

Un algorithme de Gradient Conjugué modifié pour le traitement Spatio-Temporel adaptatif en radar aéroporté

Hocine BELKACEMI¹, Hichem SEMIRA², Sylvie MARCOS¹

¹Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S) UMR-CNRS 8506
Supélec, 3 rue Joliot-Curie 91192 Gif-sur-Yvette France

²Département d'électronique
Université d'Annaba 23000 Algérie

belkacemi@lss.supelec.fr, se_hichem@yahoo.fr, marcos@lss.supelec.fr.

Résumé – L'algorithme du Gradient Conjugué (GC) a montré une efficacité équivalente à celle du filtrage de Wiener multi-étages (MSWF) [1, 2] pour compenser les interférences dans les systèmes de télécommunications. Dans cet article, nous proposons l'application du GC au problème du traitement spatio-temporel adaptatif en radar aéroporté. On présente aussi une version modifiée de l'algorithme du GC pour le filtrage du fouillis radar à faible support de données en utilisant le lissage *forward/backward* (f/b) pour l'estimation de la matrice de covariance. La version ainsi modifiée permet à la fois la compression en rang et la compression en support de données.

Abstract – The Conjugate Gradient (CG) algorithm has been shown to be as efficient as the Multistage Wiener Filter (MSWF) [1, 2] to compensate interferences in telecommunication systems. In this paper, we propose the application of the CG to interference suppression in Space-Time Adaptive Processing (STAP) radar. We also present a modified version of the algorithm for low sample support by using the forward/backward (f/b) averaging in the estimation of the covariance matrix. The new algorithm then allows both rank and sample support compression.

1 Introduction

La détection de cibles mobiles est l'un des objectifs essentiels de la télédétection notamment pour les applications radar. Les retours de la cible sont souvent mélangés avec de forts retours de fouillis de sol. Les performances en détection de cibles des radars MTI classiques se trouvent alors fortement dégradées par l'étalement Doppler des retours de fouillis, induits par le mouvement de la plateforme radar. Les cibles évoluant à faible vitesse peuvent, par conséquent, rester indétectables [3]. Le traitement adaptatif spatio-temporel (STAP) qui est une technique conçue pour résoudre ces problèmes inhérents aux techniques conventionnelles a récemment attiré l'attention de nombreux chercheurs dans la communauté radar. A la différence d'un formateur de voies classique (*beamformer*), le traitement STAP inclut une dimension temporelle et constitue un algorithme de filtrage bidimensionnel en angle et en Doppler.

Considérons un réseau spatio-temporel avec N capteurs uniformément espacés et M éléments de retard pour chaque capteur. Le vecteur de pondération optimal \mathbf{w}_{opt} de dimension NM qui maximise le rapport signal à interférence (*SINR*) à la sortie du réseau est donné par [4] $\mathbf{w}_{opt} = \kappa \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{s}$, où κ est une constante, \mathbf{R}_i est la matrice de covariance des interférences (fouillis, brouilleurs et bruit thermique) de dimension $NM \times NM$ et \mathbf{s} est le vecteur directionnel de la cible. Comme la matrice \mathbf{R}_i est inconnue dans la pratique, Reed et al. [4] ont proposé la méthode dite *Sample Matrix Inversion* (SMI) basée sur l'estimée de la matrice de covariance des interférences $\hat{\mathbf{R}}_i$. En général, les algorithmes sont choisis selon deux critères : (i) convergence ; (ii) coût de calcul. La méthode SMI présente une faible vitesse de convergence ($2NM$ échantillons pour un

