

Un modèle cyclostationnaire pour les mesures d'extinction laser

Bernard LACAZE, Marie CHABERT

IRIT/ENSEEIH/TSa
2, rue Camichel BP 7122 31071 Toulouse Cedex France
bernard.lacaze@enseeiht.fr, marie.chabert@enseeiht.fr

Résumé – Cet article propose un modèle aléatoire des mesures d'extinction laser. Ce modèle permet d'exprimer de nouvelles grandeurs mesurables en fonction des paramètres d'intérêt : vitesse, concentration et dimensions de particules immergées dans un fluide en mouvement. Le modèle proposé utilise la théorie des files d'attente éventuellement non stationnaires. Ce modèle, original dans ce domaine d'application, permettra d'étudier des systèmes complexes tels que les moteurs diesel dans un contexte cyclostationnaire. Les expressions fournies permettent d'établir de nouveaux modes opératoires pour déterminer les paramètres physiques du système, dans le cas cyclostationnaire.

Abstract – A random model for laser extinction measurements is proposed. This model provides new measurable quantities related to the physical parameters of interest : celerity, concentration and particle size. The proposed model is based on non-stationary queueing theory. This model, which is original in this field of application, will allow to study complex systems such as diesel engines in the cyclostationary context. The provided expressions suggest new methodology for physical parameter estimation.

1 Introduction

Les techniques laser, actuellement en plein essor, fournissent des mesures extrêmement précises des caractéristiques de particules immergées dans un fluide en mouvement. Parmi elles, les mesures d'extinction (LEM pour *Laser Extinction Measurements*), d'incandescence ou de fluorescence induites (LII pour *Laser Induced Incandescence* ou LIF pour *Laser Induced Fluorescence*), et d'anémométrie Laser Doppler (LDA pour *Laser Doppler Anemometry*), donnent des renseignements sur la concentration, la taille et/ou la vitesse de ces particules. De telles mesures sont essentiellement motivées par des préoccupations environnementales. En effet, la législation européenne impose des normes de plus en plus strictes sur les émissions polluantes issues des moteurs à combustion interne. Il s'agit en particulier de réduire les émissions d'oxydes d'azote issues des moteurs diesel. Dans le cas des LEM qui nous intéresse dans cet article, un faisceau laser traverse le fluide en mouvement. D'après la théorie de Mie [2], chaque particule interceptée par le laser occulte une fraction de l'intensité lumineuse fonction de ses dimensions et de ses paramètres optiques. Ce genre de dispositif utilise des lasers en mode continu plutôt qu'en mode pulsé, afin de ne pas modifier la nature des molécules par des puissances crêtes trop importantes. La mesure de l'intensité du faisceau laser grâce à un récepteur optique disposé à la sortie du fluide renseigne donc sur les particules présentes. Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 1.

L'intensité mesurée $I(t)$ peut s'écrire sous la forme [2], [7] :

$$I(t) = I_0 \prod_{k \in \mathbf{J}_t} (1 - A_k), A_k = \frac{B_k}{S} \quad (1)$$

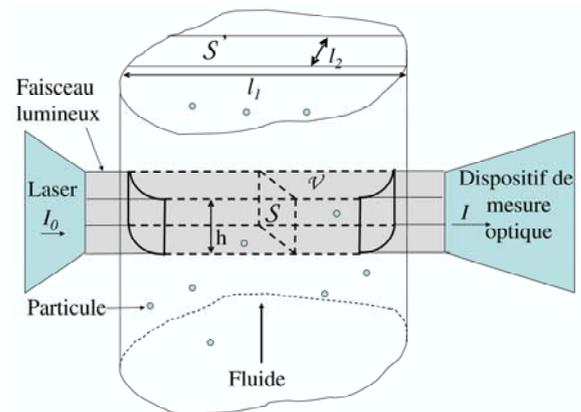


FIG. 1 – Dispositif de mesures d'extinction laser

où I_0 est l'intensité émise, B_k la section équivalente éventuellement aléatoire de la particule numéro k , S la section du faisceau laser supposée constante le long du parcours. \mathbf{J}_t est l'ensemble des indices des particules illuminées à l'instant t . Dans le cas du LII ou du LIF, la formule définissant $I(t)$ est additive et non multiplicative [1], [6]. Toutefois, le problème peut être traité de manière similaire. Les techniques les plus récentes de mesure laser étudient, de préférence à l'intensité reçue, l'indice de scintillation qui caractérise les variations de cette intensité. Dans le cas d'une intensité reçue stationnaire, l'indice de scintillation Δ est défini par :

