

Introduction d'*a priori* de forme en reconstruction tomographique orientée objet

Gil GAULLIER¹, Pierre CHARBONNIER¹, Fabrice HEITZ²

¹Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées, ERA 27 LCPC
11 rue Jean Mentelin, BP 9, 67035 STRASBOURG, France

²LSIIT UMR 7005 CNRS / Université de Strasbourg
Bd Sébastien Brant, BP 10413, 67412 ILLKIRCH, France

Gil.Gaullier@developpement-durable.gouv.fr, Pierre.Charbonnier@developpement-durable.gouv.fr,
heitz@lsiit.u-strasbg.fr

Résumé – Les techniques pixelliques régularisées en reconstruction tomographique présentent des artéfacts de reconstruction dans le cas d'un nombre réduit de projections. Les méthodes orientées objet, qui reconstruisent les formes en optimisant leur frontière, pénalisent communément la longueur de la courbe en évolution. Ceci n'est pas toujours approprié selon les formes et les topologies rencontrées. Pour pallier cet inconvénient, nous proposons dans cet article d'introduire un *a priori* de forme de haut niveau dans le cadre de la reconstruction tomographique par contours actifs. Notre descripteur de forme, compact et hiérarchique, repose sur les moments et peut être rendu invariant aux transformations affines. Plusieurs objets de référence peuvent également être considérés pour gérer des variations de forme. Les résultats expérimentaux obtenus sur données synthétiques montrent l'efficacité de l'*a priori*, notamment pour des nombres réduits de projections bruitées.

Abstract – Regularized pixel-based tomographic reconstruction techniques suffer from streaking artifacts when few projection angles are available. Shape-based methods, that reconstruct objects by optimizing their boundaries typically enforce a length penalty on the evolving curve, which is not suited to all possible shapes or topologies. To overcome this limitation, we propose in this paper to introduce high-level shape priors in tomographic reconstruction using active contours. Our shape descriptor is moment-based - hence compact and hierarchical - and may be made invariant to geometric transformations up to affine ones. It can handle multiple references simultaneously to accommodate shape variations. Experimental results on synthetic data show the effectiveness of the prior, especially for small numbers of noisy projections.

1 Introduction

La reconstruction tomographique à partir de données de projection est un problème mal-posé qui nécessite d'être régularisé. Dans les années 90, des méthodes de régularisation respectant les discontinuités ont été proposées pour réduire le caractère passe-bas de la régularisation linéaire. En particulier, la régularisation semi-quadratique [1] introduit une variable auxiliaire pour interrompre la régularisation au niveau des discontinuités. Ces techniques fournissent généralement de meilleurs résultats, mais peuvent être prises en défaut, en présence de bruit important ou d'un nombre trop limité d'angles d'observation, du fait du caractère local de la variable de contour.

Une démarche alternative, dite de reconstruction *orientée objet* [2, 3, 4], consiste à prendre en compte explicitement les frontières des objets en utilisant un contour actif. Ceci permet d'introduire une information *a priori* globale sur l'objet et le fond. L'optimisation du terme d'attache aux données est réalisée à la fois sur la position de la frontière et sur les paramètres d'intensité du modèle. Une contrainte additionnelle de longueur de courbe force les frontières à être régulières.

Dans cet article, nous montrons que l'utilisation de contrain-

tes de forme de haut niveau, au lieu du terme habituel de longueur, peut améliorer la qualité de la reconstruction sur des données bruitées et en nombre très limité. L'intérêt des contraintes de forme s'est développé depuis une dizaine d'années dans le contexte de la segmentation d'images (voir par exemple [5, 6]). Dans [6], nous avons introduit une représentation reposant sur les moments, qui peut être rendue invariante aux transformations géométriques. Celle-ci peut être utilisée pour contraindre la forme en évolution vers un ensemble de formes de référence. Nous montrons que cette représentation peut être utilisée avec profit en reconstruction tomographique orientée objet.

