

Partage optimal de sous-porteuses en OFDM non-codé

Ayman ALSAWAH, Inbar FIJALKOW*

Laboratoire ETIS CNRS UMR 8051 - ENSEA - Université de Cergy-Pontoise
6, avenue du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise Cedex, France
{ayman.alsawah,inbar.fijalkow}@ensea.fr

Résumé – On considère le problème d'allocation de sous-porteuses en liaison OFDM descendante non-codée multi-utilisateurs avec modulation et puissance adaptatives. Le critère d'optimalité étant la somme pondérée de débits instantanés sous contrainte de puissance totale crête et de taux d'erreur binaire par utilisateur. Bien que l'on permette à chaque sous-porteuse d'être partagée simultanément par plusieurs utilisateurs, on prouve que le partage optimal est orthogonal (OFDMA). Comme la maximisation de la somme pondérée de débits caractérise la frontière de la région de débits réalisables lorsque cette région est convexe, l'optimalité de l'OFDMA avec une allocation adéquate des puissances est étendue à d'autres critères de performance.

Abstract – We consider the problem of subcarrier sharing on a multi-user uncoded OFDM downlink with adaptive modulation and power. Optimality is defined with respect to the weighted sum of instantaneous data rates subject to a total peak power and user-wise target bit-error rate. Although each subcarrier is allowed to be shared by more than one user, we prove that the optimal subcarrier sharing is orthogonal (OFDMA). Finally, we show that, as maximizing the weighted sum-rate characterizes the boundary of the rate region in the convex case, OFDMA optimality is extended to other performance criteria.

1 Introduction

Dans les systèmes multi-porteuses OFDM où les ressources (puissance, sous-porteuses et temps) doivent être partagées entre les utilisateurs, le problème du partage optimal se pose. L'optimisation prend en compte l'état du canal lorsque celui-ci peut être estimé. Différentes stratégies d'adaptation de lien sont obtenues suivant le critère adopté et les contraintes imposées [1–4].

L'adaptation de lien en OFDM a souvent été abordée du point de vue de la théorie de l'information où différents types de capacité (ergodique, de coupure,...) ont été considérés. De telles approches fournissent des bornes supérieures pour les débits moyens réalisables avec un codage approprié. En revanche, aucune contrainte n'est imposée ni sur l'alphabet du signal émis ni sur la complexité des décodeurs. De plus, les capacités correspondent à des débits sans erreur et à une contrainte de puissance moyenne. En pratique, on s'intéresse à un alphabet issu de constellations M-QAM, à des taux d'erreur binaire (TEB) réalistes et à une contrainte de puissance crête. Par conséquent, le présent article vise à étudier la performance d'un système OFDM non-codé multi-utilisateurs avec modulation et puissance adaptatives. On se focalise sur la liaison descendante et on choisit comme critère d'optimalité la somme pondérée de débits sous contrainte de puissance totale crête. Ce critère permet de différencier les utilisateurs en terme de priorité en ajustant leurs poids respectifs. De plus, comme la somme pondérée permet de paramétrer, par le vecteur des poids, la frontière de la région de débits réalisables lorsqu'elle est convexe, les résultats obtenus pour la maximisation de la somme pondérée sont généralisables à d'autres critères de performance.

Afin de répondre à un contexte de services hétérogènes (parole, image, vidéo...), on considère un TEB différent d'un utilisateur à l'autre. La prise en compte de cette disparité permet d'éviter une conception "pire-cas" où tous les utilisateurs sont pénalisés par celui le plus contraignant en terme de TEB. Contrairement aux travaux supposant a priori un partage orthogonal de sous-porteuses, on autorise chaque sous-porteuse à être partagée par plusieurs utilisateurs. Au niveau du récepteur d'un utilisateur donné, ce partage engendre un terme d'interférence entre-utilisateurs qui s'ajoute au signal utile en plus du bruit thermique. Il ne s'agit pas ici d'une superposition par modulation hiérarchique car une telle méthode induit au niveau des terminaux une complexité proportionnelle au nombre d'utilisateurs. Enfin, on suppose pour chaque utilisateur un canal sélectif en fréquence à évanouissement lent, parfaitement connu par l'émetteur.