SINR de 3dB au dessous de l'optimal) [4] et un coût de calcul élevé $O((NM)^3)$. Pour accélérer la convergence, les auteurs dans [5, 6] ont proposé des méthodes de sous-espaces basées sur la décomposition en valeurs propres (DVP) de \mathbf{R}_i . L'étude asymptotique de ces méthodes montre qu'on peut atteindre les mêmes performances que la méthode SMI avec seulement $2r$ échantillons où r est le rang de la matrice $\hat{\mathbf{R}}_i$, au lieu de $2NM$ avec un coût de calcul $O((NM)^3)$. Dans [7], Goldstein et al. ont proposé le filtrage de Wiener Multi-étages (MSWF). MSWF présente une compression du rang considérable comparé aux méthodes basées sur la DVP pour une vitesse de convergence comparable [8]. Récemment, l'équivalence entre le MSWF et le Gradient Conjugué a été établie [1] en se basant sur les sous-espaces de Krylov [9]. Dans cet article, nous proposons d'appliquer l'algorithme du gradient conjugué au traitement adaptatif spatio-temporel pour les radars aéroportés. Nous introduisons, en plus, une version modifiée du GC en utilisant le lissage *forward/backward* (f/b) [10] pour accélérer la convergence de l'algorithme. Le modèle des signaux est donné dans la section 2. Dans la section 3, on présente le principe du MSWF ainsi que quelques exemples de simulations. La section 4 introduit l'algorithme GC et la version modifiée. Enfin les performances de cette version sont testées dans la section 5, et la section 6 résume les principaux résultats.

2 Modèle des signaux

Le retour radar spatio-temporel \mathbf{x} , à une distance donnée est constitué de l'écho de la cible ainsi que d'interférences (fouillis, brouilleurs et bruit thermique) [3]

$$\mathbf{x} = \alpha_t \mathbf{v}_t + \mathbf{n} \quad (1)$$

où

- $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{MN}]^T$ est le vecteur des sorties du réseau spatio-temporel
- α_t et $\mathbf{v}_t \equiv \mathbf{v}(\varpi_t, \nu_t)$ sont le facteur d'atténuation et le vecteur directionnel de la cible respectivement, associés aux paramètres spatial ϖ_t et Doppler ν_t

$$\mathbf{v}(\varpi_t, \nu_t) = \mathbf{b}(\varpi_t) \otimes \mathbf{a}(\nu_t) \quad (2)$$

où

- $\mathbf{a}(\nu_t) = [1 \ e^{j2\pi\nu_t} \dots \ e^{j2\pi(M-1)\nu_t}]^T$ est le vecteur directionnel temporel $\nu_k = \frac{f_k}{f_r}$, f_t est la fréquence Doppler de la cible et f_r est la fréquence de transmission du radar.
- $\mathbf{b}(\varpi_t) = [1 \ e^{j2\pi\varpi_t} \dots \ e^{j2\pi(N-1)\varpi_t}]^T$ est le vecteur directionnel spatial ($\varpi_t = \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_t)$), d est la distance de séparation entre les éléments de l'antenne, λ est la longueur d'onde et θ_t est l'azimuth de la cible).
- $\mathbf{n} = [n_1, \dots, n_{MN}]^T$

Le vecteur des interférences \mathbf{n} est composé du fouillis \mathbf{n}_c du bruit thermique \mathbf{n}_b supposé blanc et de brouilleurs \mathbf{n}_j .

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_c + \mathbf{n}_b + \mathbf{n}_j \quad (3)$$

En supposant que ces composantes sont non corrélées, on a

$$\mathbf{R}_i = E\{\mathbf{nn}^H\} = \mathbf{R}_c + \sigma^2 \mathbf{I}_{NM} + \sum_{i=1}^{N_j} \mathbf{R}_j(i) \quad (4)$$

où N_j est le nombre de brouilleurs et $\mathbf{R}_j(i)$ est la matrice de covariance du i -ème brouilleur, \mathbf{R}_c la matrice de covariance du fouillis, σ^2 est la variance du bruit et \mathbf{I}_{NM} la matrice identité de dimension $NM \times NM$.

