

Nouvelle technique de localisation permettant d'atténuer l'impact des erreurs de NLoS sur le positionnement du mobile

S. Bartelmaos & K. Abed-Meraim

ENST-Paris, TSI Department, 37/39 rue Dareau 75014, Paris Cedex 14, France.

bartelmaos, abed@tsi.enst.fr

Résumé – Nous proposons une nouvelle technique de localisation de mobile utilisant les mesures de RTT "Round Trip Time" en UMTS-FDD [1]. Le RTT représente le temps qu'effectue un signal pour faire un aller-retour entre le mobile et la station de base (SB). Quand certaines des mesures correspondent à des trajets non directs (Non-Line-of-Sight "NLoS"), les erreurs de localisation peuvent être très grandes. Dans le cas où le nombre de mesures RTT est supérieur à 3, nous proposons une méthode qui atténue l'effet NLoS grâce à un critère de sélection qui mesure la meilleure cohérence entre les RTT estimés. Cette méthode ne dépend pas d'une distribution particulière de l'erreur de NLoS et permet au mobile de choisir les trois mesures les plus fiables parmi la totalité des mesures de RTT disponibles. Ceci permet aussi de sélectionner les RTT les moins bruités quand tous les trajets sont directs.

Abstract – In this paper, a new mobile localization method is provided using TOA measurements. When some of the measurements are from Non-Line-Of-Sight (NLoS) paths, the location errors can be very large. In this contribution, we propose a method that takes into account possible large TOA error measurements. In the case where more than 3 TOAs are available, this new method measures the best 'coherence' between the RTT estimates and allows the mobile to select the three most reliable measures among the whole available TOA measurements. Our proposed method does not depend on a particular distribution of the NLoS error and makes it possible to select the least disturbed (noisy) TOA in the LoS case. Realistic simulations show the gain of positioning accuracy provided by the proposed algorithm.

1 Introduction et Problématique

L'intérêt porté à la problématique de localisation de mobile a pris un nouvel essor depuis que la FCC (Federal Communications Commission) a demandé aux opérateurs de télécommunication d'assurer la localisation de tout terminal appelant les services d'urgence (avec une précision inférieure à 125 m dans au moins 67 % des cas). La localisation de mobile est aussi un moyen de proposer de nouveaux services comme la tarification par zone, la recherche de services proches (hôtels, restaurants), et permet éventuellement d'avoir un indicateur géographique du trafic, pratique pour l'optimisation du réseau.

Les différentes approches proposées pour localiser un mobile sont basées soit

- Sur l'estimation de la distance entre le mobile et la station de base, obtenue à partir des mesures de puissances ou à partir des temps d'arrivée (TOA). Ces méthodes peuvent aussi bien être envisagées en liaison montante qu'en liaison descendante. Trois mesures impliquant des stations de base différentes sont au minimum nécessaires pour déterminer la position du mobile.
- La seconde approche concerne les méthodes basées sur l'estimation des angles d'arrivées (AOA). Celles-ci nécessitent l'installation d'antennes multi-capteurs au niveau des SBs. Dans ce cas, deux mesures de AOAs sont nécessaires pour localiser le mobile.
- Enfin, la troisième approche concerne les méthodes dites conjointes utilisant simultanément l'estimation des angles et des retards. La localisation de mobile ne nécessite alors que l'écoute d'une seule station de base.

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à la localisation du mobile basée sur des mesures de RTT dans les réseaux UMTS-FDD [1]. Le contrôleur du réseau radio (SRNC, Serving Radio Network Controller) peut demander des mesures à partir d'une SB ou de l'unité de mesure de l'endroit. Le RTT constitue la différence entre le début de transmission de la trame descendante (DPCH, Dedicated Physical Channel) et le début de réception de la trame montante. Les mesures de RTT sont effectuées avec une précision inférieure ou égale au temps chip ce qui correspond à une erreur de position d'environ 73 mètres. De nos jours, des méthodes de suréchantillonnage permettent au RTT d'avoir une précision de 1/16 du temps chip, donnant ainsi une précision d'environ 5 m (en absence de NLoS et d'autres erreurs d'estimation). Par conséquent, les facteurs, qui dégradent la précision de localisation, sont principalement dus aux effets de propagation et en particulier à l'absence de trajet direct. Il s'agit d'un problème d'autant plus délicat qu'il est difficile à identifier en pratique. Généralement pour en atténuer l'impact, on préfère déterminer la position du mobile en considérant plus de mesures de TOAs que nécessaires (i.e. plus de trois mesures). On peut ainsi espérer améliorer les performances de la localisation en réduisant le poids de certaines mesures erronées; en particulier, si la configuration des SBs est telle que les erreurs de NLoS se compensent entre elles. Toutefois, cette approche peut présenter des limites, notamment si une seule des mesures est erronée et les autres sont peu bruitées. En effet dans ce cas, considérer toutes les mesures dans la triangulation diminuerait fortement la précision de la localisation.

