

Expression explicite d'un filtre linéaire en fonction de ses coefficients de reflexion et applications

Messaoud BENIDIR¹

¹Université de Paris-Sud-11, Laboratoire des Signaux et Systèmes
Supélec, 91192 Gif-sur-Yvette, France
messaoud.benidir@lss.supelec.fr

Résumé – Cet article approfondit des connaissances théoriques actuelles sur la correspondance qui permet de passer des coefficients d'un filtre polynômial (AR ou MA) aux coefficients définissant la représentation en treillis de ce dernier. Cette étude permet, en particulier, d'établir des propriétés topologiques et géométriques du domaine de stabilité des filtres polynômiaux.

Abstract – This paper investigates the theoretical knowledge of the application associating to a polynomial linear filter coefficients (AR or MA), the coefficients appearing in the lattice representation of this filter. This study allows, in particular, to establish topological and geometrical properties of the stability domain of polynomial filters.

1 Introduction

Un filtre autorégressif ou à moyenne ajustée est complètement déterminé par un polynôme qui caractérise sa fonction de transfert. Dans la suite, nous identifions un tel filtre et le polynôme associé supposé unitaire et mis sous la forme :

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n. \quad (1)$$

Nous identifions également le polynôme P_n et la matrice colonne de ses coefficients

$$\underline{a} = [a_1, \dots, a_n]^t \in \mathbb{C}^n.$$

On sait que l'algorithme de Levinson [1] [2] [4] [5] [6] [7] permet d'associer, à tout vecteur $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)^t$, un polynôme complexe unitaire unique P_n défini par (1) en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$P_{m+1}(z) = zP_m(z) + k_{m+1}P_m^*(z) \quad (2)$$

où $P_m^*(z) = z^m \overline{P}_m(1/z)$ et \overline{P}_m désigne le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de P_m sans conjuguer la variable z . La récurrence est initialisée avec $m = 0$, $P_0 = P_0^* = 1$ et s'arrête pour $m = n - 1$.

Le vecteur \underline{k}_n est une *représentation en treillis* de P_n et les coefficients k_i sont les *coefficients de reflexion* associés à cette représentation. La relation (2) permet ainsi de construire récursivement [4] l'application \mathcal{T}_n de \mathbb{C}^n dans lui-même définie par:

$$\mathcal{T}_n : \underline{k} \in \mathbb{C}_k^n \rightarrow \mathcal{T}_n(\underline{k}) \triangleq \underline{a} \in \mathbb{C}_a^n \quad (3)$$

où les notations \mathbb{C}_k^n et \mathbb{C}_a^n désignent les espaces affines de dimension n définis sur le corps des complexes dont les points ont pour coordonnées respectivement \underline{k} et \underline{a} .

2 Expression de l'application \mathcal{T}_n

A titre d'exemple, on obtient pour $n = 2$ et $n = 3$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \bar{k}_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \underline{k} \in \mathbb{C}^2 \quad (4)$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \bar{k}_1 + k_3 \bar{k}_2 \\ k_2 + k_3 \bar{k}_1 + k_3 \bar{k}_2 k_1 \\ k_3 \end{pmatrix}, \underline{k} \in \mathbb{C}^3. \quad (5)$$

Les expressions (5) déterminent complètement \mathcal{T}_3 et sont obtenues récursivement à l'aide de (2). Elles permettent, par exemple, d'obtenir une expression explicite de $\mathcal{T}_3(\underline{k}_3) = P_3$, en fonction des coefficients k_i sous la forme:

$$P_3(z) = z^3 + [k_1 + k_2 \bar{k}_1 + k_3 \bar{k}_2]z^2 + [k_2 + k_3 \bar{k}_1 + k_3 \bar{k}_2 k_1]z + k_3. \quad (6)$$

Quelques propriétés structurelles de \mathcal{T}_n , c'est-à-dire des coefficients a_i en tant que fonctions des k_i , peuvent être obtenues sans difficulté en utilisant des raisonnements par récurrence sur n . Par exemple, dans le cas réel, la relation (2) montre que chaque a_i est une fonction polynomiale dont les indéterminées sont les k_i . Le degré total est inférieur ou égal à n et le degré partiel par rapport à chacun des k_i vaut soit 0, soit 1.