Sous ces hypothèses, Nous avons montré dans [5] que le problème de maximisation de la somme pondérée de débits se décompose en deux sous-problèmes. Le premier décrit le partage optimal d'une certaine puissance entre les utilisateurs sur une sous-porteuse donnée; tandis que le deuxième concerne la répartition de la puissance totale sur l'ensemble des sous-porteuses. La solution du premier sous-problème montre que le partage optimal est orthogonal du type OFDMA. Ce résultat constitue une justification théorique de l'hypothèse a priori d'un partage orthogonal des sous-porteuses même dans un système non-codé avec des contraintes de qualité de service hétérogènes. Une fois le partage orthogonal optimal trouvé, la solution du deuxième sous-problème correspond à un algorithme de *remplissage d'eau multi-niveau* ou "Multi-Level Water-Filling". Dans le présent article, nous montrons que l'optimalité de l'OFDMA peut être étendue à d'autres cri-

* Ce travail a été financé par le projet ANR RNRT DIVINE.

tères de performance comme le débit commun [2] ou les débits proportionnels [3]. Enfin, les simulations montrent que la prise en compte des disparités entre les utilisateurs en terme de TEB permet un gain significatif par rapport à une allocation "pire-cas" où le plus faible TEB est imposé à tous les utilisateurs. La performance est comparée également à une allocation statique des sous-porteuses.

2 Position du problème

Dans le modèle discret équivalent d'un canal OFDM à évanouissement lent, l'échantillon du signal reçu par l'utilisateur k sur la sous-porteuse n partagée par l'ensemble des K utilisateurs s'écrit

$$y_{k,n} = \alpha_{k,n} \sqrt{p_{k,n}} d_{k,n} + \alpha_{k,n} \sum_{j=1, j \neq k}^K \sqrt{p_{j,n}} d_{j,n} + b_{k,n} \quad (1)$$

où $\alpha_{k,n}$, $p_{k,n}$, $d_{k,n}$ et $b_{k,n}$ sont respectivement le gain du canal, la puissance émise, le symbole M-QAM et un bruit blanc additif de variance $\sigma_{k,n}^2$. Le premier terme dans (1) est la partie utile tandis que le deuxième représente l'interférence entre-utilisateurs. Le *Rapport Signal-sur-Bruit-plus-Interférence* (RSBI) s'écrit

$$\gamma_{k,n} = \frac{|\alpha_{k,n}|^2 p_{k,n}}{|\alpha_{k,n}|^2 \sum_{j=1, j \neq k}^K p_{j,n} + \sigma_{k,n}^2}.$$

Pour un grand nombre d'utilisateurs, on modélise le terme d'interférence par un bruit Gaussien qui s'ajoute au bruit thermique. Dans ce cas, on utilise l'approximation du TEB donnée dans [6] par $BER_k = 0.2 \exp \frac{-1.6 \gamma_{k,n}}{2^{q_{k,n}} - 1}$ où BER_k représente le TEB de l'utilisateur k et $q_{k,n}$ est le nombre de bits par symbole M-QAM. D'où $q_{k,n} = \log_2(1 + \gamma_{k,n}/\Gamma_k)$ avec $\Gamma_k = -\ln(5BER_k)/1.6$. Pour une détection cohérente avec un filtre adapté de Nyquist où le rythme symbole OFDM est égale à la largeur de bande par sous-porteuse, la quantité $q_{k,n}$ représente l'efficacité spectrale en bps/Hz. En transmettant sur l'ensemble des N sous-porteuses, l'utilisateur k obtient un débit total donné par $q_k(P) = \sum_{n=1}^N q_{k,n} = \sum_{n=1}^N \log_2(1 + \gamma_{k,n}/\Gamma_k)$ où la matrice $P = [p_{k,n}]$ représente la matrice des puissances allouées. La somme pondérée de débits s'écrit

$$\begin{aligned} r(P) &= \sum_{k=1}^K w_k q_k(P) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K w_k \log_2 \left[1 + \frac{p_{k,n}/\Gamma_k}{\sum_{j=1, j \neq k}^K p_{j,n} + \frac{|\alpha_{k,n}|^2}{\sigma_{k,n}^2}} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

où les $\{w_k\}$ représentent les poids avec $\sum_{k=1}^K w_k = 1$. Ainsi, le problème d'optimisation s'écrit

$$r^* = \max_P r(P) \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K p_{k,n} = p_{tot}. \quad (3)$$

C'est un problème non-convexe à cause du terme d'interférence entre-utilisateurs. On rappelle dans la suite que ce problème peut être décomposé en deux sous-problèmes plus faciles à résoudre [5].