$$\Delta = \frac{Var I(t)}{E[I(t)]^2} \quad (2)$$

$E[.]$ désigne l'espérance mathématique, Var la variance. En pratique, ces quantités sont estimées par des moyennes temporelles. Δ est indépendant de l'intensité émise I_0 . Cette propriété permet de négliger les variations optiques dues par exemple aux dépôts de particules sur les parois ou sur la lentille du récepteur optique. Les dispositifs mesurant l'indice de scintillation sont donc moins contraignants du point de vue de la maintenance que les dispositifs classiques. On notera que la notion d'indice de scintillation est similaire à la notion de coefficient de variation utilisé dans d'autres domaines de la physique comme l'acoustique [10]. Nous proposons d'étendre la notion d'indice de scintillation afin de prendre en compte les moments d'ordre supérieur de l'intensité.

2 Modélisation du phénomène physique

Quand les particules sont entraînées dans le fluide en mouvement et traversent le faisceau laser dans une direction donnée, le processus peut être modélisé par une file d'attente. Un client correspond à une particule d'indice k entrant dans le faisceau à l'instant t_k . En supposant que la particule quitte le faisceau à l'instant t'_k , le temps de service $L_k = t'_k - t_k$ est le temps de séjour de la particule dans le faisceau ou temps d'illumination. L'ensemble des indices des particules éclairées à l'instant t noté précédemment \mathbf{J}_t correspond alors à :

$$\mathbf{J}_t = \{k; t_k < t, t'_k \geq t\}. \quad (3)$$

Le nombre de particules éclairées à l'instant t est alors $|\mathbf{J}_t|$. $N(t) = |\{k; 0 \leq t_k < t\}|$ désigne le nombre de particules entrant dans le faisceau dans l'intervalle $[0, t[$.

Si la concentration en particules est suffisamment faible, les trajectoires peuvent être considérées comme indépendantes. Dans ce cas, le processus des entrées $\mathbf{t} = \{t_k, k \in \mathbb{Z}\}$ peut être modélisé par un processus de Poisson (PP). Rappelons les trois hypothèses permettant de définir un PP [5] :

$$\begin{cases} H_1 : \text{les variables aléatoires } N(v_j) - N(u_j) \\ \text{sont indépendantes lorsque } \cap_j [u_j, v_j[= \emptyset \\ H_2 : \text{Pr}[N(t+dt) - N(t) = 1] = \lambda(t) dt + o(dt) \\ H_3 : \text{Pr}[N(t+dt) - N(t) > 1] = o(dt) \end{cases} \quad (4)$$

où l'intensité $\lambda(t)$ est une fonction suffisamment régulière et $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\tau)}{\tau} = 0$. Pour des concentrations plus importantes, il est possible que le modèle poissonien soit encore valable. Par contre, on pourra douter de l'indépendance des variables aléatoires A_k , dans la mesure où la probabilité de voir des molécules alignées dans le faisceau ou agglomérées entre elles augmente avec la densité. Cet inconvénient est compensé par les avantages de calcul amenés par le modèle poissonien en l'absence de modèles plus adaptés. Selon la terminologie usuelle, le système étudié peut être modélisé par une file d'attente $M/G/\infty$: M indique un PP pour les entrées, G désigne la loi du temps d'illumination $G(x) = \text{Pr}[L_k < x]$, ∞ suppose que toutes les particules sont prises en compte. En pratique, l'inten-

sité du PP , $\lambda(t)$, et la loi G sont déterminés par les caractéristiques physiques des particules, la vitesse du fluide et la géométrie du faisceau.

Nous considérons un modèle général avec une intensité $\lambda(t)$ fonction du temps. Une intensité variable permet de rendre compte d'une éventuelle non-stationnarité des instants d'entrée. Une application intéressante est le cas de particules issues d'un moteur diesel dont le cycle, périodique, est piloté par une horloge d'émission connue. Il est possible de caractériser le nombre de particules entrant dans le faisceau pendant un intervalle de temps de durée τ [5] :

$$\begin{cases} \text{Pr}[N(t+\tau) - N(t) = n] = \frac{\Lambda^n(t,\tau)}{n!} e^{-\Lambda(t,\tau)} \\ \Lambda(t,\tau) = \int_t^{t+\tau} \lambda(u) du \end{cases} \quad (5)$$

Comme dans le cas classique du PP homogène ou stationnaire ($\lambda(t) = \lambda$ constante), le nombre de particules entrant dans le faisceau par unité de temps suit une loi de Poisson, mais avec un paramètre variant par rapport au temps. Admettons que $\lambda(t)$ est de période T liée à la vitesse du moteur émettant les particules. Alors la file d'attente est cyclostationnaire.