L'application (3) n'est ni injective ni surjective [4] et une expression explicite de cette application, établie récemment dans [1], permet de compléter les connaissances sur la représentation en treillis des filtres et sur leur stabilité. L'objectif principal de ce papier est d'apporter des compléments au résultat établi dans [1] et de faire une étude générale du domaine de stabilité des filtres réels en détaillant particulièrement les cas \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . Pour ce faire, introduisons pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ les fonctions définies comme

suit :

$$\begin{aligned} G_n^0(z) &= z^n \\ G_n^p(z) &= 0 \quad \text{pour } p > n \\ &= \sum_{n \geq i_1 > \dots > i_p \geq 1} \frac{k_{i_1} \bar{k}_{i_2} k_{i_3} \bar{k}_{i_4} \dots k_{i_p}^*}{z^{-n-e(i_1, \dots, i_p)}} \\ &\quad \text{pour } 1 \leq p \leq n \end{aligned} \quad (7)$$

où

$$\begin{aligned} k_{i_p}^* &= k_{i_p} \text{ si } p \text{ est impair et } k_{i_p}^* = \bar{k}_{i_p} \text{ si } p \text{ est pair} \\ e(i_1, \dots, i_p) &\triangleq \sum_{k=1}^p (-1)^k i_k \end{aligned}$$

et la somme est prise sur l'ensemble

$$\{(i_1, \dots, i_p) \text{ tel que } n \geq i_1 > i_2 > \dots > i_p \geq 1\}.$$

Exemple 2.1 Pour $n = 3$: on obtient $G_3^0(z) = z^3$ et

$$\begin{aligned} G_3^1(z) &= \sum_{3 \geq i_1 \geq 1} k_{i_1} z^{3+e(i_1)} \\ &= k_1 z^2 + k_2 z + k_3 \\ G_3^2(z) &= \sum_{3 \geq i_1 > i_2 \geq 1} k_{i_1} \bar{k}_{i_2} z^{3+e(i_1, i_2)} \\ &= [k_2 \bar{k}_1 + k_3 \bar{k}_2] z^2 + k_3 \bar{k}_1 z \\ G_3^3(z) &= \sum_{3 \geq i_1 > i_2 > i_3 \geq 1} k_{i_1} \bar{k}_{i_2} k_{i_3} z^{3+e(i_1, i_2, i_3)} \\ &= k_3 \bar{k}_2 k_1 z. \end{aligned}$$

On peut remarquer que, pour z fixé, chaque fonction G_n^p définit un polynôme à coefficients dans $\{0, 1\}$ des variables $k_1, \bar{k}_1, k_2, \bar{k}_2, \dots, k_p, \bar{k}_p$, homogène de degré total p et de degré 0 ou 1 par rapport à chacune de ces variables. Le nombre de termes dans la somme définissant G_n^p est égal à C_n^p . En particulier, G_n^n se réduit au monome suivant, obtenu pour $(i_1, \dots, i_n) = (n, n-1, \dots, 1)$:

$$G_n^n(z) = k_n \bar{k}_{n-1} k_{n-2} \bar{k}_{n-3} \dots k_1^* z^{n+e(n, \dots, 1)}$$

avec $n + e(n, \dots, 1) = n + \sum_{k=1}^n (-1)^k (n+1-k) =$ partie entière de $(n+1)/2$.

