

# Mise en œuvre du signal analytique dans les algèbres de Clifford

PHILIPPE DELACHARTRE, PATRICK CLARYSSE, ROBERT GOUTTE, PATRICK R. GIRARD

Université de Lyon, CREATIS ; CNRS UMR5220 ; Inserm U1044 ; INSA-Lyon ; Université Lyon 1 ; France

prenom.nom@creatis.insa-lyon.fr

**Résumé** - Nous traitons ici de la formulation du signal analytique 2D quaternionique et de sa mise en œuvre dans le cadre de l'algèbre de Clifford. Nous proposons une réalisation basée sur une modélisation cliffordienne quaternionique du signal analytique. Cette démarche peut être directement étendue à des dimensions supérieures dans une algèbre de Clifford multiquaternionique. Nous montrons un exemple de résultat de signal analytique cliffordien 2D et d'extraction de ses phases dans une application liée à l'imagerie médicale.

**Abstract** - In recent years, new mathematical tools based on Clifford algebras have been developed for modeling and imaging. Whereas other developments have privileged a geometric approach, the paper presents an algebraic multiquaternion formulation of Clifford algebras. Clifford algebras allow the definition of Clifford Fourier transforms and the introduction of analytic signals in  $n$  dimensions. The paper focuses on the 2D analytic signal, using quaternion Fourier transforms and gives concrete implementations of quaternion Fourier spectra, quaternion analytic images, as well as quaternion fusion of images.

## 1 Introduction

Ces dernières années, de nouveaux outils mathématiques fondés sur les algèbres de Clifford ont été développés pour la modélisation et l'imagerie [1, 2, 3]. Beaucoup de ces développements ont privilégié une approche géométrique [4, 5], tandis que nous proposons une approche algébrique multiquaternionique [6, 7] permettant une mise en œuvre numérique immédiate de l'algèbre de Clifford [8].

Ce travail se concentre sur le signal analytique 2D cliffordien utilisant la transformée de Fourier quaternionique. La mise en œuvre du calcul de ce signal analytique et de l'extraction des phases est réalisée dans cette étude. Nous proposons un cadre général en adoptant une formulation cliffordienne multiquaternionique du signal analytique. Cette approche permet une généralisation du signal analytique à  $n$  dimensions, dont l'article illustre le cas 2D avec un exemple d'application à l'imagerie médicale.

## 2 Algèbre de Clifford multiquaternionique

### 2.1 Définition

Une algèbre de Clifford  $C^n$  est une algèbre composée de  $n$  générateurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$  suivant la règle de multiplication  $e_i e_j = -e_j e_i$  ( $i \neq j$ ) et tels que  $e_i^2 = \pm 1$ . L'algèbre de Clifford  $C^n$  contient  $2^n$  éléments constitué des  $n$  générateurs, des produits  $e_i e_j, e_i e_j e_k, \dots$  et de l'élément unité 1.

### 2.2 Signal analytique n-D

On note  $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$  la transformée de Fourier cliffordienne n-D [1, 11] d'un signal réel  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \prod_{k=1}^n e^{-e_k 2\pi u_k x_k} d^n x \quad (1)$$

Le signal analytique  $f_A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est défini respectivement en fréquence et dans l'espace par les relations (2) et (3) :

$$F_A(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{k=1}^n [1 + \text{sgn}(u_k)] \times F(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2)$$

$$f_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) * \prod_{k=1}^n \left[ \delta(x_k) + \frac{e_k}{\pi x_k} \right] \quad (3)$$

où le produit de convolution n-D est noté  $*$ , la

partie scalaire de  $f_A$  donne le signal n-D de départ. Par conséquent, seule l'information contenue dans un orthant sur  $2^n$  orthants de l'espace de Fourier est nécessaire.