Une solution simple serait d'identifier les mesures les plus entachées par le NLoS afin de sélectionner celles qui ne le

sont pas ou le sont à un moindre degré. Ceci suppose implicitement que l'on dispose d'un nombre M de mesures de TOA (i.e. de SBs à l'écoute) supérieur au minimum requis (i.e. $M > 3$). Ceci est souvent le cas en milieu urbain où l'on peut disposer de 7 ou 8 mesures en moyenne. C'est d'ailleurs le contexte où le phénomène NLoS est le plus fort.

2 Solution proposée

La méthode proposée est basée sur les deux constats suivants :

- si l'on dispose de trois mesures de TOAs ($\hat{t}_i, \hat{t}_k, \hat{t}_l$) peu bruitées, la position¹ du mobile qui en résulte sera cohérente avec les mesures de TOA de ces 3 SBs dans le sens où la différence, notée $\xi_{i,k,l}$ entre les 2 expressions suivantes, donnant la distance séparant la Station mobile (MS) des stations de base est faible :
- La première expression est celle utilisant la position, notée $(\hat{x}_{i,k,l}, \hat{y}_{i,k,l})$, obtenue par la méthode de triangulation choisie ;
- La deuxième expression est donnée par le TOA de la station de base considérée, i.e $c\hat{t}(i)$.

Cette différence moyenne, s'écrit :

$$\begin{aligned}\xi_{i,k,l} &= \zeta_{i,k,l}^i + \zeta_{i,k,l}^k + \zeta_{i,k,l}^l \\ \zeta_{i,k,l}^m &= \left(\hat{d}_{i,k,l}^m - c\hat{t}_m \right)^2\end{aligned}$$

où $\hat{d}_{i,k,l}^m = \sqrt{(\hat{x}_{i,k,l} - x_m)^2 + (\hat{y}_{i,k,l} - y_m)^2}$, c est la célérité de la lumière, (x_m, y_m) est la position de la SB m et \hat{t}_m représente la mesure du temps de propagation entre le mobile et la SB m .

- Dans le cas contraire, si une des mesures de TOA utilisées était fortement erronée (trajet non-direct), la position obtenue par triangulation ne serait pas cohérente avec les mesures de TOA et l'erreur $\xi_{i,k,l}$ serait importante.

En utilisant ce critère, les 3 mesures de SBs (les plus fiables) sont obtenues par la minimisation suivante :

$$\hat{i}, \hat{k}, \hat{l} = \arg \min_{i,k,l} \xi_{i,k,l}. \quad (1)$$

Les 3 SBs sélectionnées sont par la suite utilisées pour l'estimation de la position du mobile par triangulation [2] :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{i,k,l} \\ \hat{y}_{i,k,l} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} c^2 e_{k,i} - k_k + k_i \\ c^2 e_{l,i} - k_l + k_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

où $\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_{k,i} & y_{k,i} \\ x_{l,i} & y_{l,i} \end{pmatrix}^{-1}$ avec $x_{k,i} = x_k - x_i$, $y_{k,i} = y_k - y_i$, $k_i = x_i^2 + y_i^2$ et $e_{m,n} = \hat{t}_m^2 - \hat{t}_n^2$. Ici, l'indice i est celui de la SB serveuse.

Notons que la solution proposée dans (1) améliore celle déjà proposée dans [3]. En effet, dans [3] il est proposé de choisir les SBs i, k, l de manière à minimiser le critère

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{i,k,l} &= \min_m \zeta_{i,k,l}^m \\ \hat{i}, \hat{k}, \hat{l} &= \arg \min_{i,k,l} (\hat{\xi}_{i,k,l}).\end{aligned} \quad (3)$$

Nous démontrons dans l'article que le critère (1) est meilleur que le critère (3) dans le sens où il est plus discriminant entre le cas NLoS et le cas LoS. Ce résultat théorique est aussi validé par des résultats de simulations (voir figure 1 et figure 2).