3 L'indice de scintillation cyclique

Définissons l'indice de scintillation généralisé $\Delta'_{pq}(\tau)$, pour un ordre (p, q) quelconque, par :

$$\Delta'_{pq}(t, \tau) = \frac{\text{Cov}[I^p(t), I^q(t+\tau)]}{E[I^p(t)]E[I^q(t)]} \quad (6)$$

Comme l'indice de scintillation, $\Delta'_{pq}(t, \tau)$ est indépendant de I_0 . De plus, $\Delta'_{11}(t, 0)$ se réduit à l'indice de scintillation Δ dans le cas stationnaire i.e. pour λ constant. Le modèle proposé permet de calculer $\Delta'_{pq}(t, \tau)$ quel que soit l'ordre (p, q) , fournissant ainsi une grande variété de mesures possibles. Les démonstrations basées sur les propriétés des processus de Poisson et de la loi multinomiale sont développées dans l'annexe. Lorsque les variables aléatoires A_k sont indépendantes, l'indice de scintillation généralisé a pour expression :

$$\Delta'_{pq}(t, \tau) = \exp \left[\mu_{pq} \int_0^\infty (1 - G(u + \tau)) \lambda(t - u) du \right] - 1 \quad (7)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_{pq} &= m_{p+q} - m_p - m_q + 1 \\ m_p &= E[(1 - A_j)^p] \end{aligned} \quad (8)$$

$\Delta'_{pq}(t, \tau)$ dépend de la géométrie des particules par le biais des moments m_p , de la géométrie du faisceau par l'intermédiaire de $G(u) = \text{Pr}[L_k < x]$ et du rythme d'émission des particules conduisant aux variations de $\lambda(t)$. Les mesures de l'indice de scintillation généralisé fourniront donc des estimations des grandeurs physiques après calibration des appareils de mesure [6], [7]. L'étude de $\Delta'_{pq}(t, \tau)$ peut mettre en évidence d'éventuels harmoniques de la loi de modulation de $\lambda(t)$. Enfin, la variété des estimations induites par les paramètres p, q, t, τ permet de vérifier la pertinence du modèle. A titre d'exemple, la figure 2 représente $\Delta'_{pq}(t, \tau)$ pour différentes valeurs de p et q dans

le cas simple d'un profil laser rectangulaire, d'une vitesse du fluide et d'un paramètre λ constants, pour une concentration $\rho = 10$. Pour une particule donnée, l'atténuation A_k dépend de la taille des particules. Celle-ci est supposée distribuée selon une loi log-normale dans de nombreuses applications [8]. Les simulations ont été réalisées avec une moyenne $E[A_k] = 0.1$ et un écart type $\sigma_{A_k} = 0.01$. La formule (7) conduit à une expression simple lorsque la vitesse du fluide \vec{v} est constante et perpendiculaire au faisceau laser. L'intensité du processus de Poisson λ est alors constante et s'exprime par :

$$\lambda = \rho v |\mathcal{S}'| \quad (9)$$

où $v = |\vec{v}|$ et \mathcal{S}' est la projection du faisceau sur un plan perpendiculaire à \vec{v} (Fig.1).

Considérons un faisceau rectangulaire comme sur la figure 1 tel que $\mathcal{S}' = l_1 l_2$. La durée d'éclairement $L_k = h/v$ de la particule k est constante, de sorte que, en utilisant (7) et en considérant des arrivées uniformes sur \mathcal{S}' :

$$\Delta_{pq}(\tau) = \begin{cases} \exp[\rho \mu_{pq} l_1 l_2 (h/v - \tau)] - 1 & \tau < h/v \\ 0 & \tau > h/v \end{cases} \quad (10)$$

L'équation (10) fournit des estimateurs de la vitesse v et du produit $\rho \mu_{pq} \cdot \mu_{pq}$, qui ne dépend que de la taille et des propriétés optiques des particules par le biais de B_k dans (1), doit être déterminé dans une étape préalable de calibration du dispositif. En effet, ce paramètre ne dépend que de la taille des particules. Le paramètre μ_{pq} est estimé à partir de 1000 réalisations. La surface $\mathcal{S}' = l_1 l_2$ est normalisée. La concentration ρ peut alors être déduite du tracé de l'indice de scintillation d'ordre supérieur en fonction de τ . En particulier, la pente du logarithme de $\Delta'_{pq}(\tau)$ est proportionnelle à ρ . Quel que soit le profil laser, $\Delta'_{pq}(\tau)$ présente un point anguleux en $\tau_0 > 0$. τ_0 correspond à la durée d'éclairement maximale et varie en $1/v$. Pour le système considéré $\tau_0 = h/v = 0.8$. Ceci permet de déduire une estimation de la vitesse du fluide et des particules.