2 Reconstruction en tomographie

2.1 Le problème direct

En tomographie de transmission non diffractée, les données collectées p sont définies par l'intégrale des intensités f sur le domaine Ω le long de rais droits $L_{\theta,u}$, ce qui correspond à la transformée de Radon :

$$p(\theta, u) = \mathcal{R} f(\theta, u) = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot \mathbb{1}_{L_{\theta,u}}(x, y) dx dy \quad (1)$$

où $\mathbb{1}_{L_{\theta,u}} = \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - u)$ repère le rai droit $L_{\theta,u}$ dans la direction θ .

2.2 Méthodes orientées objet

Les méthodes orientées objet supposent l'image f composée d'une région de fond Ω_{ext} et d'une région (potentiellement disjointe), Ω_{int} , représentant l'objet. On se donne un modèle d'intensité à l'intérieur et à l'extérieur du domaine objet. Le problème de reconstruction s'exprime comme un problème d'optimisation dont les inconnues sont la position de la frontière de la région objet $\Gamma = \partial\Omega_{int}$ et les paramètres d'intensité du modèle. Même si des modèles d'ordre plus élevé existent (voir par exemple [3]), nous considérerons le cas où le fond et le domaine objet sont supposés tous les deux constants :

$$f = f_{int} \cdot \mathbb{1}_{\Omega_{int}} + f_{ext} \cdot \mathbb{1}_{\Omega_{ext}} \quad (2)$$

où f_{int} et $f_{ext} \in \mathbb{R}$ sont respectivement les intensités de l'objet et du fond. L'emploi de la fonction caractéristique permet de prendre en compte des topologies arbitraires pour l'objet. Par linéarité de la transformée de Radon et sous hypothèse de bruit gaussien, le terme d'attache aux données s'écrit :

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right)^2 \quad (3)$$

avec $F_i = \int_{\Omega_{int}} \mathbb{1}_{L_i}$ et $G_i = \int_{\Omega_{ext}} \mathbb{1}_{L_i}$. L'optimisation de cette énergie est réalisée en faisant évoluer la courbe selon : $\Gamma_t = V_d \cdot \mathcal{N}$, où \mathcal{N} est la normale intérieure à Γ et où le champ de vitesse s'écrit :

$$V_d = (f_{int} - f_{ext}) \sum_{i=1}^{N_{proj}} \left(p_i - f_{int} \cdot F_i - f_{ext} \cdot G_i \right) \mathbb{1}_{L_i}. \quad (4)$$

Les paramètres d'intensité du modèle sont périodiquement remis à jour en résolvant un système linéaire. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour plus de détails. Noter que dans [3], une contrainte de régularisation classique portant sur la longueur de la courbe est introduite, ce qui se traduit par un terme supplémentaire de courbure dans l'expression de la vitesse.

3 A priori de forme multi-références

L'a priori de forme que nous proposons en reconstruction tomographique orientée objet a initialement été introduit dans [6] dans le contexte de la segmentation d'image. Dans cette approche, les formes sont décrites par un vecteur collectant les moments de Legendre de leur fonction caractéristique, jusqu'à un certain ordre N : $\lambda = \{\lambda_{p,q}, p+q \leq N\}$. Une telle représentation est compacte, ne dépend pas de la topologie des objets et peut être rendue intrinsèquement invariante aux transformations géométriques *via* la relation linéaire existant entre moments de Legendre $\lambda_{p,q}$ et moments géométriques $M_{u,v}$:

$$\lambda_{p,q} = C_{pq} \sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q a_{pu} a_{qv} M_{u,v} \quad (5)$$

où a_{pu} et a_{qv} sont les coefficients de x^u et y^v dans le développement en série des polynômes de Legendre et $C_{pq} = (2p+1)(2q+1)/4$. Par exemple, l'invariance par mise à l'échelle et translation s'obtient en remplaçant, dans (5), $M_{u,v}$ par :