### 3 Signal analytique de Clifford 2D : mise en œuvre

La notion de signal analytique introduite par D. Gabor [9] et J. Ville [10] en 1948 peut être présentée

dans le cadre des algèbres de Clifford. En 2D, la notion de signal analytique peut être étendue de plusieurs manières [11, 12, 13]. Dans le cadre de l'algèbre de Clifford quaternionique  $\mathbb{H}$  et des générateurs  $(e_1 = i; e_2 = j; e_1 e_2 = k)$ , un élément s'exprime par  $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ , son conjugué par  $q_c = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ , un vecteur par  $X = iq_1 + jq_2$  avec  $XX_c = -X^2 = (q_1)^2 + (q_2)^2$ , un bivecteur par  $B = kq_3$ , et un scalaire par  $q_0$ .

On définit le vecteur unitaire  $a = ia_1 + ja_2$  ( $aa_c = 1$ ) et son dual  $a^* = ka$  ( $a_c^* = a_c k_c = ak$ ). La symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par l'origine O et perpendiculaire au vecteur unitaire  $a$  appliquée au vecteur  $X$  donne le vecteur  $X' = \frac{aXa}{aa_c} = aXa$  [7], appliquée au bivecteur  $B = X \wedge Y = -\frac{1}{2}(XY - YX)$  donne  $B' = -aBa$  et le scalaire est invariant (Figure 1).

La symétrie orthogonale appliquée au quaternion  $q$  donne  $q' = a^* q a_c^*$ . Cette expression permet de déduire les formules d'involution. En particulier, si  $a = i$  (symétrie orthogonale par rapport à  $Ox_2$ ), on a :

$$\begin{aligned} q' &= K_1(q) = i^* q_i^* = k i q i k \\ &= -j q j = q_0 - iq_1 + jq_2 - kq_3 \end{aligned} \quad (4)$$

où  $K_1(q)$  est une involution de  $q$ . De même, si  $a = j$  (symétrie orthogonale par rapport à  $Ox_1$ ), on a :

$$\begin{aligned} q' &= K_2(q) = j^* q_j^* = k j q j k \\ &= -i q i = q_0 + iq_1 - jq_2 - kq_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Une combinaison des deux symétries orthogonales ( $i \rightarrow -i, j \rightarrow -j$ ) conduit à une rotation de  $\pi$  autour de l'origine

$$\begin{aligned} q' &= K_{12}(q) = i j q j i = -k q k \\ &= q_0 - iq_1 - jq_2 + kq_3 \end{aligned} \quad (6)$$

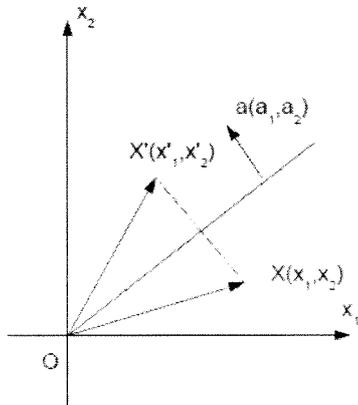


Figure 1 : symétrie orthogonale

Ces involutions sont centrales pour la compréhension du signal analytique cliffordien et de la transformée de

Fourier quaternionique (TFQ). Nous partons ici de la définition [2, 14]

$$F(u_1, u_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i2\pi u_1 x_1} f(x_1, x_2) e^{-j2\pi u_2 x_2} dx_1 dx_2 \quad (7)$$

où  $f(x_1, x_2)$  et  $F(u_1, u_2)$  sont des fonctions respectivement scalaire et quaternionique.