Proposition 2.1 Les G_n^p sont des polynômes qui satisfont la relation de récurrence suivante pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$:

$$G_{n+1}^{p+1}(z) = z G_n^{p+1}(z) + k_{n+1} G_n^p(z)^* \quad (8)$$

où $G_n^p(z)^* = z^n \bar{G}_n^p(z^{-1})$ pour $0 \leq p \leq n$, et on a :

$$P_n(z) = \sum_{p=0}^n G_n^p(z). \quad (9)$$

La relation (9) peut être vérifiée pour $n = 3$ en utilisant l'expression (6) de P_3 . On obtient :

$$\begin{aligned} P_3(z) &= \sum_{p=0}^3 G_3^p(z) = z^3 + [k_1 z^2 + k_2 z + k_3] \\ &+ [k_2 \bar{k}_1 + k_3 \bar{k}_2] z^2 + k_3 \bar{k}_1 z + k_3 \bar{k}_2 k_1 z \\ &= z^3 + [k_1 + k_2 \bar{k}_1 + k_3 \bar{k}_2] z^2 \\ &+ [k_2 + k_3 \bar{k}_1 + k_3 \bar{k}_2 k_1] z + k_3 \end{aligned}$$

La démonstration de la proposition ci-dessus peut être obtenue en suivant une démarche similaire à celle proposée dans [1]. L'expression (9) permet d'établir des résultats utiles dans des applications telles que la synthèse des filtres et l'analyse spectrale [5] [6] [7]. A titre d'exemple, considérons un filtre d'ordre $n = 3$ défini par $k_1 = k_2 = k_3 = 0.1$. L'approximation de ce filtre $P_3(z) = \sum_{p=0}^3 G_3^p(z) = z^3 + 0.12z^2 + 0.111z + 0.1$, à l'aide des seuls termes G_3^0, G_3^1, G_3^2 sans prendre en compte $G_3^3 = \bar{k}_3 k_2 \bar{k}_1 z^2$ est donnée par

$$\hat{P}_3(z) = \sum_{p=0}^2 G_3^p(z) = z^3 + 0.12z^2 + 0.11z + 0.1.$$

Dans cette approximation, seul le coefficient de z a été affecté et la différence est de l'ordre d'un millième.

3 Inversion de \mathcal{T}_n et stabilité

3.1 Algorithme de Schur-Cohn

L'inversion de \mathcal{T}_n consiste à déterminer \underline{k} à partir d'un vecteur donné \underline{a} identifié au polynôme P_n . Cette inversion peut être obtenue de manière récursive en utilisant (2). En effet, P_m et P_{m+1} vérifient (2) si, et seulement si, ils vérifient la récurrence :

$$(1 - |k_{m+1}|^2) z P_m(z) = P_{m+1}(z) + k_{m+1} P_{m+1}^*(z). \quad (10)$$

Cette relation permet de déterminer $k_{m+1} = -\frac{P_{m+1}(0)}{P_{m+1}^*(0)}$ à partir de P_{m+1} . Ce coefficient existe toujours et il est unique puisque $P_{m+1}^*(0) = 1$. La détermination de P_m à partir de P_{m+1} se fait ensuite en utilisant (10) et en distinguant les trois cas suivants.

1. Si $|k_{m+1}| \neq 1$, alors P_m existe et il est unique.
2. Si $|k_{m+1}| = 1$ et $P_{m+1} + k_{m+1} P_{m+1}^* = 0$, alors P_m existe et il est n'est pas unique.
3. Si $|k_{m+1}| = 1$ et $P_{m+1}(z) + k_{m+1} P_{m+1}^*(z) \neq 0$, alors P_m n'existe pas.

On obtient ainsi l'algorithme suivant, dénommé algorithme de *Schur-Cohn* (S.C), qui permet de déterminer l'image inverse, $\mathcal{T}_n^{-1}(\underline{a})$, d'un vecteur quelconque \underline{a}

Algorithme S.C : C.I. P_n donné. Pour $m = n, n-1, \dots$,

$$zQ(z) \triangleq P_m(z) + k_m P_m^*(z), \quad k_m = -P_m(0)/P_m^*(0).$$

$$\text{Si } |k_m| \neq 1 \text{ Prendre } P_{m-1} \triangleq Q \quad (11)$$

$$= 1 \text{ et } Q = 0, \text{ Prendre } P_{m-1} \triangleq P'_m \quad (12)$$

$$= 1 \text{ et } Q \neq 0, \text{ Fin.} \quad (13)$$

Les polynômes P_m intervenant dans cet algorithme ne sont pas unitaires et on peut à chaque étape remplacer P_m par αP_m , $\alpha \in \mathbb{C}$. En effet, cette opération réduit le nombre d'opérations sans changer la valeur des k_m .