Les critères (1) et (3) se généralisent facilement au cas où l'on dispose de $L > 1$ mesures correspondant à la même position du mobile mais affectées par un bruit indépendant, i.e

$$\hat{t}_i(j) = t_i + w_i(j) + u_i, \quad j = 1 \dots L, \quad (4)$$

où $w_i(j)$ représente l'erreur d'estimation considérée comme bruit gaussien centré, indépendant et identiquement distribué de variance σ_i^2 et u_i représente le biais dû au NLoS. La généralisation des critères de sélection est obtenue en remplaçant dans leurs expressions respectives $\zeta_{i,k,l}^m$ par sa version moyennée $\bar{\zeta}_{i,k,l}^m$ donnée par :

$$\bar{\zeta}_{i,k,l}^m = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (\bar{d}_{i,k,l}^m - c(\hat{t}_m(j)))^2 \quad (5)$$

où $\bar{d}_{i,k,l}^m$ représente la distance SM-SB m calculée à partir de la méthode de triangulation considérée (2) et utilisant la moyenne des TOAs $\bar{t}_i, \bar{t}_k, \bar{t}_l$ avec $\bar{t}_i = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \hat{t}_i(j)$.

2.1 Analyse dans le cas NLoS

Nous étudions ici l'efficacité des critères (1) et (3) pour la distinction entre le cas LoS et NLoS. Nous noterons la valeur de l'erreur résiduelle $(\hat{d}_{i,k,l}^m - c\hat{t}_m)^2$ par

- Δ_m quand celle-ci correspond à un cas NLoS (c.à.d. quand au moins une des mesures $(\hat{t}_i, \hat{t}_k, \hat{t}_l, \hat{t}_m)$ est affectée par un bruit de NLoS).
- et par δ_m quand elle correspond à un cas LoS. Dans ce cas, l'erreur résiduelle est due uniquement aux erreurs d'estimation des TOAs (en pratique, on a $\Delta_m \gg \delta_m$).

Commençons par le cas LoS. En utilisant le critère de sélection donné par l'équation (1), nous pouvons écrire

$$\xi_{i,k,l}(LoS) = \delta_i + \delta_k + \delta_l.$$

Autrement, quand l'estimation des TOAs (t_i, t_k, t_l) est affectée par un bruit de NLoS, la valeur de ce critère est donnée ainsi par

$$\xi_{i,k,l}(NLoS) = \Delta_i + \Delta_k + \Delta_l.$$

En calculant la différence de ces valeurs, nous pouvons vérifier l'efficacité de ce critère à distinguer entre le cas NLoS et le cas LoS (plus la différence est grande, plus l'efficacité de distinction est meilleure). Par conséquent, nous obtenons pour ce critère

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= (\xi_{i,k,l}(NLoS) - \xi_{i,k,l}(LoS)) \\ &= \Delta_i + \Delta_k + \Delta_l - \delta_i - \delta_k - \delta_l.\end{aligned} \quad (6)$$

De même, pour le critère proposé dans [3] :

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\xi} &= \hat{\xi}_{i,k,l}(NLoS) - \hat{\xi}_{i,k,l}(LoS) \\ &= \arg \min_{m=1 \dots M} \Delta_m - \arg \min_{m=1 \dots M} \delta_m.\end{aligned} \quad (7)$$

Il est clair que $\Delta\xi > \Delta\hat{\xi}$ avec une probabilité élevée, ce qui signifie que notre critère est plus efficace que celui de [3]. Cette observation est confirmée par des résultats de simulation.

¹Rappelons que trois mesures permettent d'obtenir la position du mobile (solution des moindres carrée ou solution explicite [2]).