3 Solution

Bien que le partage d'une sous-porteuse induise de l'interférence entre-utilisateurs sur cette sous-porteuse, l'orthogonalité des sous-porteuses entre elles reste préservée. Cela permet de décomposer (3) en deux sous-problèmes. On définit à partir de P une matrice $C = [c_{k,n}]$ par $c_{k,n} = p_{k,n}/p_n \in [0, 1]$ où $p_n = \sum_{k=1}^K p_{k,n}$ représente la puissance allouée à la sous-porteuse n . La contrainte de puissance totale dans (3) devient

$$\sum_{n=1}^N p_n = p_{tot}, \quad (4a)$$

$$\sum_{k=1}^K c_{k,n} = 1, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4b)$$

En introduisant le vecteur des puissances $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_N]$ et en notant par \mathbf{c}_n la n -ième colonne de C , l'équation (2) s'écrit $r(P) = r(\mathbf{p}, C) = \sum_{n=1}^N r_n(p_n, \mathbf{c}_n)$ avec

$$r_n(p_n, \mathbf{c}_n) = \sum_{k=1}^K w_k \log_2 \left[1 + \frac{c_{k,n} p_n / \Gamma_k}{(1 - c_{k,n}) p_n + \frac{\sigma_{k,n}^2}{|\alpha_{k,n}|^2}} \right]$$

qui représente la somme pondérée des débits des K utilisateurs sur la sous-porteuse n . Noter que \mathbf{p} exprime la répartition de la puissance totale sur l'ensemble des sous-porteuses tandis que \mathbf{c}_n décrit comment la puissance p_n est partagée entre les K utilisateurs. Maintenant, le problème (3) peut s'écrire

$$\begin{aligned} r^* &= \max_{\mathbf{p}, C} r(\mathbf{p}, C) = \max_{\mathbf{p}} \sum_{n=1}^N \max_{\mathbf{c}_n} r_n(p_n, \mathbf{c}_n) \\ &\quad \text{sous contraintes (4)}. \end{aligned}$$

Alors, la solution optimale peut être obtenue en résolvant les deux sous-problèmes

$$\mathbf{c}_n^*(p_n) = \arg \max_{\mathbf{c}_n} r_n(p_n, \mathbf{c}_n) \quad \text{s. c. (4b)}, \quad (5a)$$

$$\mathbf{p}^* = \arg \max_{\mathbf{p}} \sum_{n=1}^N r_n(p_n, \mathbf{c}_n^*(p_n)) \quad \text{s. c. (4a)}. \quad (5b)$$

Nous avons démontré dans [5] que la solution du premier sous-problème (5a) est donnée par

$$\max_{\mathbf{c}_n} r_n(p_n, \mathbf{c}_n) = \max_{k=1..K} w_k \log_2 \left(1 + \frac{|\alpha_{k,n}|^2 p_n}{\sigma_{k,n}^2 \Gamma_k} \right). \quad (6)$$

Cela veut dire que toute la puissance p_n allouée à la sous-porteuse n doit être attribuée à un seul utilisateur dont le choix dépend, entre autres, de p_n .

Lorsque les poids w_k sont égaux et les contraintes TEB sont identiques, on retrouve un cas particulier pour lequel l'optimalité de l'OFDMA a été démontré dans [7]. Malheureusement, dans le cas général traité ici, donner l'indice de l'utilisateur privilégié sur chaque sous-porteuse exige la connaissance des $\{p_n\}$, à savoir la solution du deuxième sous-problème (5b). Cependant, on démontre que pour un partage orthogonal donné des sous-porteuses et, en particulier, pour le partage optimal, les puissances $\{p_n\}$ sont

obtenues par remplissage d'eau multi-niveau. Le partage optimal peut être trouvé par une recherche exhaustive parmi les K^N cas possibles. Une solution de moindre complexité peut être inspirée de [4] où la capacité du canal de diffusion en OFDMA est étudiée. On examine aussi par simulation dans la section 5 une solution sous-optimale de moindre complexité basée sur des puissances $\{p_n\}$ égales.

Dans le paragraphe suivant, on montre que l'optimalité de l'OFDMA peut être étendue à d'autres critères que la maximisation de la somme pondérée des débits.

4 Généralisation

Nous voulons généraliser l'optimalité de l'OFDMA à d'autres critères de performance comme le débit commun [2] ou les débits proportionnels [3] (voir Fig. 1). Cette généralisation est rendue possible si l'on démontre que la région de débits réalisables avec un partage non-orthogonal est convexe et que sa frontière correspond à un partage du type OFDMA.