Proposition 3.1 L'algorithme S.C permet toujours de déterminer à partir de P_n une suite unique $k_m \triangleq -P_m(0)/P_m^*(0)$, $m = n, n-1, \dots, \ell$ où k_ℓ désigne le premier coefficient de module 1. On a alors les trois situations suivantes.

1. $\mathcal{T}_n^{-1}(\underline{a})$ se réduit à un seul élément \underline{k}_n si, et seulement si, $\ell = 1$ et $|k_i| \neq 1$ pour $1 \leq i \leq n$.

2. $\mathcal{T}_n^{-1}(\underline{a})$ contient une infinité d'éléments si, et seulement si, $\ell = 1$ et il existe au moins un indice $j > 1$ tel que $|k_j| = 1$.
3. $\mathcal{T}_n^{-1}(\underline{a})$ est vide si, et seulement si, $\ell \neq 1$.

Désignons par $I_n = \{1, \dots, n\}$, par $A \subset I_n$ un sous-ensemble quelconque de I_n et introduisons les sous-ensembles de \mathbb{C}^n suivants :

$$\mathbb{D}^A(\underline{k}) = \left\{ \underline{k} \in \mathbb{C}^n : \forall i \begin{pmatrix} |k_i| > 1 & \text{si } i \in A \\ |k_i| < 1 & \text{si } i \notin A \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{H}_j(\underline{k}) = \{ \underline{k} \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } |k_j| = 1 \}, \quad (1 \leq j \leq n)$$

et posons

$$\mathbb{U} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(I_n)} \mathbb{D}^A(\underline{k}) \quad \text{et} \quad \mathbb{H} = \bigcup_{1 \leq j \leq n} \mathbb{H}_j(\underline{k})$$

où $\mathcal{P}(I_n)$ l'ensemble des parties de I_n . On remarque que l'ensemble \mathbb{D}^\emptyset correspondant à $A = \emptyset$ est le domaine de stabilité:

$$\mathbb{D}^\emptyset(\underline{k}) \triangleq \mathbb{S}_{\underline{k}}$$

et on a :

$$\mathbb{H} \bigcup \mathbb{U} = \mathbb{C}^n.$$

L'application \mathcal{T}_n n'étant pas surjective, soit \mathbb{T} l'ensemble non vide des vecteurs \underline{a} tels que:

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{U}) \bigcup \mathcal{T}_n(\mathbb{H}) \bigcup \mathbb{T} = \mathbb{C}^n.$$

On a évidemment $\mathcal{T}_n^{-1}(\mathbb{T}) = \emptyset$. Dans le cas réel, on introduira:

$$\mathbb{H}_j^+ = \{ \underline{k} \in \mathbb{R}^n : k_j = 1 \} \text{ et } \mathbb{H}_j^- = \{ \underline{k} \in \mathbb{R}^n : k_j = -1 \}$$

$$\mathbb{H}_j(\underline{k}) = \{ \underline{k} \in \mathbb{R}^n : k_j^2 = 1 \} \triangleq \mathbb{H}_j^+ \cup \mathbb{H}_j^-. \quad (14)$$

Proposition 3.2 La restriction de $\mathcal{T}_n(\underline{k})$ à $\mathbb{S}(\underline{k})$ est une bijection et on a :

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{S}_{\underline{k}}) = \mathbb{S}_{\underline{a}} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_n^{-1}(\mathbb{S}_{\underline{a}}) = \mathbb{S}_{\underline{k}}$$

3.2 Cas $\mathbb{R}^2(\underline{a})$

Pour $n = 2$, on obtient :

$$\mathbb{H}_1^+ = \{(1, k_2) \mid k_2 \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathbb{H}_1^- = \{(-1, k_2) \mid k_2 \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\mathbb{H}_2^+ = \{(k_1, 1) \mid k_1 \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathbb{H}_2^- = \{(k_1, -1) \mid k_1 \in \mathbb{R}\}$$