$$\eta_{u,v}(\Omega) = \int_{\Omega} H_{uv} \text{ avec } H_{uv} = \frac{(x-\bar{x})^u (y-\bar{y})^v}{(\beta|\Omega|)^{\frac{u+v+2}{2}}}, \quad (6)$$

où (\bar{x}, \bar{y}) est le centroïde de la forme Ω , $|\Omega|$ représente son aire et β est une constante de normalisation. De manière similaire, une invariance géométrique jusqu'aux transformations affines peut être obtenue en utilisant une définition appropriée de $\eta_{u,v}$. Le lecteur pourra se référer à [6] pour plus de détails. Dans cet article, et ceci sans perte de généralité, nous nous restreignons aux invariances par mise à l'échelle et translation.

Comme dans [6], nous contraignons l'évolution de la frontière Γ de Ω_{int} par rapport à un ensemble de N_{ref} formes de références (fixées) en introduisant :

$$E_{prior}^{multi}(\Omega_{int}) = -\log \left[\sum_{k=1}^{N_{ref}} e^{-\frac{\|\lambda(\Omega_{int}) - \lambda_{(k)}^{ref}\|^2}{2\sigma^2}} \right] + cst. \quad (7)$$

à la place de la contrainte de longueur dans le critère de reconstruction. En d'autres termes, l'a priori de forme est défini à partir des descripteurs de Legendre comme un mélange de gaussiennes isotropes équiprobables, de variance σ^2 (fixée selon un critère d'erreur de classification) et centrée sur chaque forme de référence. Lorsque le modèle se restreint à une référence unique ($N_{ref} = 1$), E_{prior} se réduit à une distance quadratique.

La minimisation de E_{prior}^{multi} conduit à la vitesse d'évolution suivante :

$$V_{prior}^{multi} = \sum_{0 \leq u+v \leq N} A_{uv}^{multi} (H_{uv} + G_{uv}) \quad (8)$$

avec H_{uv} donné par (6) et :

$$G_{uv} = -\frac{u+v+2}{2|\Omega_{int}|} \eta_{u,v} - \frac{u(x-\bar{x})}{\beta^{\frac{1}{2}} |\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u-1,v} - \frac{v(y-\bar{y})}{\beta^{\frac{1}{2}} |\Omega_{int}|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u,v-1} \quad (9)$$

Le facteur A_{uv}^{multi} est une moyenne pondérée :

$$A_{uv}^{multi} = \left(\sum_{k=1}^{N_{ref}} A_{(k)uv} w_{(k)} \right) / 2\sigma^2 \sum_{k=1}^{N_{ref}} w_{(k)} \quad (10)$$

de facteurs individuels $A_{(k)uv}$ donnés, pour chaque forme de référence, par :

$$A_{(k)uv} = 2 \sum_{0 \leq p+q \leq N} (\lambda_{p,q} - \lambda_{(k)p,q}^{ref}) C_{pq} a_{pu} a_{qv}. \quad (11)$$

Les pondérations $w_{(k)}$ sont des exponentielles décroissantes de la distance (en terme de descripteurs) entre la forme en évolution et la $k^{\text{ème}}$ référence :

$$w_{(k)} = e^{-\frac{\|\lambda(\Omega_{int}) - \lambda_{(k)}^{ref}\|^2}{2\sigma^2}}. \quad (12)$$

Ainsi, la force induite par la minimisation de E_{prior}^{multi} est une moyenne pondérée de forces tendant à faire évoluer la courbe

vers chacune des références. Comme il a été mentionné dans [6], l'utilisation de plusieurs formes de références au lieu d'une seule n'a qu'un faible impact sur le coût calculatoire car elle induit comme unique modification l'introduction de (10), ce qui n'est pas très coûteux.