A partir de la définition de la TFQ et des propriétés de symétrie orthogonale, il s'en suit qu'un seul quadrant du plan de Fourier est nécessaire puisque (Figure 2) :

$$F(-u_1, u_2) = K_1[F(u_1, u_2)] = -jF(u_1, u_2)j \quad (8)$$

$$F(u_1, -u_2) = K_2[F(u_1, u_2)] = -iF(u_1, u_2)i \quad (9)$$

$$F(-u_1, -u_2) = K_{12}[F(u_1, u_2)] = -kF(u_1, u_2)k \quad (10)$$

Donc la TFQ analytique est définie par  $F_A(u_1, u_2) = [1 + \text{sgn}(u_1)][1 + \text{sgn}(u_2)]F(u_1, u_2)$  et le signal analytique par :

$$f_A(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i2\pi u_1 x_1} F_A(u_1, u_2) e^{j2\pi u_2 x_2} du_1 du_2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= f(x_1, x_2) + ih_1(x_1, x_2) \\ &\quad + jh_2(x_1, x_2) + kh(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (12)$$

où  $h_1(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) *_{x_1, x_2} \frac{\delta(x_2)}{\pi x_1}$  et

$h_2(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) *_{x_1, x_2} \frac{\delta(x_1)}{\pi x_2}$  sont les transformées

de Hilbert partielles et  $h(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) *_{x_1, x_2} \frac{1}{\pi^2 x_1 x_2}$

la transformée de Hilbert totale [2].

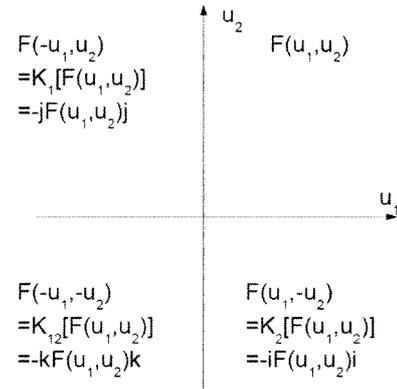


Figure 2 : propriétés de symétrie du spectre quaternionique. Un seul quadrant est nécessaire pour retrouver le signal réel de départ.

D'un point de vue pratique, le calcul du signal analytique est réalisé à partir de la relation (11). Pour le calcul numérique de la TFQ directe, on procède en cascade en intégrant d'abord selon  $x_1$  à l'aide d'une transformée de Fourier rapide (FFT) 1D. Puis une autre FFT est appliquée (selon  $x_2$ ) à chaque composante réelle des coefficients complexes précédents et les

quatre composantes réelles résultantes constituent les quatre composantes du quaternion (spectre quaternionique). Le détail du calcul est décrit dans le tableau 1. Pour la TFQ inverse, on procède de la même façon sur chaque composante réelle du spectre quaternionique.

**Tab 1 : schéma de calcul de la TFQ directe avec une entrée quaternionique (pour la TFQ inverse, les formules sont identiques mais la FFT est remplacée par une IFFT)**

TFQ de $f(x_1, x_2) = a(x_1, x_2) + ib(x_1, x_2) + jc(x_1, x_2) + kd(x_1, x_2)$				
composantes	$a(x_1, x_2)$	$ib(x_1, x_2)$	$jc(x_1, x_2)$	$kd(x_1, x_2)$
FFT sur $x_1$	$a_1 + ia_2$	$i(b_1 + ib_2)$	$j(c_1 + ic_2)$	$k(d_1 + id_2)$
FFT sur $x_2$	$(a_{1\alpha} + ja_{1\beta})$ $+(a_{2\alpha} + ja_{2\beta})$	$i(b_{1\alpha} + jb_{1\beta})$ $-(b_{2\alpha} + jb_{2\beta})$	$j(c_{1\alpha} + jc_{1\beta})$ $+k(c_{2\alpha} + jc_{2\beta})$	$k(d_{1\alpha} + jd_{1\beta})$ $-j(d_{2\alpha} + jd_{2\beta})$
TFQ = $(a_{1\alpha} - b_{2\alpha} - c_{1\beta} + d_{2\beta}) + i(a_{2\alpha} + b_{1\alpha} - c_{2\beta} + d_{1\beta})$ $+j(a_{1\beta} - b_{2\beta} + c_{1\alpha} - d_{2\alpha}) + k(a_{2\beta} + b_{1\beta} + c_{2\alpha} + d_{1\alpha})$				