3 Filtre à Multi-étages de Wiener

La matrice de covariance \mathbf{R}_i est généralement de rang faible (voir figure 1(a)). Les algorithmes de sous-espaces exploitent cette propriété pour supprimer les interférences. L'idée de base est de décomposer l'espace total des observations en deux sous-espaces : le sous-espace interférence qui correspond aux vecteurs propres dominants et le sous-espace complémentaire appelé sous-espace bruit. Dans des environnements radar réels, la dimension du sous-espace interférence est affectée par plusieurs paramètres. Les figures 1(a) et 1(b) montrent, respectivement, l'effet de la présence de brouilleurs et le mouvement interne du fouillis radar (*internal clutter motion* ou ICM) sur la dimension du sous-espace interférence. Il est connu [5] que la sous-estimation du rang introduit des grandes pertes en SINR rendant inefficace les algorithmes basés sur la DVP. Pour pallier à ce problème, Goldstein et al. [11] ont proposé l'algorithme de Wiener à multi-étages (MSWF). Cet algorithme est basé sur la structure classique du filtre de Wiener.

La figure 2 illustre une structure standard du MSWF à 3 étages. En général, le MSWF revient à transformer la matrice de covariance $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}$ (où \mathbf{x}_0 est l'observation à la sortie de la matrice de blocage \mathbf{B}_0) à rang complet en une matrice à rang réduit \mathbf{R}_d où $\mathbf{d} = \mathbf{L}^H \mathbf{x}_0$ [12] (voir figure 3), la matrice résultante \mathbf{R}_d est alors donnée par

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{L} \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{L}^H \quad (5)$$

où \mathbf{L} est la matrice de transformation

$$\mathbf{L}^H = \left[\mathbf{h}_1 \ \mathbf{B}_1^H \mathbf{h}_2 \ \mathbf{B}_1^H \mathbf{B}_2^H \mathbf{h}_3 \ \dots \ \prod_{i=1}^r \mathbf{B}_i^H \mathbf{h}_r \right] \quad (6)$$

où les $\mathbf{h}_i = \frac{\mathbf{r}_{\mathbf{x}_{i-1} d_{i-1}}}{\|\mathbf{r}_{\mathbf{x}_{i-1} d_{i-1}}\|}$ sont définis comme les inter-corrélations normalisées entre le signal de référence d_{i-1} et le vecteur observé \mathbf{x}_{i-1} de chaque étage avec le précédent et $\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H$ sont les matrices de blocage. Le rang du filtre MSWF correspond au nombre d'étages retenus après une troncature à un rang r qui peut être choisi de manière adaptative [13].

Le vecteur de pondération \mathbf{w} pour un filtre à rang r est donné par [11]

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} - \mathbf{B}_0^H \mathbf{L} \mathbf{w}_{mswf} \quad (7)$$

$$\mathbf{w}_{mswf} = \mathbf{R}_d^{-1} \mathbf{r}_{\mathbf{d}d_0} \quad (8)$$

où $\mathbf{r}_{\mathbf{d}d_0} = E[\mathbf{d}d_0^H]$ avec $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_r]$

4 Algorithme du Gradient Conjugué

L'algorithme de gradient conjugué (GC) consiste à ramener la résolution du système linéaire de Wiener-Hopf à celui de la minimisation de la fonction de coût [9]

$$\phi(\mathbf{w}_{GC}) = \mathbf{w}_{GC}^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{w}_{GC} - 2\Re(\mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 d_0} \mathbf{w}_{GC}) \quad (9)$$

La table 1 résume une version itérative du gradient conjugué où les \mathbf{p}_i sont les vecteurs de recherche du GC qui sont $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}$ -conjugués

$$\mathbf{p}_i \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{p}_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad (10)$$

\mathbf{w}_i est le vecteur de pondération à l'itération i . Le GC conjugué est équivalent aussi à appliquer une transformation de réduction du rang \mathbf{T}_{CG} à la matrice de covariance $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}$, cette transformation est décrite par les vecteurs de recherche du GC \mathbf{p}_i

$$\mathbf{T}_{CG} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_D] \quad (11)$$

Une propriété du MSWF identifiée dans [1, 2] est que la matrice de transformation donnée par l'équation (6) et la matrice \mathbf{T}_{CG} engendrent le même sous-espace de Krylov $\mathcal{K}^D(\mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 d_0}, \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0})^1$ entraînant l'équivalence des solutions du MSWF et du GC.

