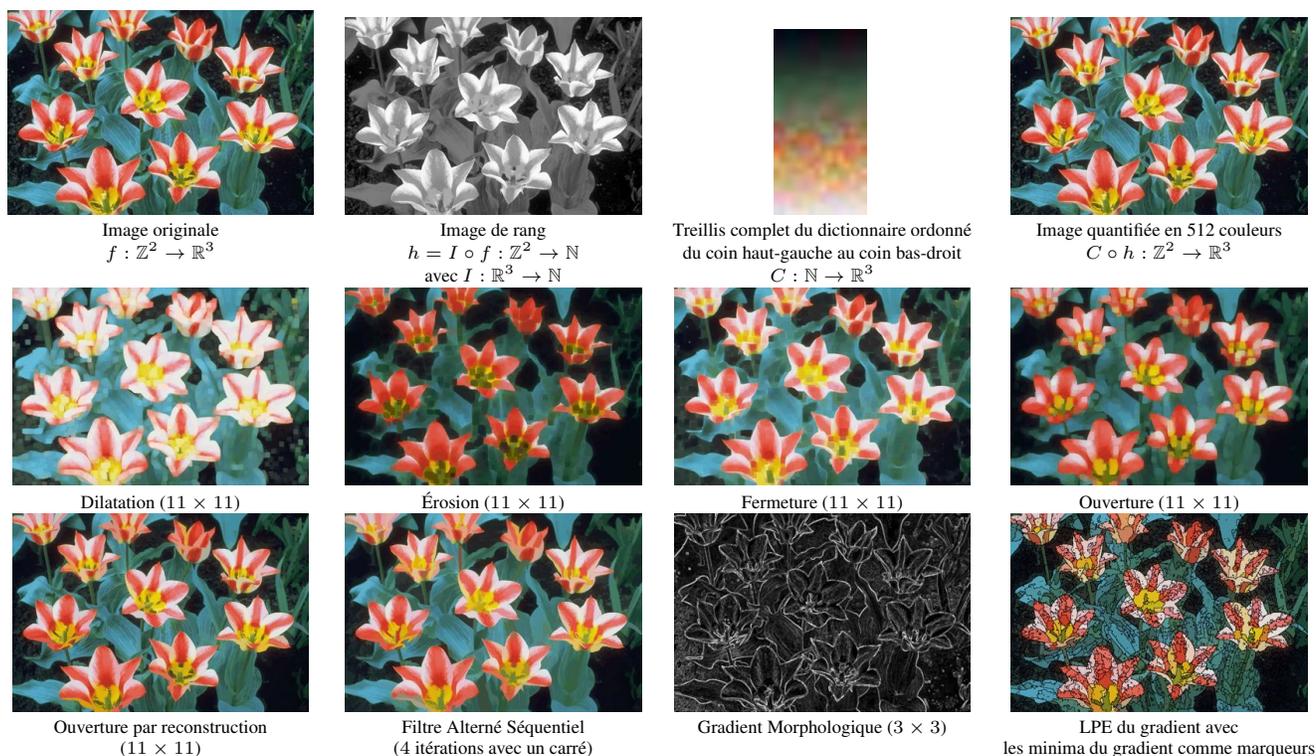


FIGURE 1 – Exemples de traitement avec une transformée de rang obtenue par apprentissage de variété et quantification vectorielle pour une image couleur.

induits sont pseudo-morphologiques.