Le signal analytique étant un quaternion, il est représenté sous la forme  $q = |q|e^{i\alpha}e^{j\beta}e^{k\gamma}$  avec le module  $|q|$  et le triplet de phase  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

$$|q| = \sqrt{qq_c}$$

$$= \sqrt{f(x_1, x_2)^2 + h_1(x_1, x_2)^2 + h_2(x_1, x_2)^2 + h_3(x_1, x_2)^2} \quad (13)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cup [-\pi, \pi[$$

Ce triplet de phase n'est pas unique. Par rapport à [2] les sauts de phase sont reportés sur  $\gamma$ . Le tableau 2 donne des exemples de signaux analytiques calculés à partir de l'équation (11).

**Tab 2 : exemples de signaux analytiques**

fonction $f(x_1, x_2)$	signal analytique $f_A(x_1, x_2)$
$\cos(x_1)\cos(x_2)$	$e^{ix_1}e^{jx_2}$
$\sin(x_1)\sin(x_2)$	$e^{ix_1}(k)e^{jx_2}$
$\sin(x_1)\cos(x_2)$	$e^{ix_1}(-i)e^{jx_2}$
$\cos(x_1)\sin(x_2)$	$e^{ix_1}(-j)e^{jx_2}$

## 4 Résultats

Deux exemples d'utilisation du signal analytique de Clifford sont proposés dans cette partie.

### 4.1 Exemple introductif

On considère le cas élémentaire d'un signal 2D  $f(x, t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)$  avec  $\omega$  la pulsation et  $k$  le nombre d'onde. On obtient par l'équation (11) ou à l'aide du tableau 2, le signal analytique :

$$f_A(x, t) = \begin{bmatrix} 2\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) & 2\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) \\ -2\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) & 2\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) \end{bmatrix}$$

avec  $\phi_1 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t - \frac{k_2 + k_1}{2}x$ ,  $\phi_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x$ , duquel en appliquant la conjugaison quaternionique

$$d = f_A f_{Ac} = \begin{bmatrix} 8\cos^2(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et en notant } d[1] \text{ la 1ère}$$

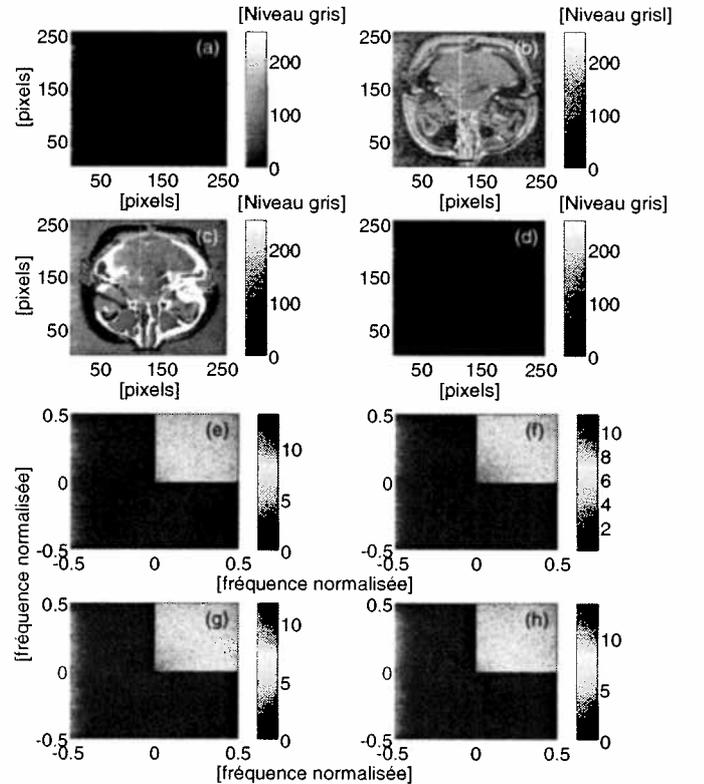
composante du quaternion, on a  $\phi_2 = \frac{1}{2} \text{Arc cos}\left(\frac{d[1]}{4} - 1\right)$ . On peut extraire les paramètres physiques contenus dans le signal analytique tels que :

la vitesse de groupe  $v_g = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x}$  et la vitesse de phase

$$v_\phi = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \text{ avec } \phi_1 = \text{Arc tan} \frac{f_A[2]}{f_A[1]}.$$