L'expression explicite de \mathcal{T}_2 :

$$(a_1, a_2) = (k_1 + k_1 k_2, k_2)$$

conduit à:

$$k_1 = \frac{a_1}{1 + a_2}, \quad k_2 = a_2 \quad \text{si} \quad k_2 \neq -1$$

ou

$$k_2 = a_2 = -1, \quad a_1 \in \mathbb{R} \quad \text{si} \quad k_2 = -1.$$

On a alors les résultats suivants où Δ_1^+ , Δ_1^- , Δ_2^+ et Δ_2^- désignent les quatre droites apparaissant dans la Figure 2.

$$\mathcal{T}_2(\mathbb{H}_1^+) = \Delta_1^+, \quad \mathcal{T}_2(\mathbb{H}_1^-) = \Delta_1^- \quad (15)$$

$$\mathcal{T}_2(\mathbb{H}_2^+) = \Delta_2^+, \quad \mathcal{T}_2(\mathbb{H}_2^-) = \{(0, -1)\} \neq \Delta_2^- \quad (16)$$

Il est facile de voir que:

$$\mathbb{T} = \Delta_2^- \setminus \{(0, -1)\} = \{(a_1, -1), \quad a_1 \in \mathbb{R}^*\}$$

$$\mathcal{T}_2^{-1}(\mathbb{T}) = \emptyset.$$

Les 4 droites Δ_1^+ , Δ_1^- , Δ_2^+ and Δ_2^- définissent une partition du plan complexe en 9 régions qui sont les images des 9 régions $\mathbb{D}^A(\underline{a}) = \mathcal{T}_2[\mathbb{D}^A(\underline{k})]$. Parmi ces régions seuls celle qui correspond au domaine de stabilité, $\mathbb{D}^\emptyset(\underline{a}) \triangleq \mathbb{S}_{\underline{a}}$, est bornée. Un point (a_1, a_2) appartient à $\mathbb{S}_{\underline{a}}$ si, et seulement si, les inégalités suivantes sont vérifiées : $-1 < \frac{a_1}{1+a_2} < 1$ et $-1 < a_2 < 1$. Ces inégalités définissent l'intérieur du triangle ayant pour sommets les trois points: $(-2, 1)$, $(0, -1)$ et $(1, 2)$, voir Figure 2.

On sait [3] que ce domaine est représenté dans l'espace des coefficients du filtre par une région qui est convexe pour $n \leq 2$ et non convexe pour $n > 2$. Des propriétés topologiques de $\mathbb{S}_{\underline{a}}$ seront données dans le cas n quelconque dans la suite.

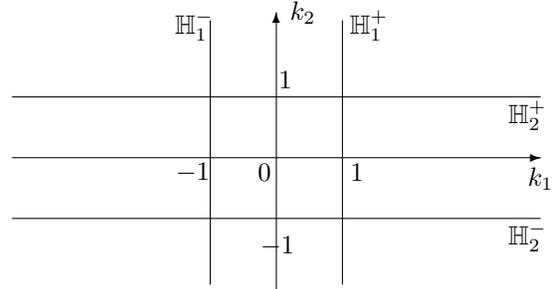


FIG. 1: Les ensembles $\mathbb{D}^A(\underline{k})$ et $\mathbb{H}_j(\underline{k})$ dans \mathbb{R}_k^2

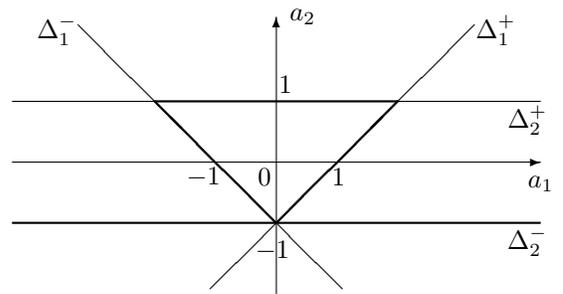


FIG. 2: Les ensembles $\mathcal{T}_2(\mathbb{D}^A)$ et $\mathcal{T}_2(\mathbb{H}_j)$ dans \mathbb{R}_a^2 .