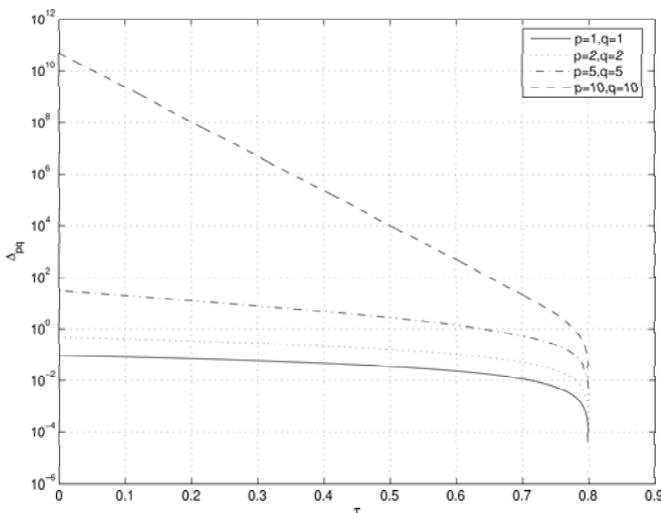


FIG. 2 – Indice de scintillation Δ_{pq} dans un cas simple

4 Conclusion

Cet article propose un modèle de file d'attente non stationnaire pour décrire les particules traversant un faisceau laser. Ce modèle très général permet notamment de prendre en considération une concentration non constante des particules. Ceci permet une étude adaptée des moteurs diesel pour lesquels la concentration en particules est une fonction périodique du temps liée au cycle du moteur. Un indice de scintillation généralisé a été proposé. Il permet en outre de s'affranchir des variations de l'intensité laser et de manière équivalente des changements dans le dispositif de mesure. Cette propriété est de première importance, notamment à cause de résidus susceptibles de se déposer sur les parois du dispositif [1], [2]. L'expression de cet indice en fonction des paramètres physiques du phénomène devrait permettre la validation expérimentale du modèle et suggère de nouvelles méthodologies de mesures destinées à extraire les paramètres physiques.

5 Annexe

1) Pour des réels x_k croissants dans $(0, t)$, on a, en utilisant H_1 et (5),

$$\Pr [x_1 < t_1 < x_1 + dx_1, \dots, x_l < t_l < x_l + dx_l, N(t) = l] \cong e^{-\Lambda(0,t)} \prod_{k=1}^l \lambda(x_k) dx_k \quad (11)$$

Soit (K_1, K_2, \dots, K_l) une permutation aléatoire de $(1, 2, \dots, l)$. La probabilité d'une permutation quelconque est $\frac{1}{l!}$. En conséquence :

$$\Pr [x_1 < t_{K_1} < x_1 + dx_1, \dots, x_l < t_{K_l} < x_l + dx_l | N(t) = l] \cong \Lambda^{-l}(0, t) \prod_{k=1}^l \lambda(x_k) dx_k \quad (12)$$

où l'ensemble (x_1, \dots, x_l) peut ne pas être ordonné. En conséquence, les variables aléatoires $(t_{K_j} | N(t) = l)$ sont mutuellement indépendantes avec une densité de probabilité définie par

$$\Pr [x < t_{K_j} < x + dx | N(t) = l] = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(0, t)} dx, 0 < x < t.$$

Ceci généralise le résultat bien connu des PP stationnaires : sachant l évènements dans $(0, t)$, si K est uniformément réparti sur $(0, 1, \dots, l)$, alors t_K est uniformément distribué dans $(0, t)$.

