

# Bases orthonormées d'ondelettes splines linéaires adaptées à une grille irrégulière

N. Chihab<sup>1</sup>, A. Zergainoh<sup>1</sup>, P. Duhamel<sup>2</sup>, J-P. Astruc<sup>1</sup>

<sup>1</sup>L2TI, Institut Galilée, Université Paris 13, 99, Avenue Jean Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse

najat.chihab@l2ti.univ-paris13.fr

<sup>2</sup>LSS, Supelec, Plateau de Moulon, 91 192 Gif sur Yvette

pierre.duhamel@lss.supelec.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons une construction d'une base d'ondelettes orthonormée correspondant à une analyse par des fonctions B-splines non-uniformes de degré un. Nous montrons que le passage d'une échelle à l'autre est réalisé par un banc de filtres caractérisé par la localisation des données dans la séquence initiale. Les expressions explicites des coefficients des filtres sont fournies. Les fonctions d'échelles et d'ondelettes obtenues ne sont plus des translatées et des dilatées d'une seule fonction. Ceci nous permet de proposer une définition de l'analyse multirésolution d'un signal échantillonné à des instants irréguliers.

**Abstract** – This paper, addresses the construction of orthonormal wavelet basis corresponding to linear non-uniform B-spline functions. We show that going from one scale to another is carried out by a filter bank characterized by the localization of the data in the initial sequence. Explicit expressions of the filter coefficients are given. The obtained scaling and wavelet functions are not obtained by translations and dilations of a single function. We provide a general definition of the multiresolution analysis of an irregularly sampled signal.

## 1. Introduction

Lors d'une analyse multirésolution standard, le signal à étudier est décomposé sur une gamme très étendue d'échelles. Cette analyse repose sur des fonctions d'échelles et d'ondelettes. Chacune de ces fonctions est déduite à partir des translations et des dilatations d'une fonction prototype. L'analyse multirésolution d'un signal peut alors s'effectuer par une série de filtrages par un banc de filtres constant. Dans les schémas classiques d'analyse multirésolution, déjà développés et publiés depuis plusieurs années, les données sont disponibles à des instants réguliers ([1], [2], [3], [4]). Néanmoins dans certaines applications, nous pouvons être amenés à traiter des données prélevées à des instants d'échantillonnage irréguliers. C'est dans ce contexte que s'inscrit notre travail. Dans le cadre de signaux uniformément échantillonnés, de nombreux outils mathématiques développés (par exemple la transformée de Fourier) ne peuvent plus être utilisés dans le contexte irrégulier. Il s'avère donc nécessaire de reprendre la démarche complète d'une analyse multirésolution. De part leurs propriétés intéressantes, nous choisissons comme outils d'interpolation les fonctions B-splines non-uniformes de degré un.

Cet article est organisé comme suit. La section 2 introduit la base spline orthonormée de degré un sur laquelle repose la construction des bases d'ondelettes et d'échelles. Après avoir défini les espaces respectifs d'approximations et de détails, la section 3 décrit le principe de la construction des bases orthonormées d'ondelettes et d'échelles fondées sur les fonctions B-splines non-uniformes. Nous montrons que le banc de filtre constant dans le cas classique est remplacé par un banc dont les coefficients des filtres dépendent de la

localisation des échantillons dans la séquence. Le calcul des coefficients des équations de changement d'échelles est explicitement donné en fonction de la position des échantillons. La section 4 présente la décomposition orthogonale d'un signal irrégulièrement échantillonné.

## 2. Base spline orthonormée de degré un

Rappelons brièvement les principales définitions de la fonction B-spline non-uniforme de degré un sur lesquelles s'appuieront les fonctions d'échelles et d'ondelettes de cet article.