2.2 Analyse dans le cas LoS

Nous considérons ici le cas où toutes les mesures de TOA sont de type LoS, i.e $u_i = 0$ dans (4) $\forall i = 1 \dots M$. Cependant ces mesures sont de qualité différentes² dans le sens où les puissances de bruit de mesure σ_i^2 sont différentes. Nous nous proposons ici de montrer que, dans la majorité des cas, notre critère de sélection permet de choisir en moyen les 3 mesures de TOAs les moins bruitées, i.e. si

$$\begin{aligned} (\hat{i}, \hat{k}, \hat{l}) &= \arg \min_{i,k,l} (\xi_{i,k,l}) \text{ alors} \\ \sigma_{\hat{i}}^2 + \sigma_{\hat{k}}^2 + \sigma_{\hat{l}}^2 &= \arg \min_{i,k,l} (\sigma_i^2 + \sigma_k^2 + \sigma_l^2). \end{aligned}$$

En effet, nous calculons la valeur moyenne mathématique de notre critère (c.à.d. $E(\xi_{i,k,l}) = E(\zeta_{i,k,l}^i + \zeta_{i,k,l}^k + \zeta_{i,k,l}^l)$). Soit

$$\begin{aligned} \bar{d}_{i,k,l}^m &= d_m + \delta \bar{d}_{i,k,l}^m \\ \hat{c}l_m &= d_m + cw_m \end{aligned}$$

où $d_m = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\|$, $\mathbf{x} = (x, y)$ et $\mathbf{x}_m = (x_m, y_m)$ étant les vecteurs coordonnées du mobile et de la SB_m . $\delta \bar{d}_{i,k,l}^m$ représente l'erreur d'estimation sur la distance $MS - BS_m$ calculée avec le positionnement du mobile à partir des SBs (i, k, l) .

Par un simple développement de Taylor au premier ordre, on peut écrire

$$\delta \bar{d}_{i,k,l}^m = \frac{1}{d_m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)^T \delta \mathbf{x}_{i,k,l} \quad (8)$$

où $\delta \mathbf{x}_{i,k,l}$ représente l'erreur de positionnement du mobile, i.e. $(\hat{x}_{i,k,l}, \hat{y}_{i,k,l})^T - (x, y)$. Celle-ci se calcule directement à partir de l'équation (2) comme suit :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{i,k,l} &= c^2 \mathbf{A} \begin{pmatrix} t_k w_k - t_i w_i \\ t_l w_l - t_i w_i \end{pmatrix} \\ &= cd_k w_k \mathbf{a}_1 + cd_l w_l \mathbf{a}_2 - cd_i w_i (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \quad (9) \end{aligned}$$

où $\mathbf{A} \triangleq [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$. En remplaçant (9) et (8) dans l'expression de $\zeta_{i,k,l}^m$ on obtient

$$\begin{aligned} E(\zeta_{i,k,l}^m) &= E(cw_m - \delta \bar{d}_{i,k,l}^m)^2 \\ &= E(cw_m - \frac{1}{d_m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)^T \delta \mathbf{x}_{i,k,l})^2 \\ &= E(cw_m - c \frac{d_k}{d_m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)^T \mathbf{a}_1 w_k - c \frac{d_l}{d_m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)^T \mathbf{a}_2 w_l \\ &\quad + c \frac{d_i}{d_m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)^T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) w_i)^2. \end{aligned}$$

En supposant que les bruits w_i, w_k, w_l sont mutuellement indépendants, l'expression ci-dessus conduit à

$$\begin{aligned} E(\xi_{i,k,l}) &= E(\zeta_{i,k,l}^i) + E(\zeta_{i,k,l}^k) + E(\zeta_{i,k,l}^l) \\ &= C_i \sigma_i^2 + C_k \sigma_k^2 + C_l \sigma_l^2 \text{ avec} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i &= c^2 [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + 1]^2 + \left(\frac{d_i}{d_k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{d_i}{d_l} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)^T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \right)^2 \\ C_k &= c^2 \left[\left(\frac{d_k}{d_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \mathbf{a}_1 \right)^2 + (1 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{a}_1) \right]^2 \\ &\quad + \left(\frac{d_k}{d_l} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)^T \mathbf{a}_1 \right)^2 \\ C_l &= c^2 \left[\left(\frac{d_l}{d_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \mathbf{a}_2 \right)^2 + \left(\frac{d_l}{d_k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{a}_2 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)^T \mathbf{a}_2) \right]^2. \end{aligned}$$

²La qualité de la mesure de TOA dépend de l'état du canal et de la distance du mobile à la SB en considération.

Cette expression montre que la valeur du critère est proportionnelle aux puissances des erreurs de mesure. La minimisation de ce critère conduit en général³ à la sélection des SBs associées aux mesures les moins bruitées.