3.3 Cas $\mathbb{R}^3(\underline{a})$

L'inversion de \mathcal{T}_3 revient à la résolution du système:

$$\mathcal{T}_3 \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_1 k_2 + k_2 k_3 \\ k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_2 k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

qui admet, pour $|k_j| \neq 1$, $(1 \leq j \leq 3)$, la solution unique:

$$k_1 = \frac{u - vw}{1 + v - uw - w^2}, \quad k_2 = \frac{v - uw}{1 - w^2} \quad \text{et} \quad k_3 = w.$$

Introduisons les ensembles $\Delta_j^\pm = \mathcal{T}_3(\mathbb{H}_j^\pm)$. Les six plans \mathbb{H}_j^+ et \mathbb{H}_j^- ($1 \leq j \leq 3$) se transforment par \mathcal{T}_3 en trois surfaces d'équations:

$$\Delta_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} : u - v + w = 1 \text{ et } w \neq -1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Delta_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} : u + v + w = -1 \text{ et } w \neq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Delta_2^+ = \{(u, v, w)^t : w^2 - uw + v = 1\}$$

et trois droites d'équations:

$$\Delta_2^- = \{(u, v, w)^t : u + w = 0 \text{ et } v = -1\}$$

$$\Delta_3^+ = \{(u, v, w)^t : u - v = 0 \text{ et } w = 1\}$$

$$\Delta_3^- = \{(u, v, w)^t : u + v = 0 \text{ et } w = -1\}.$$

Notons que $\Delta_3^- \cup \Delta_1^-$ et $\Delta_3^+ \cup \Delta_1^+$ correspondent aux plans : $u - v + w = 1$ et $u + v + w = -1$. Le point (u, v, w) appartient à \mathbb{S}_a si, et seulement si, ses coordonnées vérifient les six inégalités $-1 < k_i < 1$ ($1 \leq i \leq 3$). Utilisant les expressions ci-dessus de \mathcal{T}_3 et après simplification, on peut voir que \mathbb{S}_a est défini par les cinq inégalités suivantes:

$$|w| < 1, \quad |u + w| < 1 + v \quad \text{et} \quad (u - w)w > v - 1.$$

Si le point (u, v, w) appartient à \mathbb{S}_a , alors $(-u, v, -w)$ appartient aussi à \mathbb{S}_a et cela signifie que la droite d'équation $u = w = 0$ est un axe de symétrie de \mathbb{S}_a . Pour $|w_0| < 1$ donné, l'intersection du domaine de stabilité et du plan $w = w_0$ est l'intérieur du triangle de sommets: $(u, v) = (-w_0, -1)$, $(w_0 + 2, 1 + 2w_0)$ et $(w_0 - 2, 1 - 2w_0)$. Ce triangle se réduit à un segment pour $|w_0| = 1$.

Une étude détaillée de \mathbb{S}_a pourrait être faite en étudiant les sections de de ce dernier par des plans appropriés.

4 Cas $\mathbb{C}^n(\underline{a})$

Afin de généraliser la définition d'un hypercube de \mathbb{R}^n au cas de \mathbb{C}^n , introduisons, pour chaque coordonnée k_j , ($1 \leq j \leq n$), les ensembles:

$$S = \{\underline{k} \in \mathbb{C}^n : \forall i |k_i| = 1\}$$

$$A_j = \{\underline{k} \in \mathbb{C}^n : \forall i \neq j |k_i| = 1 \text{ et } |k_j| \leq 1\}$$

$$F_j = \{\underline{k} \in \mathbb{C}^n : \forall i \neq j |k_i| \leq 1 \text{ et } |k_j| = 1\}$$

et la frontière de \mathbb{S}_k donnée par $\partial\mathbb{S}_k = \bigcup_{j=1}^n F_j$. Comme dans le cas réel, ces ensembles définiront respectivement les *sommets*, les *arêtes* et les *faces* du domaine \mathbb{S}_k . L'ensemble des sommets est identique au tore de dimension n : $T = \{e^{2j\pi\nu} : 0 \leq \nu < 1\}$ et il est non dénombrable. On peut établir que dans \mathbb{C}^n , chaque sommet \underline{k} de $\partial\mathbb{S}_k$, a pour image:

$$\mathcal{T}_n(\underline{k}) = \prod_{i=1}^n (z + \bar{k}_{i-1} k_i), \quad k_0 \triangleq 1.$$