Considérons 3 échantillons consécutifs, localisés en des nœuds arbitraires connus. La séquence de nœuds est représentée par  $t_i < t_{i+1} < t_{i+2}$ . La *i*ème fonction B-spline non-uniforme de degré un, notée  $B_{i,[t_i,t_{i+2}]}^1(t)$ , est donnée par :

$$B_{i,[t_i,t_{i+2}]}^1(t) = (t_{i+2} - t_i)[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](\cdot - t)_+^1 \quad (1)$$

Cette équation est basée sur l'opérateur des différences divisées d'ordre 2 appliqué à la fonction  $(\cdot - t)_+^1$ . Rappelons que l'opérateur des différences divisées est défini par l'équation suivante ([5]) :

$[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](\cdot - t)_+^1 = (t_{i+2} - t_i)^{-1}([t_{i+1}, t_{i+2}](\cdot - t)_+^1 - [t_i, t_{i+1}](\cdot - t)_+^1)$   
L'ensemble des  $n$  fonctions B-splines de degré un,  $\{B_{i,[t_i,t_{i+2}]}^1, \dots, B_{i+n-1,[t_{i+n-1},t_{i+n}]}^1\}$ , définies sur la séquence de nœuds  $a = t_i < t_{i+1} < \dots < t_{i+n} = b$ , constitue une base de l'espace des splines ([5]). La combinaison linéaire de ces  $n$  fonctions B-splines définit la fonction spline linéaire. La dimension  $n$  de la base ainsi construite dépend de la multiplicité imposée en chaque nœud. Dans cet article nous imposons une multiplicité d'ordre 2 en chaque nœud de la séquence considérée. De ce fait, nous obtenons une base spline de

dimension égale à 2 ([5], [6]). La spline est ainsi définie sur l'intervalle constitué uniquement par deux nœuds adjacents. La fonction B-spline linéaire est généralisée par l'équation suivante :

$$B_{i,[t_i,t_{i+1}]}^1(t) = \left( \frac{(t_{i+1}-t)}{(t_{i+1}-t_i)} \right)^{1-i} \left( \frac{(t-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)} \right)^i \quad (2)$$

pour  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  et  $0 \leq i \leq 1$ .

Pour orthonormaliser la base linéaire spline, nous utilisons la méthode classique de Gram-Schmidt. Nous notons les éléments de la base spline orthonormale comme suit :

$$\{ \underline{B}_{i,[t_i,t_{i+1}]}^1(t), \text{ pour } i=0,1 \} \quad (3)$$

### 3. Bases d'ondelettes orthonormées

L'analyse multirésolution, considérée dans cet article, correspond à une décomposition orthogonale des espaces engendrés par des fonctions B-splines non-uniformes de degré un. La construction des bases d'ondelettes nécessite, tout d'abord, la définition des espaces d'approximations et de détails.

#### 3.1 Espaces d'approximations et de détails

Notons  $S_j$  la séquence de nœuds, à la résolution  $j$ , où les nœuds sont organisés selon un ordre croissant :

$$t_0 < \dots < t_{2^j} < t_{2^{j+1}} < \dots$$

À la résolution  $j$ , l'intervalle entre deux nœuds consécutifs est noté :

$$I_{j,i} = [t_{2^j}, t_{2^{j+1}}]$$

Rappelons qu'une multiplicité d'ordre 2 est imposée en chaque nœud. De manière générale, l'analyse multirésolution consiste à approximer un signal initial  $f(t)$  sur plusieurs niveaux de résolution  $j$ . On désigne par  $V_0$  l'espace d'approximation à la résolution la plus fine ( $j=0$ ). Cet espace est engendré, sur chaque intervalle  $I_{0,i}$ , par 2 fonctions d'échelles définies à partir des fonctions B-splines non-uniformes introduites dans la section 2 :

$$V_0 = \text{span} \{ \varphi_{0,k,I_{0,i}}^1(t) = \underline{B}_{k,I_{0,i}}^1(t) \} \text{ pour } k=0,1; \forall i \in Z$$

Les fonctions échelles splines sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0,I_{0,i}}^1(t) &= \sqrt{3}(t_{i+1}-t)(t_{i+1}-t_i)^{-3/2} \\ \varphi_{0,1,I_{0,i}}^1(t) &= (3t-t_{i+1}-2t_i)(t_{i+1}-t_i)^{-3/2} \end{aligned}$$

pour tout  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ .

Le passage d'un niveau de résolution  $j-1$  au niveau  $j$  (la plus grossière), consiste à retirer un nœud sur deux de la séquence  $S_{j-1}$ . Nous obtenons alors un ensemble de séquences emboîtées :  $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_{j-1} \supset S_j \dots$ .

Cette structure impose également une imbrication des espaces d'approximations :  $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_{j-1} \supset V_j \dots$ .

L'espace d'approximation correspondant à  $V_j$  est engendré par les fonctions B-splines non-uniformes et orthonormées de degré un :

$$V_j = \text{span} \{ \varphi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) = \underline{B}_{k,I_{j,i}}^1(t) \} \text{ pour } k=0,1; \forall i \in Z$$

Sur chaque intervalle  $I_{j,i}$ , les fonctions d'échelles constituent une base orthonormée (d'après la section 2). Puisque les domaines de définition de chaque base sont disjoints, l'ensemble des fonctions d'échelles à la résolution  $j$   $\{ \varphi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) \text{ pour } k=0,1 \text{ et } \forall i \in N \}$ , constitue une base orthonormée de l'espace  $V_j$ . Les conditions

d'orthonormalisation de la base des fonctions d'échelles se traduisent par l'équation suivante :

$$\langle \varphi_{j,k,I_{j,i}}^1(t), \varphi_{j,l,I_{j,p}}^1(t) \rangle = \delta_{kl} \delta_{ip} \quad (4)$$

pour tout  $k=0,1$ ,  $l=0,1$ ,  $\forall i \in N$  et  $\forall p \in N$ , où  $\delta_{kl}$  et  $\delta_{ip}$  représentent le symbole de Kronecker.

Les approximations successives d'un signal à deux niveaux de résolution  $j-1$  et  $j$  sont obtenues à partir de la projection orthogonale du signal sur les espaces d'approximations respectifs  $V_{j-1}$  et  $V_j$ . Nous savons que l'espace  $V_j$  est inclus dans  $V_{j-1}$ . Afin d'améliorer la qualité de l'approximation du signal, à la résolution  $j$ , on introduit le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$ , noté  $W_j$  (i.e.  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ). Cet espace de détails  $W_j$  est engendré par un ensemble de fonctions appelées ondelettes notées  $\psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t)$  :

$$W_j = \text{span} \{ \psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) \text{ pour } k=0,1; \forall i \in N \}.$$

Les ondelettes  $\psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t)$  doivent satisfaire les propriétés suivantes :

(i) L'orthogonalité des espaces d'approximations et de détails  $\langle \psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t), \varphi_{j,l,I_{j,p}}^1(t) \rangle = \delta_{kl} \delta_{ip}$  pour tout  $k=0,1$ ,  $l=0,1$ ,  $\forall i \in N$ ,  $\forall p \in N$  et  $j \geq 1$ . (5)

(ii) L'orthonormalisation de la base d'ondelettes :

$$\langle \psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t), \psi_{j,l,I_{j,p}}^1(t) \rangle = \delta_{kl} \delta_{ip} \text{ pour tout } k=0,1, l=0,1, \forall i \in N \text{ et } \forall p \in N. \quad (6)$$