Finalement, nous incorporons la contrainte de forme dans le problème de reconstruction en formant un critère énergétique combinant le terme d'attache aux données (3) et le terme d'*a priori* de forme (7) :

$$E_\alpha = (1 - \alpha) \cdot E_d + \alpha \cdot E_{prior}^{multi}, \quad (13)$$

α étant un paramètre de compromis entre *a priori* et attache aux données.

4 Expériences sur données simulées

Afin d'illustrer l'intérêt de l'*a priori* en reconstruction tomographique, nous considérons une image synthétique binaire 128×128 , à topologie non triviale (voir Fig. 1). La Fig. 2 montre que les méthodes de reconstruction pixellique standard ne permettent pas d'obtenir une reconstruction satisfaisante de l'objet à partir d'un faible nombre de projections.

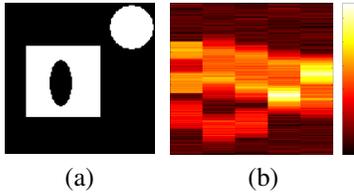


FIG. 1 – (a) Image originale ; (b) projections bruitées de (a) : 5 angles, bruit gaussien tel que $SNR_{VAR}=15$ dB.

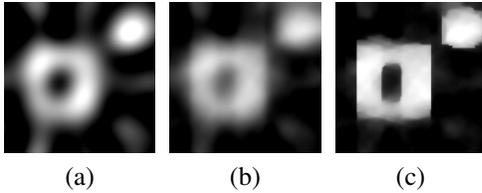


FIG. 2 – Reconstruction pixellique à partir des 5 projections bruitées de la Fig. 1 : (a) Rétro-projection filtrée (fréquence de coupure : 0,1) ; (b) Régularisation de Tikhonov (coefficient de régularisation : 1600) ; (c) Régularisation semi-quadratique [1] ($\varphi(u) = 2\sqrt{1 + u^2} - 2$, paramètre d'échelle 5, coefficient de régularisation 1600).

La reconstruction orientée objet à partir de (13) est implémentée avec une formulation par courbes de niveaux autorisant les changements de topologies. L'objet initial utilisé dans toutes nos expériences est représenté Fig. 3(a-b). La Fig. 3(c-d) montre que la reconstruction orientée objet selon le modèle (2) sans *a priori* fournit de meilleurs résultats mais demeure sensible au bruit. Une contrainte de longueur de courbe régularise la frontière, mais empêche la reconstruction de la composante circulaire de l'objet (Fig. 3d).

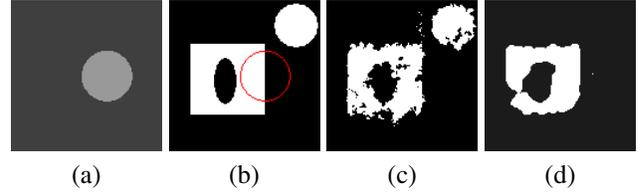


FIG. 3 – Reconstruction orientée objet à partir des projections de la Fig. 1 : (a) Reconstruction initiale ; (b) Frontière de l'objet initial, superposée sur l'image originale ; Résultat : sans *a priori* (c), avec contrainte de longueur (d).

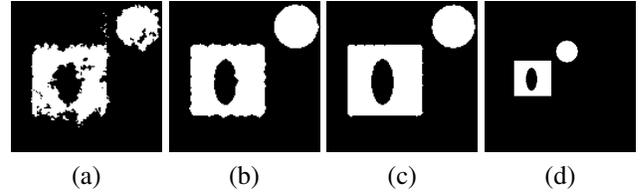


FIG. 4 – Reconstruction orientée objet à partir des projections de la Fig. 1 : (a) sans *a priori* de forme ; avec contrainte de forme pour $N = 21$ (b), $N = 45$ (c). Forme de référence de dimensions 512×512 (d).