### 4.2 Exemple d'application à l'imagerie médicale

On considère deux images réelles  $a$  et  $b$  (figure 3 b et c) correspondant à la même coupe anatomique mais, issues de deux modalités différentes (IRM et CT). On propose ici un exemple de combinaison de spectres. Cette approche a pour objectif d'obtenir une image fusionnant les caractéristiques issues des deux modalités d'images. A partir de ces deux images, on construit l'image quaternionique d'entrée  $A = 0 + ai + bj + 0$  dont les 4 composantes sont présentées sur la figure 3 (a, b, c, d).



**Figure 3 : les 4 composantes de l'image quaternionique A (a, b, c, d) et le spectre de l'image A après conservation du 1<sup>er</sup> quadrant (e, f, g, h).**

Le spectre quaternionique  $Q_A$  obtenu par la TFQ du quaternion d'entrée  $A$  représente une combinaison des spectres quaternioniques  $Q_a$  et  $Q_b$  des images réelles  $a$  et  $b$  telle que  $Q_A = Q_a + Q_b$ . La TFQ inverse est appliquée au 1<sup>er</sup> quadrant du spectre combiné  $Q_A$  dont les 4 composantes sont représentées sur la figure 3 (e, f, g, h). Les TFQ directe et inverse ont été obtenues selon le schéma de calcul proposé dans le tableau 1. Ainsi, on obtient dans l'espace image, une image quaternionique  $f_A$ . Cette image, est selon (11) égale à  $if_a + jf_b$  avec respectivement  $f_a$  le signal analytique de  $a$  et  $f_b$  le signal analytique de  $b$ . L'expression du signal analytique combiné écrit sous forme polaire donne :

$$f_A = r_a e^{i(\alpha_a + \pi/2)} e^{j\beta_a} e^{k\gamma_a} + r_b e^{-i\alpha_b} e^{j(\beta_b + \pi/2)} e^{-k\gamma_b}$$

$$= r_A e^{i\alpha_A} e^{j\beta_A} e^{k\gamma_A}, \text{ avec } f_a = r_a e^{i\alpha_a} e^{j\beta_a} e^{k\gamma_a} \text{ et de même pour } f_b.$$

Les 4 composantes (1, i, j, k) de l'image quaternionique  $f_A$ , ainsi que son module et ses 3 phases ( $\alpha_A, \beta_A, \gamma_A$ ) sont représentés figure 4 (a, b, c, d, e, f, g, h).

## 5 Conclusion

Ces dernières années, de nouveaux outils mathématiques fondés sur les algèbres de Clifford ont été développés pour la modélisation et l'imagerie. Beaucoup de ces développements ont privilégié une approche géométrique, tandis que nous proposons une approche algébrique multiquaternionique permettant une mise en œuvre numérique immédiate de l'algèbre de Clifford. Cette étude a proposé une réalisation dans les algèbres de Clifford du signal analytique 2D et de l'extraction de ses phases. La méthode utilisée ici en deux dimensions peut être étendue de manière directe en trois dimensions (2D+t) en utilisant des biquaternions ou en quatre dimensions (3D+t) en utilisant des tétraquaternions.