#### 3.2 Equations de changement d'échelles

Dans les schémas classiques d'analyse multirésolution ([1], [2], [3], [4]), le passage d'un niveau de résolution  $j-1$  au niveau  $j$  est réalisé par le biais de deux filtres (un pour les fonctions d'échelles, l'autre pour les ondelettes). Ces filtres sont constants. Ils sont utilisés pour tous les changements d'échelles. Etudions ce que deviennent ces filtres dans le cas d'une grille irrégulière. Nous savons que l'espace d'approximation  $V_1$  est inclus dans  $V_0$ . Nous pouvons alors décomposer chaque fonction d'échelle  $\{ \varphi_{1,0,I_{1,i}}^1(t), \varphi_{1,1,I_{1,i}}^1(t) \} \in V_1$  sur la base de l'espace  $V_0$ . Nous obtenons alors les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0,I_{1,i}}^1(t) &= h_{1,0}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,0,I_{0,i}}^1(t) + h_{1,0}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,1,I_{0,i}}^1(t) \\ &\quad + h_{1,0}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,0,I_{0,i+1}}^1(t) + h_{1,0}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,1,I_{0,i+1}}^1(t). \\ \varphi_{1,1,I_{1,i}}^1(t) &= h_{1,1}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,0,I_{0,i}}^1(t) + h_{1,1}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,1,I_{0,i}}^1(t) \\ &\quad + h_{1,1}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,0,I_{0,i+1}}^1(t) + h_{1,1}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \varphi_{0,1,I_{0,i+1}}^1(t). \end{aligned}$$

Nous montrons que les coefficients d'échelles  $\{ h_{1,k}^{m,n}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) \}$  pour  $m=0,1$  et  $n=0,1$  dépendent de la localisation des échantillons sur la grille irrégulière. Ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} h_{1,0}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (1/2)(t_{i+1}-t_i)^{1/2} (3t_{i+2}-2t_i-t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)^{-3/2} \\ h_{1,0}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (\sqrt{3}/2)(t_{i+1}-t_i)^{1/2} (t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)^{-3/2}; \\ h_{1,0}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (t_{i+2}-t_{i+1})^{3/2} (t_{i+2}-t_i)^{-3/2}; h_{1,0}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) = 0; \\ h_{1,1}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -(\sqrt{3}/2)(t_{i+1}-t_i)^{1/2} (t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)^{-3/2}; \\ h_{1,1}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -(t_{i+1}-t_i)^{1/2} (t_{i+2}+2t_i-3t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)^{-3/2}/2 \\ h_{1,1}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= \sqrt{3}(t_{i+1}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})^{1/2} (t_{i+2}-t_i)^{-3/2} \\ h_{1,1}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (t_{i+2}-t_{i+1})^{1/2} (t_{i+2}-t_i)^{-1/2} \end{aligned}$$

Nous savons que les fonctions ondelettes  $\psi_{1,0,I_{1,i}}^1(t)$  et  $\psi_{1,1,I_{1,i}}^1(t)$  appartiennent à l'espace de détails  $W_1$ . De part l'inclusion de

cet espace dans  $V_0$ , il est possible de décomposer les fonctions  $\psi_{1,0,I_{j,i}}^1(t)$  et  $\psi_{1,1,I_{j,i}}^1(t)$  sur la base de  $V_0$ . Nous obtenons ainsi les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\psi_{1,0,I_{j,i}}^1(t) &= g_{1,0}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\varphi_{0,0,I_{j,i}}^1(t) + g_{1,0}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\varphi_{0,1,I_{j,i}}^1(t) \\ &\quad + g_{1,0}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\varphi_{1,0,I_{j,i}}^1(t) + g_{1,0}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\varphi_{1,1,I_{j,i}}^1(t) . \\ \psi_{1,1,I_{j,i}}^1(t) &= g_{1,1}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\varphi_{0,0,I_{j,i}}^1(t) + g_{1,1}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\varphi_{0,1,I_{j,i}}^1(t) \\ &\quad + g_{1,1}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\varphi_{1,0,I_{j,i}}^1(t) + g_{1,1}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\varphi_{1,1,I_{j,i}}^1(t) .\end{aligned}$$