Nous introduisons à présent notre *a priori* de forme. D'abord, nous considérons le cas d'une référence unique, i.e. $N_{ref} = 1$. L'image de référence est présentée Fig. 4d. Nous mettons à profit la nature hiérarchique de notre descripteur, liée à l'orthogonalité des moments, pour faciliter le processus d'optimisation. La reconstruction est d'abord réalisée sans *a priori* ($\alpha = 0$), voir Fig. 4a. Le résultat est ensuite utilisé comme initialisation d'une deuxième étape, avec $\alpha = 0.9$ et $N = 21$, voir Fig. 4b. Finalement, la reconstruction est affinée à l'ordre $N = 45$ et pour la même valeur de α , voir Fig. 4c.

Dans les deux expériences suivantes (Fig. 5 et 6), nous faisons varier le nombre de projections et le niveau de bruit. Alors que la qualité de la reconstruction se dégrade en reconstruction non contrainte, la qualité de la reconstruction reste presque constante lorsque la contrainte de forme est utilisée (pourvu que α soit adapté à la difficulté du problème, voir Tab. 1).

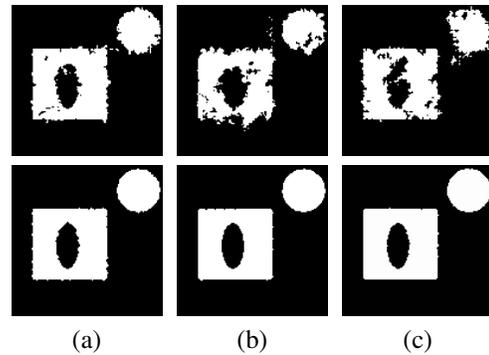


FIG. 5 – Reconstructions pour un nombre différent d'angles de projection (bruit gaussien $SNR_{VAR}=15$ dB) : (a) 6 angles ; (b) 5 angles ; (c) 4 angles. 1^{ère} ligne : sans *a priori* de forme, 2^{ème} ligne : avec *a priori* pour une référence unique, $N = 45$.

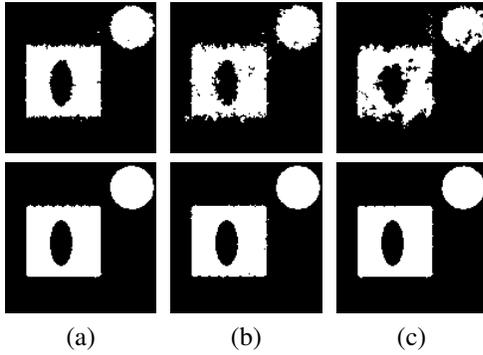


FIG. 6 – Reconstructions pour différents niveaux de bruit (5 angles de projection) : (a) 25 dB ; (b) 20 dB ; (c) 15 dB. 1^{ère} ligne : sans *a priori* de forme, 2^{ème} ligne : avec *a priori* pour une référence unique, $N = 45$.

TAB. 1 – Valeurs de α pour les reconstructions présentées sur la 2^{ème} ligne de la Fig. 5 (à gauche) et de la Fig. 6 (à droite).

Nb. angles	6	5	4	SNR (dB)	25	20	15
$N = 21$	0.8	0.9	0.95	$N = 21$	0.5	0.7	0.9
$N = 45$	0.7	0.9	0.85	$N = 45$	0.9	0.9	0.9

Dans les expériences ci-dessus, l'image de référence correspond à l'objet recherché à un facteur d'échelle et une translation près. Le modèle peut cependant s'accommoder de variations par rapport à la solution idéale de deux manières. En premier lieu, les variations géométriques peuvent être prises en compte en utilisant des moments invariants aux transformations affines [6] ou en exploitant les possibilités du modèle multi-références. Dans l'expérience suivante, des rotations (de -45° à 45° , par pas de 2°) de l'image idéale ayant subi un changement d'échelle et une translation sont considérées pour former l'ensemble de formes de référence. Comme le montre la Fig. 7, la reconstruction reste satisfaisante, bien que l'image idéale n'appartienne pas, dans ce cas, à l'ensemble de formes de références.