Notons par \mathcal{R}_{exc} la région de débits réalisables avec une allocation exclusive des sous-porteuses et par \mathcal{R}_{rlx} celle où la contrainte d'allocation exclusive est relâchée. On sait que $\mathcal{R}_{exc} \subseteq \mathcal{R}_{rlx}$. Dans [8], les auteurs montrent que la région \mathcal{R}_{exc} est convexe pour un nombre de sous-porteuses $N \gg 1$. En utilisant ce résultat, on démontre ici que \mathcal{R}_{rlx} possède la même frontière que \mathcal{R}_{exc} . Cela est établi en prouvant que le sous-ensemble de \mathcal{R}_{rlx} constitué des points extérieurs à la frontière de \mathcal{R}_{exc} est vide. Désignons par $f(\cdot)$ la fonction concave décrivant la frontière de \mathcal{R}_{exc} comme suit

$$f : [0, R_{1,max}] \rightarrow [0, R_{2,max}], \quad f(R_1) = \max_{(R_1, R_2) \in \mathcal{R}_{exc}} R_2$$

où $R_{k,max}$ représente le débit maximal de l'utilisateur k dans le cas mono-utilisateur (voir Fig. 2). Pour tout $(a, b) \in \mathcal{R}_{rlx}$, on a forcément $a \in [0, R_{1,max}]$. D'où, la valeur $f(a)$ est définie et le point $(a, f(a))$ appartient à la frontière de \mathcal{R}_{exc} . Comme \mathcal{R}_{exc} est convexe, tout point $(R_1, f(R_1))$ de sa frontière maximise la somme pondérée de débits pour un vecteur de poids donné. Cela est valable en particulier pour le point $(a, f(a))$. Autrement dit

$$\exists w_a \in]0, 1[: \forall (R_1, R_2) \in \mathcal{R}_{exc},$$

$$w_a R_1 + (1 - w_a) R_2 \leq w_a a + (1 - w_a) f(a). \quad (7)$$

Notons (R_1^*, R_2^*) le point optimal obtenu en maximisant $w_a R_1 + (1 - w_a) R_2$ sur \mathcal{R}_{rlx} . Comme $(a, b) \in \mathcal{R}_{rlx}$, on a

$$w_a a + (1 - w_a) b \leq w_a R_1^* + (1 - w_a) R_2^*. \quad (8)$$

Or, d'après (6), ce point optimal (R_1^*, R_2^*) correspond à une allocation exclusive de sous-porteuses. Par conséquent, on a $(R_1^*, R_2^*) \in \mathcal{R}_{exc}$. D'après (7), on obtient

$$w_a R_1^* + (1 - w_a) R_2^* \leq w_a a + (1 - w_a) f(a). \quad (9)$$

De (8) et (9) on déduit que $b \leq f(a)$. Cela veut dire que tout point $(a, b) \in \mathcal{R}_{rlx}$ est localisé en dessous de la courbe de la fonction f . Ainsi, on conclut que l'intégralité de la région \mathcal{R}_{rlx} est comprise à l'intérieur de la frontière de \mathcal{R}_{exc} . Cela prouve que la région \mathcal{R}_{rlx} partage la même frontière $R_2 = f(R_1)$ avec \mathcal{R}_{exc} qui est convexe. Comme