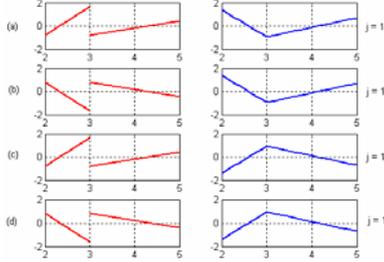


FIG. 1 : Quatre bases d'ondelettes splines orthonormées sur l'intervalle  $[2,5]$

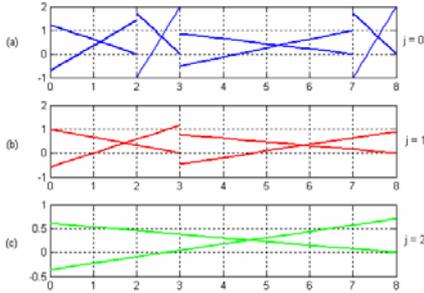


FIG. 2 : Fonctions d'échelles splines pour  $j = 0,1,2$

Les coefficients  $\{g_{1,k}^{m,n}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2})\}$  pour  $m = 0,1$  et  $n = 0,1$  sont obtenus en résolvant le système d'équations formé par les équations (5) et (6). Ce système d'équations fournit plusieurs solutions puisqu'il offre un degré de liberté. Celui-ci est exploité pour satisfaire une propriété particulière, par exemple la continuité d'une fonction ondelette sur l'intervalle considéré.

La figure 1 présente le tracé de quatre bases d'ondelettes splines orthonormées  $\{\psi_{1,0,[2,5]}^1(t), \psi_{1,1,[2,5]}^1(t)\}$  ((a), (b), (c) et (d)) sur la séquence  $S_0 = [2,3,5]$ . Nous fournissons les expressions de la solution correspondante au tracé de la courbe (a) :

$$\begin{aligned}g_{1,0}^{0,0} &= 0; \quad g_{1,0}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) = (t_{i+2} - t_{i+1})^{1/2}(t_{i+2} - t_i)^{-1/2}; \\ g_{1,0}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}{\sqrt{t_{i+2} - t_i}}; \quad g_{1,0}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}{\sqrt{t_{i+2} - t_i}}; \\ g_{1,1}^{0,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (t_{i+2} - t_{i+1})^{3/2}(t_{i+2} - t_i)^{-3/2}; \\ g_{1,1}^{0,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -\sqrt{3}(t_{i+2} - t_{i+1})^{1/2}(t_{i+1} - t_i)(t_{i+2} - t_i)^{-3/2}; \\ g_{1,1}^{1,0}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= -(1/2)(t_{i+1} - t_i)^{1/2}(t_i - 4t_{i+1} + 3t_{i+2})(t_{i+2} - t_i)^{-3/2}; \\ g_{1,1}^{1,1}(t_i, t_{i+1}, t_{i+2}) &= (\sqrt{3}/2)\sqrt{t_{i+1} - t_i}/\sqrt{t_{i+2} - t_i} .\end{aligned}$$

La figure 2 présente les tracés des fonctions d'échelles splines sur trois niveaux de résolutions  $j = 0,1,2$ . Ces fonctions sont construites sur la grille initiale  $S_0 = [0,2,3,7,8]$ . Les ondelettes splines associées à ces fonctions d'échelles sont données par la figure 3, pour les résolutions 1 et 2.

On remarquera que, contrairement au cas uniforme, on a un nombre plus élevé de fonctions échelles et ondelettes. Chacune est a priori au nombre de 2, qui est dû au degré « élevé » de l'approximation spline par rapport à une simple

approximation passe-bas. De plus, on notera que, par construction, les fonctions échelles et ondelettes ne sont pas continues d'un intervalle à l'autre. On peut même montrer que, dans cette formulation, imposer l'orthogonalité « tranche par tranche » ne permet pas d'obtenir des fonctions toutes continues. Des travaux sont en cours pour aboutir à des fonctions continues en relâchant le minimum de contraintes.