L'avantage du GC par rapport au MSWF est qu'on peut avoir le vecteur de pondération à chaque itération (étage) ce qui permet d'implanter un test d'arrêt (version adaptative). Pour accélérer la convergence du GC en support de données nous proposons d'estimer la matrice de covariance par un lissage (f/b) [10] comme résumé dans la table 2 où $\mathbf{R}_f(n)$ et $\mathbf{R}_b(n)$ sont les matrices de covariance *forward* et *backward* à l'itération n . Les avantages de notre approche sont que d'une part, on aura une compression du rang par le GC et, d'autre part, une compression en support de données.

5 Simulations et Résultats

Comme mesure de performances, on prend la perte en SINR ($SINR_{Loss}$) [3] à la sortie du réseau

$$SINR_{Loss} = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{s}|}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_i \mathbf{w}} \quad (12)$$

Les simulations ont été réalisées sur 100 réalisations de Monte Carlo, l'antenne est linéaire à $N=14$ éléments et $M=16$ impulsions. Le fouillis radar est supposé gaussien

¹ $\mathcal{K}^D(\mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 d_0}, \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}) \equiv \text{span}\{\mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 d_0}, \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 d_0}, \dots, \mathbf{R}_{\mathbf{x}_0}^{D-1} \mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 d_0}\}$

$\mathbf{w}_0(n) = 0, \mathbf{p}_1(n) = \mathbf{g}_0(n) = \mathbf{r}_{\mathbf{x}_0 \mathbf{d}_0}$ $\rho_0(n) = \mathbf{g}_0(n)^H \mathbf{g}_0(n)$ $\mathbf{R}(n) = \mathbf{R}(n-1) + \mu \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)$ <p>for $i = 1$ to D do</p> $\mathbf{z}_i(n) = \mathbf{R}(n) \mathbf{p}_i(n)$ $\alpha_i(n) = \frac{\rho_i(n)}{\mathbf{p}_i(n)^H \mathbf{z}_i(n)}$ $\mathbf{w}_i(n) = \mathbf{w}_{i-1}(n) + \alpha_i(n) \mathbf{p}_i(n)$ $\mathbf{g}_i(n) = \mathbf{g}_{i-1}(n) - \alpha_i(n) \mathbf{z}_i(n)$ $\rho_i(n) = \mathbf{g}_i(n)^H \mathbf{g}_i(n)$ $\delta_i(n) = \frac{\rho_i(n)}{\rho_{i-1}(n)}$ $\mathbf{p}_{i+1}(n) = \mathbf{g}_i(n) + \delta_i(n) \mathbf{p}_i(n)$ <p>End for</p>

TAB. 1 – Algorithme du Gradient Conjugué itératif

$\mathbf{R}_f(n) = \mathbf{R}_f(n-1) + \mu \mathbf{x}_f(n) \mathbf{x}_f^H(n)$ $\mathbf{R}_b(n) = \mathbf{R}_b(n-1) + \mu \mathbf{x}_b(n) \mathbf{x}_b^H(n)$ $\mathbf{R}_{fb}(n) = 0.5(\mathbf{R}_b(n) + \mathbf{R}_f(n))$

TAB. 2 – Estimation de \mathbf{R}_i par lissage *Forward/Backward*

avec un rapport fouillis sur bruit CNR=40 dB en présence de 4 brouilleurs avec les paramètres suivants : rapport brouilleur à bruit JNR=[40 30 40 30] dB et angles azimuth [45° -30° -45° 60°]. Le signal désiré est à 0° en azimuth avec un SNR=0 dB.