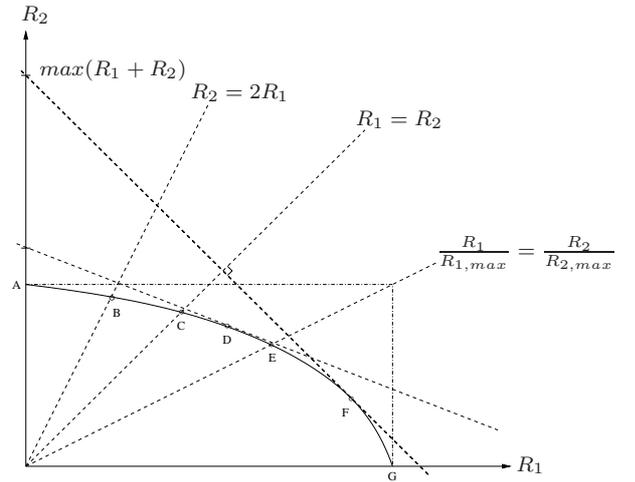


FIG. 1: Région de débits réalisables et points optimaux pour différents critères de performance (cas convexe), $A =$ débit maximal pour l'utilisateur 2 seul $R_{2,max}$, $G =$ débit maximal pour l'utilisateur 1 seul $R_{1,max}$, $B =$ débits maximaux proportionnels $\max R_1$ s.t. $R_2 = 2R_1$, $C =$ débit commun maximal (max-min) $\max \min\{R_1, R_2\}$, $D =$ somme pondérée maximale de débits $\max(\frac{1}{3}R_1 + \frac{2}{3}R_2)$, $E =$ débits maximaux équilibrés $\max R_1$ s.t. $\frac{R_1}{R_{1,max}} = \frac{R_2}{R_{2,max}}$, $F =$ somme maximale de débits $\max(R_1 + R_2)$.

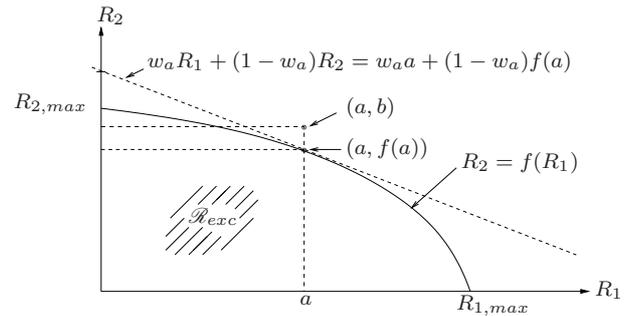


FIG. 2: Région de débits réalisables dans le cas convexe.

cette frontière correspond à une allocation exclusive des sous-porteuses, l'optimalité de l'OFDMA est établie pour l'ensemble des critères explicités dans Fig. 1.

5 Résultats de simulation

On considère des coefficients de canal $\alpha_{k,n}$ indépendants et identiquement distribués qui suivent, en module, une loi de Rayleigh avec $E[|\alpha_{k,n}|^2] = 1$. On prend $\sigma_{k,n}^2 = \sigma^2 = N_0 \frac{B}{N}$ où N_0 représente la densité spectrale de puissance du bruit et B est la largeur totale de bande. On définit un rapport signal-sur-bruit moyen par $\bar{\gamma} = p_{tot}/(N_0 B) = p_{tot}/(N \sigma^2)$. On considère dans Fig. 3 le cas de poids égaux afin de comparer notre stratégie d'allocation, notée "QoS-Aware", qui prend en compte la disparité des contraintes TEB avec une solution "pire-cas", notée "Worst-case", où le TEB le plus faible est imposé à tous les utilisateurs. D'après (6), on voit que, pour des poids égaux, la sous-porteuse n est allouée à l'utilisateur dont l'indice est donné par $k_n^* = \arg \max_k |\alpha_{k,n}|^2 / (\sigma_{k,n}^2 \Gamma_k)$. On considère $K = 8$ utilisateurs scindés en deux classes $TEB_1 = 10^{-3}$, $TEB_2 = 10^{-5}$ avec 4 utilisateurs par classe et 256 sous-porteuses.

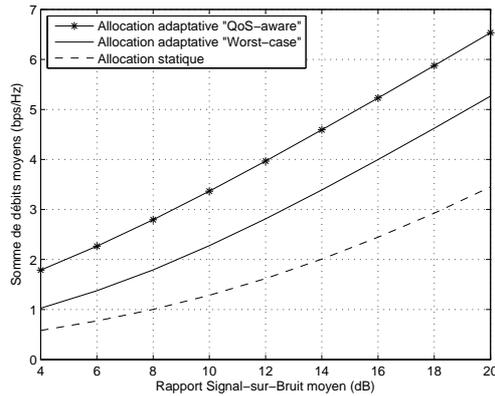


FIG. 3: Comparaison des solutions adaptatives Worst-case, QoS-aware et statique ($K = 8$, $N = 256$, $w_1 = w_2$, $TEB = 10^{-3}, 10^{-5}$).

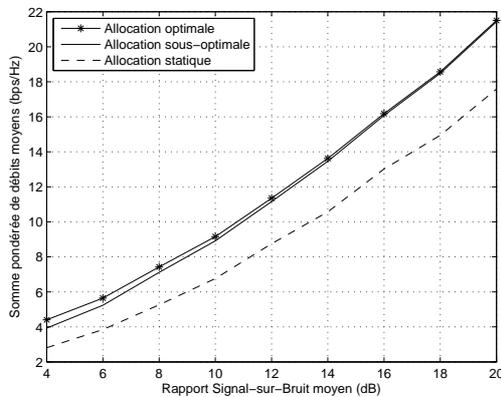


FIG. 4: Comparaison des solutions optimale, sous-optimale et statique ($K = 2$, $N = 8$, $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$, $TEB = 10^{-3}$).