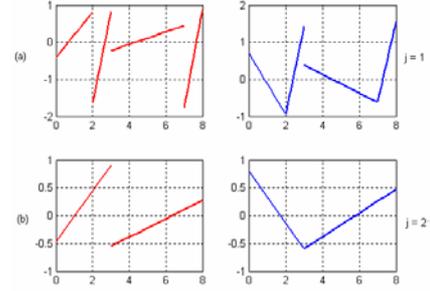


FIG. 3 : Ondelettes splines pour  $j = 1,2$

## 4. Analyse multirésolution

Rappelons que l'espace d'approximation  $V_j$  est orthogonal à l'espace de détails  $W_j$  (i.e.  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ). Ainsi, le signal d'approximation  $f_{j-1,I_{j,i}}(t) \in V_{j-1}$  peut se décomposer en deux signaux  $f_{j,I_{j,i}}(t) \in V_j$  et  $r_{j,I_{j,i}}(t) \in W_j$  :

$$f_{j-1,I_{j,i}}(t) = f_{j,I_{j,i}}(t) + r_{j,I_{j,i}}(t) \text{ pour tout } i \in N .$$

Cette dernière équation se ramène alors à :

$$f_{j-1,I_{j,i}}(t) = \sum_{m=2i}^{2i+1} \sum_{k=0}^1 c_{j,k}^m \varphi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) + \sum_{m=2i}^{2i+1} \sum_{k=0}^1 d_{j,k}^m \psi_{j,k,I_{j,i}}^1(t) \quad (7)$$

où les coefficients  $\{c_{j,k}^m\}$  (respectivement  $\{d_{j,k}^m\}$ ) sont obtenus par la projection orthogonale de  $f_{j,I_{j,i}}(t)$  (respectivement  $r_{j,I_{j,i}}(t)$ ) sur l'espace d'approximation  $V_j$  (respectivement l'espace de détail  $W_j$ ). Sur chaque intervalle  $I_{j,i}$ , nous montrons que les coefficients  $\{c_{j,k}^m\}$  sont reliés aux coefficients  $\{c_{j-1,k}^l\}$  et  $\{h_{j,k}^{l,n}\}$  selon l'équation suivante :

$$c_{j,k}^m = \sum_{l=2i}^{2i+1} \sum_{n=0}^1 h_{j,k}^{l,n} c_{j-1,k}^l \quad (8)$$

pour tout  $k = 0,1$ ,  $m = 2i, 2i+1$ , et  $\forall i \in N$ .

Ecrivons cette expression sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}\underline{c}_{j,I_{j,i}} &= \mathbf{H}_{j,I_{j,i}} \underline{c}_{j-1,I_{j,i}} \text{ où} \\ \underline{c}_{j,I_{j,i}} &= \begin{pmatrix} c_{j-1,0}^{2i} & c_{j-1,1}^{2i} & c_{j-1,0}^{2i+1} & c_{j-1,1}^{2i+1} \end{pmatrix}^t, \quad \underline{c}_{j-1,I_{j,i}} = \begin{pmatrix} c_{j-1,0}^i & c_{j-1,1}^i \end{pmatrix}^t, \\ \text{et } \mathbf{H}_{j,I_{j,i}} &= \begin{pmatrix} h_{j,0}^{2i,0} & h_{j,0}^{2i,1} & h_{j,0}^{2i+1,0} & h_{j,0}^{2i+1,1} \\ h_{j,1}^{2i,0} & h_{j,1}^{2i,1} & h_{j,1}^{2i+1,0} & h_{j,1}^{2i+1,1} \end{pmatrix} \quad (9)\end{aligned}$$

Ramenons le calcul de la matrice  $\mathbf{H}_{j,I_{j,i}}$  sur toute la séquence  $S_j$ . Nous obtenons une matrice creuse comme suit :

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{j,I_{j,0}} & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \mathbf{H}_{j,I_{j,1}} & [0] & \vdots \\ \vdots & [0] & \ddots & [0] \\ [0] & [0] & \dots & \mathbf{H}_{j,I_{j,n}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Nous montrons que les coefficients de détails sont également déterminés par l'équation suivante :

$$d_{j,k}^m = \sum_{l=2i}^{2i+1} \sum_{n=0}^1 g_{j,k}^{l,n} c_{j-1,k}^l \quad (11)$$

pour  $k = 0,1$ ;  $m = 2i, 2i+1$ ; et  $\forall i \in N$ .