Dans les figures 4 et 5, on compare les performances du MSWF pour une matrice de covariance théorique connue avec les algorithmes basés sur la DVP (composantes principales (PC) et Cross spectral Metric (CSM)). Dans les deux cas, présence de brouilleurs ou ICM, les figures montrent bien la compression en rang du MSWF.

La figure 6 montre une comparaison des trois algorithmes MSWF, GC itératif comme décrit dans la table 1 et PC en fonction du rang. On constate que le gain apporté par le GC en SINR est important par rapport au PC et que le GC maintient ce gain lorsque le rang est surestimé. La figure 7 montre bien que les performances du GC avec lissage f/b dépassent celles du GC en terme de support de données.

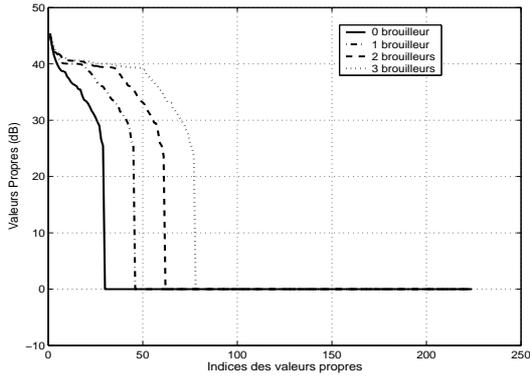
6 Conclusion

Nous avons montré dans cet article que les algorithmes à rang réduit convergent plus vite que les algorithmes basés sur la décomposition en valeur propres de la matrice de covariance (PC, CSM). Nous avons appliqué aussi le gradient conjugué dans le contexte du STAP, les résultats de simulations ont montré l'efficacité de cet algorithme et sa robustesse vis à vis du rang et nous avons montré aussi que l'on peut améliorer la convergence du gradient conjugué en terme du nombre de données en utilisant le lissage f/b.

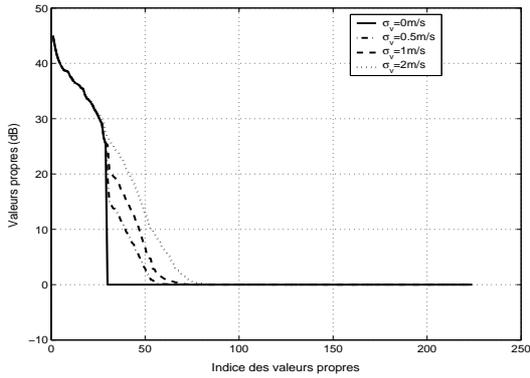
Références

- [1] G. Dietel, M. Zoltowski, and M. Joham, "Reduced-rank equalization for EDGE via conjugate gradient implementation of multi-stage nested Wiener filter," *In Proc. of 54th IEEE Vehicular Technology Conference*.
- [2] S. Burykh and K. Abed-Meraim, "Reduced-rank adaptive filtering using Krylov subspace," *EURASIP JASP*, vol. 2002, no. 12, pp. 1387–1400, Dec. 2002.

- [3] J. Ward, "Space-time adaptive processing for airborne radar," Lincoln Laboratory, Technical report 1015, December 1994.
- [4] L. E. Brennan and I. S. Reed, "Theory of adaptive radar," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-9, pp. 237–252, Mar. 1973.
- [5] A. M. Haimovitch, "Eigenanalysis-based space-time adaptive radar : Performance analysis," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 33, pp. 1170–1179, October 1997.
- [6] J. Goldstein and I. Reed, "Reduced-rank adaptive filtering," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 492–496, Feb. 1997.
- [7] J. Goldstein, I. Reed, and P. Zulch, "Multistage partially adaptive STAP CFAR detection algorithm," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 35, no. 2, pp. 645–662, April 1999.
- [8] J. Hiemstra, "Robust implementation of the multistage Wiener filter," Ph.D. dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, April 2003.
- [9] G. Golub and C. V. Loan, *Matrix computations*, 3rd ed. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1996.
- [10] M. Zatman and D. Marshall, "Forward-backward averaging in the presence of array manifold errors," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, no. 11, pp. 1700–1704, Nov 1998.
- [11] J. Goldstein, I. Reed, and L. Sharf, "A multistage representation of Wiener filter based on orthogonal projections," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 44, no. 7, pp. 2943–2959, Nov. 1998.
- [12] J. Guerci, J. Goldstein, and I. Reed, "Optimal and adaptive reduced-rank STAP," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 36, no. 2, pp. 647–661, April 2000.
- [13] M. Honig and J. Goldstein, "Adaptive reduced-rank interference suppression based on the multistage Wiener filter," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 6, pp. 986–994, June 2002.