## 5 Résultats

Nous illustrons les deux stratégies précédentes d'apprentissage de treillis complets. Premièrement, nous considérons l'apprentissage de variété avec QV. La figure 1 présente ce principe sur une image couleur ( $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) représentée par un graphe en  $(k^2 - 1)$ -connexité afin de représenter des éléments structurants de taille  $k \times k$ . L'image est quantifiée en 512 couleurs et le dictionnaire obtenu est réorganisé par apprentissage de variété pour construire un treillis complet sur les 512 couleurs. Une image de rang est alors obtenue en assignant à chaque pixel son rang dans le dictionnaire. Les opérations morphologiques sont effectuées sur l'image de rang et les images couleurs résultantes sont obtenues par reconstruction avec le dictionnaire. La figure 2 présente un exemple de segmentation d'image multispectrale (de 20 canaux) avec un dictionnaire de taille 1024. La segmentation est obtenue par une LPE sur le gradient morphologique d'un Filtre Alterné Séquentiel sur l'image de rang. Deuxièmement, nous illustrons l'utilisation d'un apprentissage de variété local. La figure 3 ce principe pour une base de 99 images ( $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{16 \times 16}$ ). Ici, les éléments structurants sont définis par les relations d'adjacence dans le graphe associé aux données : un graphe des 5 plus proche voisins. Un tel traitement pseudo-morphologique est intéressant pour la simplification de bases de données. De plus, les opérations

contractantes morphologiques permettent de réduire la base de données d'images à ses principaux éléments, ce qui ouvre un nouveau champ d'investigation de la morphologie mathématique. La figure 4 montre un autre exemple sur une base de données.

## Références

- [1] E. Aptoula and S. Lefèvre. A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition*, 40(11) :2914–2929, 2007.
- [2] M. Belkin and P. Niyogi. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation. *Neural Computation*, 15(6) :1373–1396, 2003.
- [3] J. Chanussot and P. Lambert. Total ordering based on space filling curves for multivalued morphology. In *International Symposium on Mathematical Morphology and its Applications*, pages 51–58, 1998.
- [4] J. Goutsias, H.J.A.M. Heijmans, and K. Sivakumar. Morphological operators for image sequences. *Computer Vision and Image Understanding*, 62(3) :326–346, 1995.
- [5] H. Heijmans, P. Nacken, A. Toet, and L. Vincent. Graph morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 3(1) :24–38, 1992.
- [6] C. Ronse. Why mathematical morphology needs complete lattices. *Signal Processing*, 21(2) :129–154, 1990.