Afin de simplifier cette dernière expression, nous adoptons une représentation matricielle. Sur chaque intervalle  $I_{j,i}$  de la

séquence  $S_j$ , nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\underline{\mathbf{d}}_{j,I_{j,i}} = \mathbf{G}_{j,I_{j,i}} \underline{\mathbf{c}}_{j-1,I_{j,i}} \quad \text{où} \quad \underline{\mathbf{d}}_{j-1,I_{j,i}} = \begin{pmatrix} d_{j-1,0}^i & d_{j-1,1}^i \end{pmatrix}^t,$$

$$\text{et} \quad \mathbf{G}_{j,I_{j,i}} = \begin{pmatrix} g_{j,0}^{2i,0} & g_{j,0}^{2i,1} & g_{j,0}^{2i+1,0} & g_{j,0}^{2i+1,1} \\ g_{j,1}^{2i,0} & g_{j,1}^{2i,1} & g_{j,1}^{2i+1,0} & g_{j,1}^{2i+1,1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

La généralisation de  $\mathbf{G}_{j,I_{j,i}}$  à tout le domaine de définition de la séquence  $S_j$ , est équivalente aux résultats fournis pour la représentation de  $\mathbf{H}_j$ . Les matrices  $\mathbf{H}_j$  et  $\mathbf{G}_j$  montrent bien que le banc de filtres classique est remplacé par un banc dont les coefficients de chaque filtre dépendent de la localisation des échantillons dans la séquence. Puisque la décomposition est orthogonale, les filtres de reconstruction sont identiques aux filtres de décomposition.

La figure 4 présente un exemple d'analyse multirésolution d'un signal échantillonné à des instants irréguliers. La courbe (a) correspond au signal initial où les ('\*') symbolisent les échantillons retenus. Les graphes (b), (c) et (d) représentent respectivement trois niveaux de résolution ( $j=1,2,3$ ) pour lesquels : ('\*') symbolise les signaux approximatés, ('+') représente les signaux de détails et ('o') indique les échantillons correspondants aux nœuds de la séquence. L'étape d'initialisation consiste à calculer les coefficients  $\underline{\mathbf{c}}_0$ . Théoriquement, chaque coefficient est déterminé par le calcul de la projection orthogonale du signal continu  $f_{0,I_{0,i}}(t)$  sur chaque composante de la base orthonormée :

$$c_{0,k}^i = \langle f_{0,I_{0,i}}(t), \varphi_{0,k,I_{0,i}}^1(t) \rangle \quad \text{pour} \quad k=0,1 \quad \text{et} \quad \forall i \in N \quad (13)$$

Le signal continu n'est pas disponible. Il est uniquement représenté par un ensemble d'échantillons prélevés à des instants irréguliers. Conformément à la définition des espaces multirésolution, il est logique de considérer que son évaluation à une échelle donnée est fournie par l'interpolation par des fonctions B-splines non-uniformes de degré un  $\{B_{k,I_{0,i}}^1\}$ , selon la relation suivante :

$$f_{0,I_{0,i}}(t) = \sum_{k=0}^1 a_{k,I_{0,i}} B_{k,I_{0,i}}^1(t) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad i \in N \quad (14)$$

Le calcul des coefficients de pondération  $\{a_{k,I_{0,i}}\}$  ont été étudiés dans de précédents travaux ([6]). Combinant cette dernière équation à l'équation (13), les coefficients  $\underline{\mathbf{c}}_0$  sont ainsi obtenus par la relation suivante :

$$c_{0,k}^i = \left\langle \sum_{l=0}^1 a_{l,I_{0,i}} B_{l,I_{0,i}}^1(t), \varphi_{0,k,I_{0,i}}^1(t) \right\rangle \quad \text{pour} \quad k=0,1 \quad \text{et} \quad \forall i \in N \quad (15)$$