2) Sachant que $N(t) = l$, t_{K_1} a la probabilité $\frac{\lambda(x)}{\Lambda(0,t)} dx$ d'être dans $(x, x + dx)$, et donc t'_{K_1} a la probabilité $G(t - x)$ d'être dans $(0, t)$. Donc

$$\begin{cases} \Pr [K_1 \in \mathbf{J}_t | N(t) = l] = \int_0^t [1 - G(t - x)] \frac{\lambda(x)}{\Lambda(0,t)} dx = a_t \\ G(x) = \Pr [t'_n - t_n < x] \end{cases}$$

Ceci est valable pour n'importe quel t_{K_j} où (K_1, \dots, K_l) est une permutation de $(1, 2, \dots, l)$. Connaissant l'indépendance des $[t_{K_j} | N(t) = l]$, la v.a. $(|\mathbf{J}_t| | N(t) = l)$ est binomiale de paramètres l (le nombre de tirages) et a_t (la probabilité d'un succès) :

$$\Pr [|\mathbf{J}_t| = n | N(t) = l] = C_l^n a_t^n (1 - a_t)^{l-n}, l \geq n.$$

3) Donc, en utilisant la loi de $N(t)$, et en changeant l'indice de sommation

$$\Pr[|\mathbf{J}_t| = n] = \frac{[a_t \Lambda(0, t)]^n}{n!} e^{-a_t \Lambda(0, t)}.$$

Finalement, $N(t) = |\mathbf{J}_t|$ suit une loi de Poisson de paramètre $a_t \Lambda(0, t)$.

Lorsque t est grand (ce qui revient à positionner le démarrage du système dans un passé lointain), on a : $\Pr[|\mathbf{J}_t| = n] = \frac{\mu_t^n}{n!} e^{-\mu_t}$

$$\mu_t = \int_0^\infty (1 - G(u)) \lambda(t - u) du$$

ce qui généralise un résultat bien connu dans le cas stationnaire [3]. Comme on pouvait l'espérer, μ_t a la même périodicité que $\lambda(t)$. En utilisant les espérances mathématiques conditionnelles, on en déduit :

$$E[I^p(t)] = I_0^p E[m_p^{|\mathbf{J}_t|}] = I_0 \exp[\mu_t (m_p - 1)] \quad (13)$$

4) Plus généralement, on veut calculer

$$E[I^p(t) I^q(t + \tau)] =$$

$$I_0^{p+q} E \left[\prod_{k \in \mathbf{J}_t} (1 - A_k)^p \prod_{l \in \mathbf{J}_{t+\tau}} (1 - A_l)^q \right]. \quad (14)$$

où les A_k sont indépendantes. Le calcul est effectué en considérant la décomposition

$$\begin{cases} \mathbf{J}_t = \{k; t_k < t, t'_k \geq t\} \\ \mathbf{B} = \mathbf{J}_t \cap \mathbf{J}_{t+\tau} = \{k; t_k < t, t'_k \geq t + \tau\} \\ \mathbf{C} = \mathbf{J}_t \cap \bar{\mathbf{J}}_{t+\tau} = \{k; t_k < t, t \leq t'_k < t + \tau\} \\ \mathbf{D} = \bar{\mathbf{J}}_t \cap \mathbf{J}_{t+\tau} = \{k; t \leq t_k < t + \tau, t'_k \geq t + \tau\} \end{cases}$$

L'ensemble (\mathbf{B}, \mathbf{C}) est indépendant de \mathbf{D}

$$E[I^p(t) I^q(t + \tau)] = I_0^{p+q} \times$$

$$E \left[\prod_{k \in \mathbf{B}} (1 - A_k)^{p+q} \prod_{j \in \mathbf{C}} (1 - A_j)^p \right] E \left[\prod_{m \in \mathbf{D}} (1 - A_m)^q \right] \quad (15)$$

On conditionne par $|\mathbf{B}|, |\mathbf{C}|, |\mathbf{D}|$, ce qui donne

$$E[I^p(t) I^q(t + \tau)] = I_0^{p+q} E[m_{p+q}^{|\mathbf{B}|} m_p^{|\mathbf{C}|}] E[m_q^{|\mathbf{D}|}]$$

Le même type d'arguments que dans la première partie peut être ensuite utilisé.

a) $(|\mathbf{D}| | N(t + \tau) - N(t) = l)$ est binomiale avec les paramètres l et

$$\begin{aligned} d_{t,\tau} &= \int_t^{t+\tau} (1 - G(t + \tau - x)) \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t, \tau)} dx \\ &= \int_{-\tau}^0 (1 - G(u + \tau)) \frac{\lambda(t - u)}{\Lambda(t, \tau)} du \quad (16) \end{aligned}$$

b) $(|\mathbf{B}|, |\mathbf{C}| | N(t) = l)$ est trinomiale avec les paramètres l et $(b_{t,\tau}, c_{t,\tau})$ définis par

$$\begin{cases} b_{t,\tau} = \int_0^t (1 - G(t + \tau - x)) \frac{\lambda(x)}{\Lambda(0, t)} dx \\ \quad = \int_0^t (1 - G(u + \tau)) \frac{\lambda(t - u)}{\Lambda(0, t)} du \\ c_{t,\tau} = \int_0^t (G(t + \tau - x) - G(t - x)) \frac{\lambda(x)}{\Lambda(0, t)} dx \\ \quad = \int_0^t (G(u + \tau) - G(u)) \frac{\lambda(t - u)}{\Lambda(0, t)} du \end{cases} \quad (17)$$