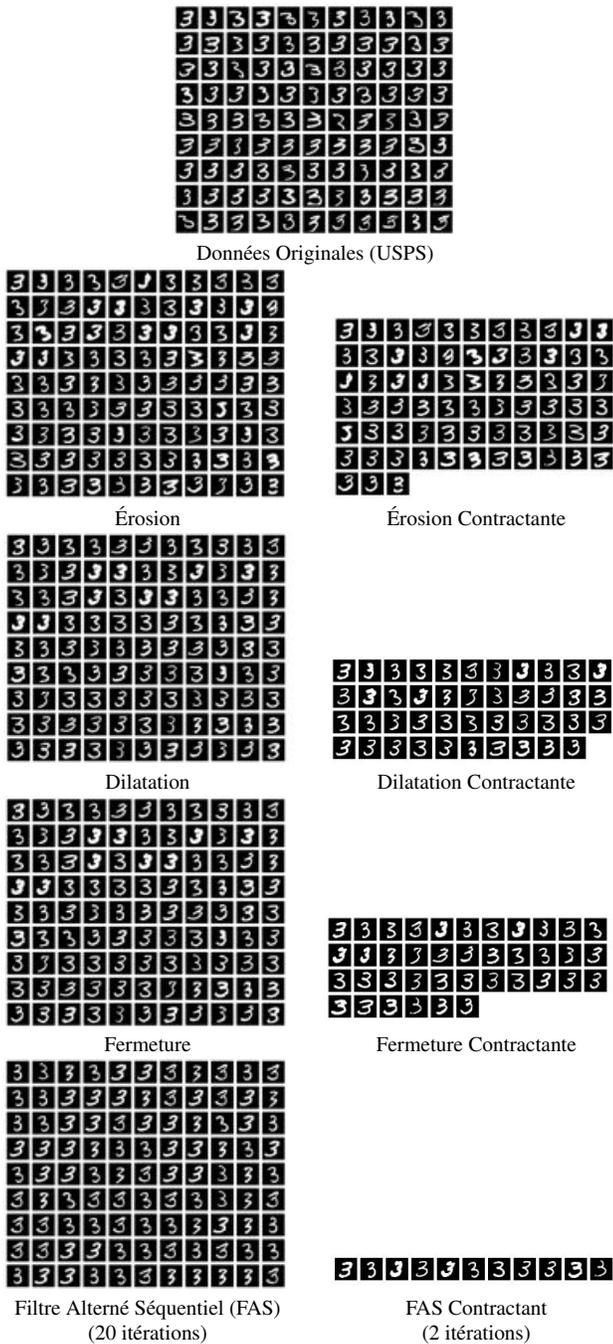
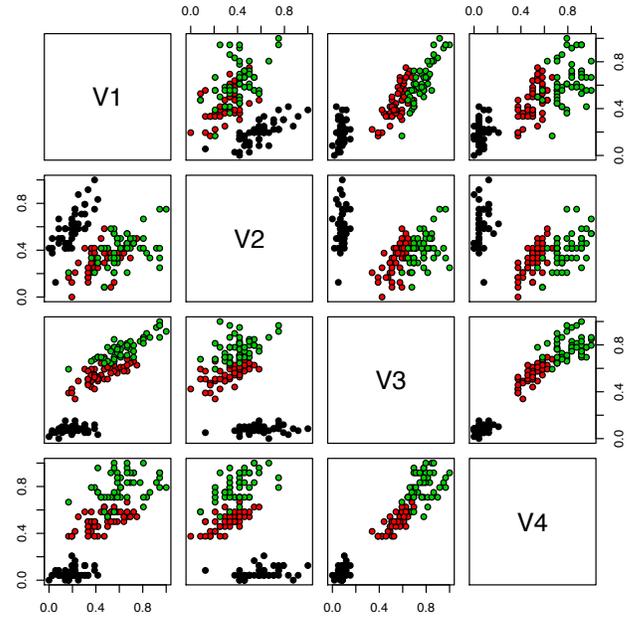
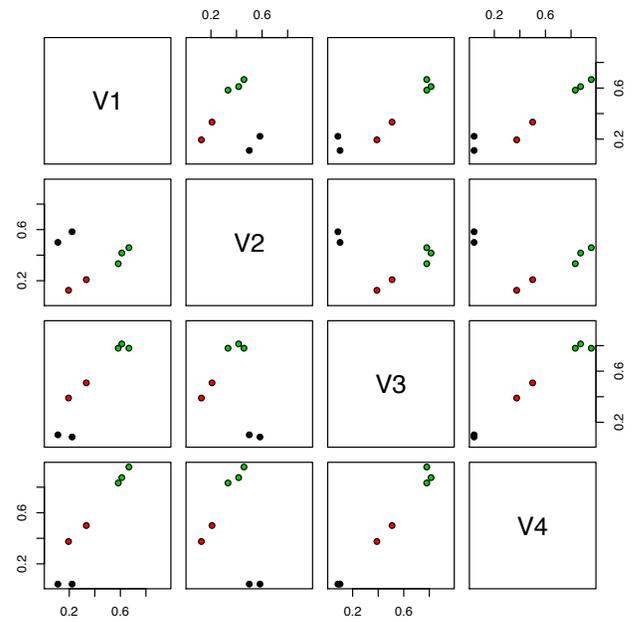


FIGURE 3 – Exemples de traitement d’une base de données d’images avec un apprentissage de treillis complet local. Un 5-kppv est associé aux données initiales.



Données initiales : Iris



Deux ouvertures contractantes  $\gamma_C(\gamma_C)$

FIGURE 4 – Traitement morphologique d’une base de données avec un apprentissage de treillis complet local. Un 20-kppv est associé aux données initiales.