## 5. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré qu'il est possible, dans le cas d'une grille irrégulière, de construire des bases orthonormées d'ondelettes et d'échelles à partir de fonctions B-splines non-uniformes de degré un. Le banc de filtres constant dans l'analyse multirésolution classique est remplacé par plusieurs filtres dont les coefficients dépendent de la position des nœuds dans la séquence initiale. Cette dépendance a été explicitée pour les splines de degré un. Une généralisation de l'analyse multirésolution à des degrés supérieurs à un de la fonction spline est à envisager, puisque nous savons que la qualité de l'interpolation est directement liée au degré de la spline. Les problèmes de nombres de fonctions (qui augmentent avec le degré) et de continuité des fonctions d'un intervalle à l'autre deviennent alors beaucoup plus importants. Il reste à étudier si l'augmentation du nombre de signaux de détails fait plus que compenser (ou

pas) l'amélioration de l'approximation. Ce travail sera rapporté.

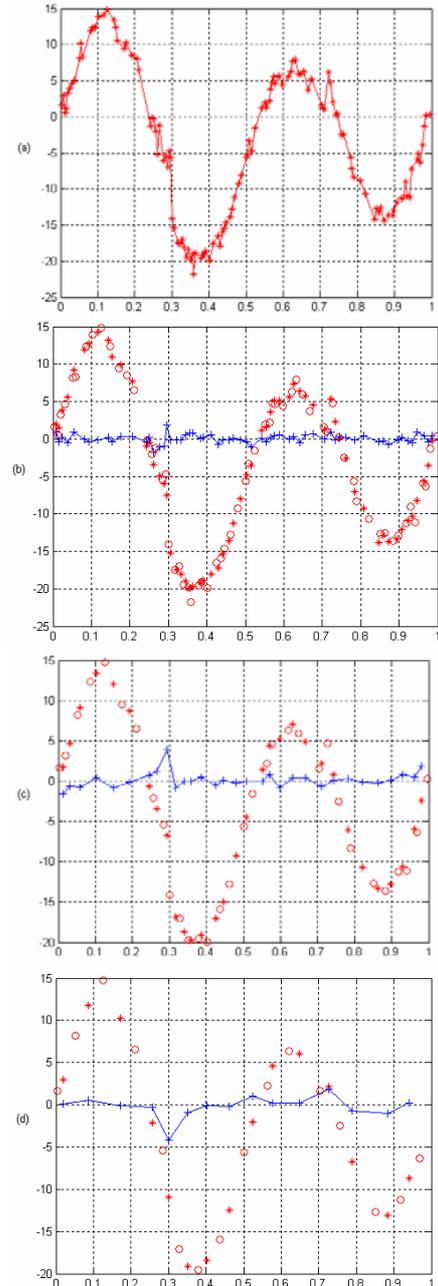


FIG. 4 : Analyse multirésolution  $j=1,2,3$

## Références

- [1] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing, second edition*, Ed. Academic Press, 1999.
- [2] M. Vetterli, Jelena Kovacevic. *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, 1995.
- [3] C. K Chui, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Ed. 1993.
- [4] O. Rioul, P. Duhamel, *Fast Algorithms for Wavelet Transform Computation*, chapter 8 in *Time-frequency and Wavelets in Biomedical Engineering*, pp. 211-242, M. Akay ed., IEEE Press, 1997.
- [5] C. De Boor, *A practical guide to splines*, revised edition, Ed. New York, springer-verlag, 2001.
- [6] N. Chihab, A. Zergainoh, P. Duhamel, J-P. Astruc, *The influence of the non-uniform spline basis on the approximation signal*, Eusipco, September 6-10 2004, Vienna, Austria.