Pour mieux le voir nous proposons deux scénarios simples qui nous permettent d'analyser l'efficacité de notre critère. D'abord, nous supposons que nous avons 4 SBs situées aux 4

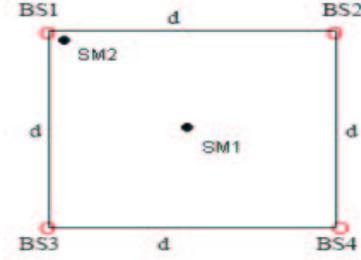


Fig. 1 – Configuration des SBs.

sommets d'un carré (voir figure 1). Ces SBs sont en connexion avec le mobile supposé être au centre du carré (position MS1 sur la figure 1). Les mesures disponibles de TOA de chaque SB ne sont pas affectées par l'erreur de NLoS (i.e $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$) mais seulement par l'erreur de mesure (w_1, w_2, w_3, w_4) supposées gaussiennes et ayant $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma < \sigma_4$ comme écarts types. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} E(\xi_{1,2,3}) &= \frac{26}{16} c^2 \sigma^2 \\ E(\xi_{1,2,4}) &= E(\xi_{1,3,4}) = \left(\frac{15}{16} \sigma^2 + \frac{11}{16} \sigma_4^2 \right) c^2 \\ E(\xi_{2,3,4}) &= \left(\frac{22}{16} \sigma^2 + \frac{1}{4} \sigma_4^2 \right) c^2 \end{aligned}$$

Clairement, $E(\xi_{i,k,l})$ est minimale pour la combinaison $(\hat{i}, \hat{k}, \hat{l})$ ayant les plus petites valeurs de σ (c.à.d. $\hat{i} = 1, \hat{k} = 2, \hat{l} = 3$). Ainsi, notre critère est capable de sélectionner les mesures les moins bruitées parmi celles de RTT disponibles. Considérons un autre scénario où les SBs ont la même configuration qu'avant mais où le mobile est très proche de la SB 1 (position MS2 dans la figure 1). Nous supposons dans cette exemple que la puissance du bruit de mesure est proportionnelle à la distance SM-SB. Ainsi, on écrira $\sigma_i = kd_i$ $i = 1, \dots, 4$. où k est un coefficient de Proportionalité donné. Avec l'hypothèse d_1 faible, (i.e. $\frac{d_1}{d} \ll 1$) on peut approximer $d_2 \approx d \approx d_3$ et $d_4 = \sqrt{2}d$. Cette approximation conduit aux valeurs suivantes du critère :

$$\begin{aligned} E(\xi_{1,2,3}) &\approx \frac{c^2 k^2 d^2}{2} \\ E(\xi_{1,2,4}) &\approx c^2 k^2 d^2 \left(\frac{7}{8} + \frac{(x-y)^2 + 2y^2}{4(x^2 + y^2)} \right) \\ E(\xi_{1,3,4}) &\approx c^2 k^2 d^2 \left(\frac{7}{8} + \frac{(x-y)^2 + 2x^2}{4(x^2 + y^2)} \right) \\ E(\xi_{2,3,4}) &\approx c^2 k^2 d^2 \frac{19}{4} \end{aligned}$$

Dans ce scénario aussi, la valeur minimale du critère est atteinte par les 3 SB les plus proches du mobile (et donc

³Ceci n'est pas vrai dans tous les cas de figure car les coefficients multiplicatifs C_i, C_k et C_l dépendent de la géométrie du réseau et de la position précise du mobile.

associés aux mesures RTT les moins bruitées).

3 Simulations :

Pour illustrer les performances de l'algorithme proposé, des simulations ont été réalisées dans un contexte micro-cellulaire en UMTS-FDD (chaque cellule est constitué de 5 SB, voir figure 2). 500 tirages Monte-Carlo sont considérés et le mobile a une position aléatoire dans la cellule pour chaque tirage. Pour observer l'efficacité de notre critère, on calcule la CDF (cumulative distribution function) de l'erreur de position du mobile.