Tous les zéros du polynôme associé à un sommet sont de module 1. Dans le cas réel, les 2^n sommets de \mathbb{S}_k se transforment par \mathcal{T}_n en $n + 1$ polynômes distincts:

$$P_n^{(i)}(z) = (z + 1)^i (z - 1)^{n-i}, \quad (0 \leq i \leq n)$$

appartenant à $\partial\mathbb{S}_a$. Utilisant (10), on peut établir que chaque point de l'axe a_j , ($1 \leq j \leq n$) est un point invariant de \mathcal{T}_n , i.e.,

$$\mathcal{T}_n[(0, \dots, k_j, \dots, 0)^t] = (0, \dots, a_j, \dots, 0)^t$$

$$\mathcal{T}_n^{-1}[(0, \dots, a_j, \dots, 0)^t] = (0, \dots, k_j, \dots, 0)^t.$$

En particulier, \mathbb{S}_a contient, pour chaque j , le sous-ensemble:

$$C_j = \{\underline{a} \in \mathbb{C}^n : \forall i \neq j, a_i = 0 \text{ et } |a_j| < 1\}.$$

Proposition 4.1 *Dans l'espace euclidien \mathbb{C}^n , la représentation géométrique \mathbb{S}_k du domaine de stabilité est un ensemble ouvert, borné, connexe et convexe pour $n > 0$.*

Dans l'espace euclidien \mathbb{C}^n , la représentation géométrique \mathbb{S}_a du domaine de stabilité est un ensemble ouvert, borné, connexe pour $n > 0$. Elle est convexe pour $n = 1, 2$ et non-convexe pour $n > 2$.

Dans l'espace euclidien \mathbb{C}^n , les domaines $\mathbb{D}^A(k)$ sont connexes et non bornés pour tout $A \subset I_n$ non vide. Ce résultat n'est plus vrai dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

La démonstration de cette proposition se déduit des résultats ci-dessus et de certaines propriétés classiques des topologies définies sur \mathbb{C}^n . A titre d'exemple l'image directe, par une application continue de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^n , d'un ouvert est un ouvert est une proposition fautive. Mais cette proposition devient vraie si l'application est multilinéaire (ce qui est le cas de \mathcal{T}_n) [8].

References

- [1] M. Benidir, "Explicit expression for a linear filter in terms of its lattice representation" accepté dans *IEEE Signal Processing Letters*, Février 2011.
- [2] P. Saux-Picart, "The Schur-Cohn algorithm revisited", *Journal of Symbolic Computation*, vol. 26, pp. 387-408, 1998.
- [3] M. Benidir and B. Picinbono, "Non-convexity of the stability domain of digital filters", *IEEE Trans. ASSP*, vol. 38, No. 8, pp. 1459-1460, Aug. 1990.
- [4] Benidir and B. Picinbono, "Wide sense stability of discrete-and continuous-time linear systems and reflection coefficients", *IEEE Trans. ASSP*, vol. 37, No. 11, pp. 1768-1771, Nov. 1989.
- [5] P. A. Regalia and S. K. Mitra, "Phase sensitivity properties of cascaded digital lattice all-pass filters," *Signal Processing (Elsevier)*, vol. 15, pp. 1-21, July 1988.
- [6] Shlien, "A geometric description of stable linear predictive coding digital filters," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-31, pp. 545-548, July 1985.
- [7] P. Chu, and D. Messerschmitt, "Zero sensitivity properties of the digital lattice filter," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 31, no. 3, pp. 685-706, 1983.
- [8] L. Schwartz, "Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle", *Herman*, Paris-1970.