On compare aussi ces deux solutions adaptatives avec une allocation statique où un jeu fixe de 256/8 sous-porteuses est alloué à chaque utilisateur. Dans tous les cas, l'allocation de puissance est effectuée par "Water-Filling". Ainsi, on constate sur les courbes de Fig. 3 un gain significatif en terme de débit total moyen entre la solution optimale et la solution pire-cas d'une part et l'allocation statique d'autre part.

Considérons à présent le cas de deux utilisateurs avec poids différents $(w_1, w_2) = (0.6, 0.4)$ et 8 sous-porteuses. Ainsi, dans Fig. 4, on compare l'allocation optimale obtenue par recherche exhaustive avec la solution sous-optimale à puissances égales d'une part et une allocation statique d'autre part. Cela montre la perte négligeable en terme de somme pondérée de débits moyens lorsque le "Water-Filling" est remplacé par une répartition uniforme de puissance. Dans les deux cas, l'exploitation de la diversité en fréquence et de la diversité multi-utilisateurs rend l'allocation dynamique de sous-porteuses significativement plus performante qu'une allocation statique.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons considéré le problème du partage optimal de sous-porteuses en OFDM non-codé sur

la liaison descendante avec modulation et puissance adaptatives par sous-porteuse. Le critère de performance retenu était la somme pondérée de débits instantanés réalisables que l'on a cherché à maximiser sous contrainte de puissance totale crête et de taux d'erreur binaire par utilisateur. La prise en compte de la disparité entre les utilisateurs en terme de qualité de service est primordiale afin d'éviter un dimensionnement "pire-cas" où seul le TEB le plus faible est considéré. Ce problème d'optimisation a été formulé ici sans imposer a priori une allocation exclusive des sous-porteuses. Ainsi, plusieurs utilisateurs sont autorisés à partager la même sous-porteuse générant ainsi de l'interférence entre-utilisateurs. Cependant, la décomposition du problème en deux sous-problème nous a permis de prouver que, dans le cadre de nos hypothèses, le partage optimal est orthogonal du type OFDMA. Ensuite, on a montré que l'optimalité de l'OFDMA peut être étendue à une large famille de critères de performance grâce à la convexité de la région de débits réalisables.

Les résultats de simulation nous ont permis de montrer l'avantage de notre approche d'allocation de sous-porteuses prenant en compte des qualités de service différentes par rapport à une allocation "pire-cas" d'une part et à une allocation statique d'autre part.

Références

- [1] C. Wong, R. Cheng, K. Letaief and R. Murch, "Multiuser OFDM with Adaptive Subcarrier, Bit, and Power Allocation", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 17, No. 10, October 1999.
- [2] W. Rhee and J. Cioffi, "Increase in Capacity of Multiuser OFDM System Using Dynamic Subchannel Allocation", *Vehicular Technology Conference*, 2000.
- [3] I. C. Wong et al., "A Low Complexity Algorithm for Proportional Resource Allocation in OFDMA Systems", *IEEE International Workshop on Signal Processing Systems*, October 2004.
- [4] K. Seong, M. Mohseni and J. M. Cioffi, "Optimal resource allocation for OFDMA downlink systems", *IEEE International Symposium on Information Theory*, Seattle, WA, July 2006.
- [5] A. Alsawah and I. Fijalkow, "Weighted sum-rate maximization in multiuser-OFDM systems under differentiated quality-of-service constraints", *8th IEEE Signal Processing Advances in Wireless communications (SPAWC) workshop*, Helsinki, June 2007.
- [6] A. J. Goldsmith and S.-G. Chua, "Variable Rate Variable Power MQAM for Fading Channels," *IEEE Trans. on Comm.*, Vol. 45, No. 10, October 1997.
- [7] J. Jang and K. B. Lee, "Transmit Power Adaptation for Multiuser OFDM Systems", *IEEE Journal on Sel. Areas in Comm.*, Vol. 21, No. 2, February 2003.
- [8] G. Song and Y. (G.) Li, "Cross-layer optimization for OFDM wireless networks - Part I : Theoretical framework," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, no. 2, pp. 614-624, March 2005.