Nous comparons dans les figures 3 et 4 les performances des critères (1) et (3) dans le scénario suivant : nous disposons de $M = 5$ mesures de RTT pour les SBs 1, \dots , 5 (les SBs sont numérotées suivant leur distance du mobile, du plus proche au plus loin). Toutes les mesures de TOA sont affectées d'un bruit de mesure gaussien blanc d'écart type $\sigma = \frac{40 \text{ m}}{c}$. De surcroit, les mesures de TOA correspondantes aux SBs 1 et 3 sont affectées par un bruit additionnel dû à l'absence de trajet direct supposé de loi uniforme :

$$u_1 \in \frac{1}{c}[40, 130], u_3 \in \frac{1}{c}[50, 150].$$

Dans le cas de la figure 3 (resp. figure 4) nous utilisons $L = 1$ (resp. $L = 5$) mesures de TOA au niveau de chaque SB. Ces résultats vont dans le sens de notre analyse de performance qui montre que le critère (1) est meilleur que le critère (3). Nous comparons aussi notre méthode avec celle proposée dans [4]. Cette dernière méthode n'est efficace que dans le cas LoS. Nous considérons donc un scénario où les mesures de RTT des 5 SBs sont de type LoS avec des bruits de mesures tels que : $\sigma_1 = \frac{20 \text{ m}}{c}$, $\sigma_2 = \frac{30 \text{ m}}{c}$, $\sigma_3 = \frac{40 \text{ m}}{c}$, $\sigma_4 = \frac{40 \text{ m}}{c}$ et $\sigma_5 = \frac{70 \text{ m}}{c}$.

Les résultats de cette simulation montrent que notre méthode de triangulation est plus performante que celle de [4].

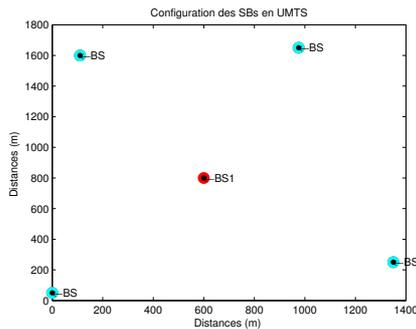


Fig. 2 – Configuration des SBs.

Références

- [1] 3GPP, *TS 25.215, UMTS; Physical Layer Measurements (FDD)*, Version 5.3.0, Release 5.
- [2] Y. T. Chan and K. C. Ho, "A simple and efficient estimator for hyperbolic location," *IEEE Transactions on signal Processing*, vol. 42, no. 8, August 1994.
- [3] E. Grosicki and K. Abed-Meraim, "A new trilateration method to mitigate the impact of some non-line-of sight errors in toa measurements for mobile localization," *ICASSP*, pp. 1045–1048, 2005.
- [4] H. C. So and Frankie K. W. Chan, "A novel signal subspace approach for mobile positioning with time-of-arrival measurements," *Eusipco*, 2006.

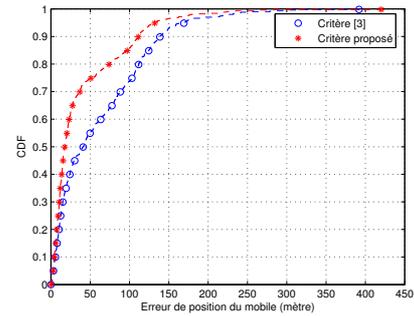


Fig. 3 – Comparaison entre critères (1) et (3) : $L = 1$.

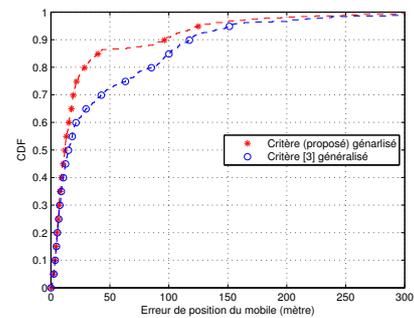


Fig. 4 – Comparaison entre critères (1) et (3) : $L = 5$.

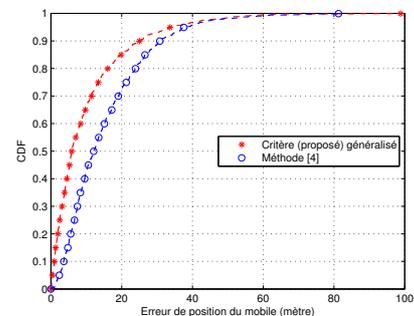


Fig. 5 – Comparaison entre le critère (1) et celui de la méthode sous espace dans [4].