On utilise la fonction génératrice de la loi multinomiale [4]

$$\begin{cases} E[m_{p+q}^{|\mathbf{B}|} m_p^{|\mathbf{C}|} | N(t) = l] = \\ (m_{p+q} b_{t,\tau} + m_p c_{t,\tau} - b_{t,\tau} - c_{t,\tau} + 1)^l \\ E[m_q^{|\mathbf{D}|} | N(t + \tau) - N(t) = l] = (m_q d_{t,\tau} - d_{t,\tau} + 1)^l \end{cases}$$

$N(t)$ and $N(t + \tau) - N(t)$ suivent des lois de Poisson $\Lambda(0, t)$ et $\Lambda(t, \tau)$. D'où

$$\begin{cases} E[I^p(t)] = I_0^p \exp[\mu_t (m_p - 1)] \\ E[I^p(t) I^q(t + \tau)] = \\ I_0^{p+q} \exp[\Lambda(0, t) (m_{p+q} b_{t,\tau} + m_p c_{t,\tau} - b_{t,\tau} - c_{t,\tau}) \\ + \Lambda(t, \tau) (m_q d_{t,\tau} - d_{t,\tau})] = \\ I_0^{p+q} \exp[(m_{p+q} - 1) b'_{t,\tau} + (m_p - 1) c'_{t,\tau} + (m_q - 1) d'_{t,\tau}] \\ b'_{t,\tau} = \int_0^t (1 - G(u + \tau)) \lambda(t - u) du \\ c'_{t,\tau} = \int_0^t (G(u + \tau) - G(u)) \lambda(t - u) du \\ d'_{t,\tau} = \int_{-\tau}^0 (1 - G(u + \tau)) \lambda(t - u) du \\ \mu_t = \int_0^t (1 - G(u)) \lambda(t - u) du \end{cases}$$

On en déduit facilement $Cov(I^p(t), I^q(t + \tau))$ puis :

$$\Delta_{pq}(t, \tau) + 1 = \exp \left[\mu_{pq} \int_0^t (1 - G(u + \tau)) \lambda(t - u) du \right] \quad (18)$$

Finalement, pour t grand, on obtient la formule (7).

Références

- [1] A. Chen, J. Hao, Z. Zhou, K. He, *Particulate concentration measured from light fluctuations*, Optics Letters, Vol. 25, No. 10, (2000), 689-691.
- [2] A. Chen, J. Hao, Z. Zhou, J. Zu, *Theoretical solutions for particular scintillation monitors*, Optics Com., Vol. 166, (1999), 15-20.
- [3] D. Gross, C. M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory*, Wiley, 1998.
- [4] N. Johnson, S. Kotz, *Discrete distributions*, Houghton Mifflin Co. 1969.
- [5] A. J. Khinchine, *Desserte d'un grand nombre d'utilisateurs*, Dunod, 1969.
- [6] B. Lacaze, *Spectral properties of scattered light fluctuations*, Optics Com., 232 (2004) 83-90.
- [7] B. Lacaze, M. Chabert, *Power spectra for laser-extinction measurements*, Optics Express, 14 (13) (2006) 6011-6019.
- [8] K. Lee, Y. Han, W. Lee, J. Chung, C. Lee, *Quantitative measurements of soot particles in a laminar diffusion flame using LII/LIS technique*, Meas. Sc. Technol., 16 (2005) 519-528.
- [9] E. Lukacs, *Characteristic Functions*, Griffin, London, 1970.
- [10] D. Mintzer, *Wave Propagation in a Randomly Inhomogeneous Medium*, J. Acous. Soc. Am. 25 (5) (1953) 922-927.
- [11] M. Musculus, L. Pickett, *Diagnostic considerations for optical laser-extinction measurements of soot in high-pressure transient combustion environments*, Combustion and Flame, 141 (4) (6-2005) 371-391.
- [12] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1991.