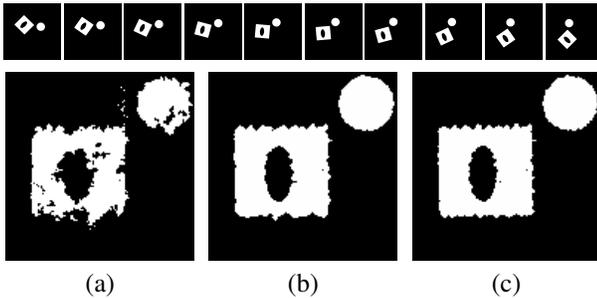


FIG. 7 – 1^{ère} ligne : 10 des $N_{Ref} = 46$ images de références utilisées pour l'expérience. 2^{ème} ligne : reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 1 : (a) sans *a priori* de forme ; en utilisant la contrainte multi-références pour $N = 21$ et $\alpha = 0.7$ (b), $N = 45$ et $\alpha = 0.5$ (c).

Le modèle multi-références peut également être utilisé avec des images de référence diverses, ce qui est une seconde façon

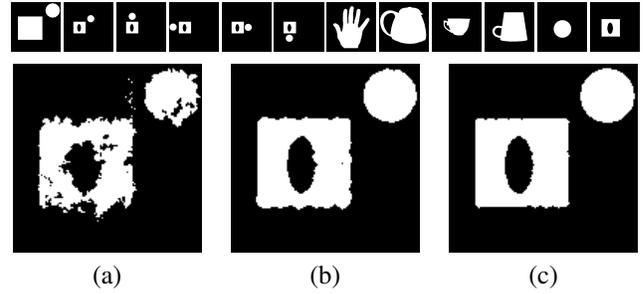


FIG. 8 – 1^{ère} ligne : ensemble des $N_{Ref} = 12$ images de référence. 2^{ème} ligne : reconstruction à partir des projections bruitées de la Fig. 1 : (a) sans *a priori* de forme ; en utilisant la contrainte multi-références à l'ordre 21 avec $\alpha = 0.9$ (b), à l'ordre 45 et $\alpha = 0.9$ (c).

d'introduire de la variabilité par rapport à l'objet idéal, comme le montre la Fig. 8.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié l'intérêt des contraintes de forme de haut niveau (géométriques et topologiques) en reconstruction tomographique binaire orientée objet. L'approche proposée se montre efficace pour réduire les artefacts de reconstruction dans des cas difficiles, par exemple pour un nombre de vues très limité. Les perspectives de ce travail incluent son extension au cas d'objets multi-phase, à la tomographie non linéaire et aux applications à des données réelles 3D en tomographie du sous-sol et des structures de génie civil.

Références

- [1] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud, "Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, no. 2, pp. 298–311, Fév. 1997.
- [2] F. Santosa, "A level-set approach for inverse problems involving obstacles," *The European Series in Applied and Industrial Mathematics : Control, Optimization and Calculus of Variations*, vol. 1, pp. 17–33, 1996.
- [3] H. Feng, "Curve evolution object-based techniques for image reconstruction and segmentation," Thèse de doctorat, Boston University, College of engineering, 2002.
- [4] O. Dorn et D. Lesselier, "Level set methods for inverse scattering," *Inverse Problems*, vol. 22, no. 4, pp. R67–R131, 2006.
- [5] D. Cremers, S. J. Osher, et S. Soatto, "Kernel density estimation and intrinsic alignment for shape priors in level set segmentation," *Int. J. Comput. Vision*, vol. 69, no. 3, pp. 335–351, Sept. 2006.
- [6] A. Foulonneau, P. Charbonnier, et F. Heitz, "Multi-reference shape priors for active contours," *Int. J. Comput. Vision*, vol. 81, no. 1, pp. 68–81, Jan. 2009.