## 6 Bibliographie

- [1] F. Brackx, N. de Schepper, F. Sommen, The Two-Dimensional Clifford Fourier Transform, *J. Math Imaging*, 26, pp. 5-18, 2006.
- [2] G. Sommer, Geometric computing with Clifford Algebras, Theoretical Foundations and applications, ed. in *Computer Vision and Robotics*, Springer, Berlin, 2001, 569 pages.
- [3] S. C. Pei, J. J. Ding, J. H. Chang, Efficient Implementation of quaternion Fourier Transform, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, pp. 2783-2797, Nov. 2001.
- [4] C. Doran, A. Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 578 pages.
- [5] J. Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*, Springer, London, 2008, 252 pages.
- [6] P. R. Girard, *Quaternions, Algèbre de Clifford et Physique Relativiste*, PPUR, Lausanne, 2004, 165 pages.
- [7] P. R. Girard, *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*, Birkhäuser, Basel, 2007, 179 pages.
- [8] P. R. Girard, Quaternion Grassmann-Hamilton-Clifford algebras: new mathematical tools for classical and relativistic modeling. In O. Dössel and W. C. Schlegel (Eds.), W.C. 2009, *IFMBE Proceedings*, vol 25/IV, pp. 65-68, 2009.

- [9] D. Gabor, Theory of Communications, *Inst. Elec. Eng.*, London, vol. 3 pp. 429-457, 1946.
- [10] J. Ville, Théorie et application de la notion de signal analytique, *Câbles et Transmission*, vol. 2A, pp. 61-74, 1948.
- [11] T. Bülow and G. Sommer, Hypercomplex signal. A Novel Extension of the Analytic Signal to the Multidimensional Case, *IEEE Trans. on signal processing*, vol. 49, no. 11, pp. 2844-2852, Nov 2001.
- [12] J. P. Havlicek, J. W. Havlicek, A. C. Bovik, The Analytic Image, *Proc. ICIP 97*, vol. 2, pp. 446-449, 1997.
- [13] S. L. Hahn, Multidimensional Complex Signals with Single-Orthant Spectra, *Proceedings of IEEE*, vol. 80, no. 8, pp. 1287-1300, 1992.
- [14] E. Hitzer, Quaternion Fourier Transform on Quaternion Fields and Generalizations, *Adv. in App. Cli. Alg.*, 17, pp. 497-517, 2007.

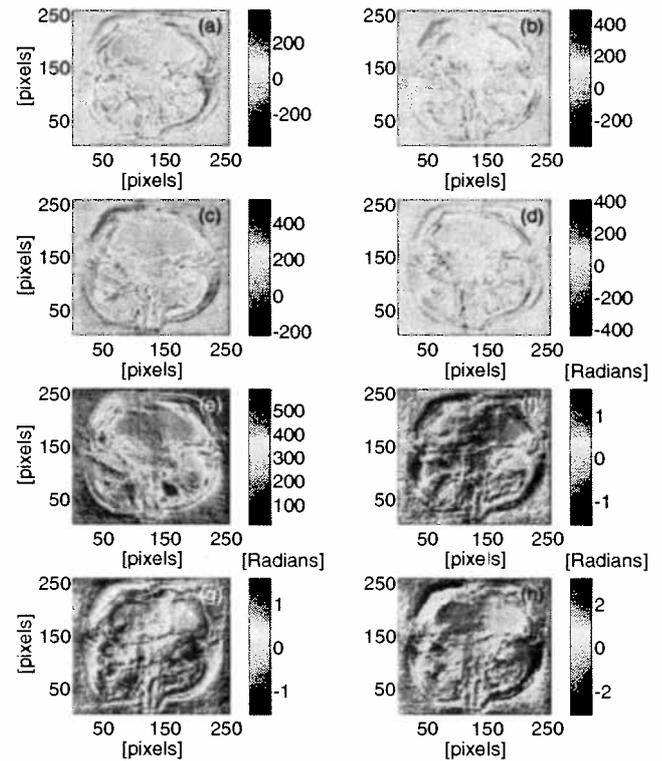


Figure 4 : les 4 composantes de l'image quaternionique  $f_A$  (a, b, c, d) et le module et les 3 phases (e, f, g, h).