(a)



(b)

FIG. 1 – Paramètres affectant la dimension du sous-espace interférence (a) Effet des brouilleurs (b) Effet du mouvement interne du fouillis (ICM)

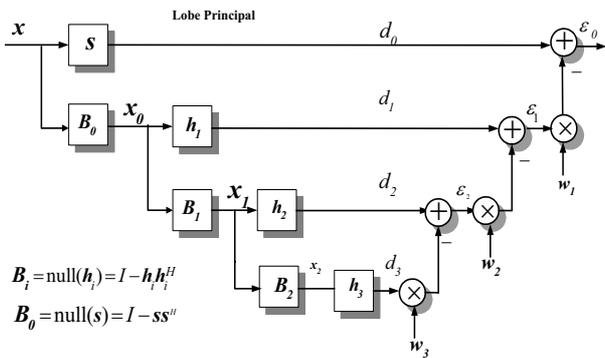


FIG. 2 – Illustration d'un Filtre de Wiener à 3 étapes

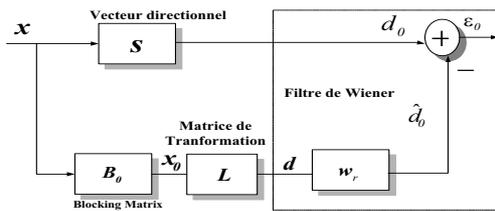


FIG. 3 – Illustration du Filtrage à rang réduit

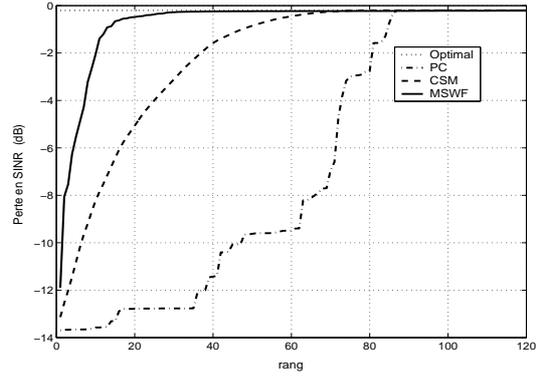


FIG. 4 – Perte en SINR en fonction du rang pour une matrice de covariance connue avec les paramètres suivants (a) En présence de 4 brouilleurs à $[-60^\circ -30^\circ 45^\circ 60^\circ]$ avec JNR $[40 30 40 30]$ dB respectivement

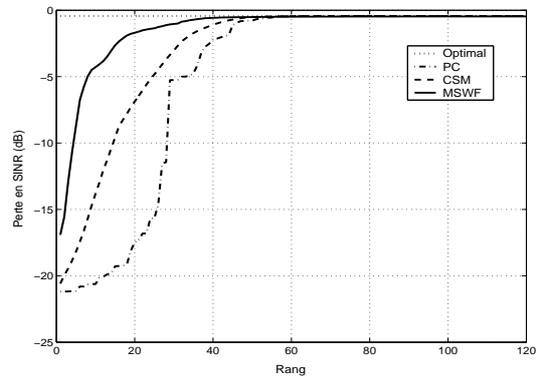


FIG. 5 – Perte en SINR en fonction du rang pour une matrice de covariance connue en présence du mouvement interne du fouillis (ICM) avec une vitesse du vent $\sigma_v = 1m/s$.

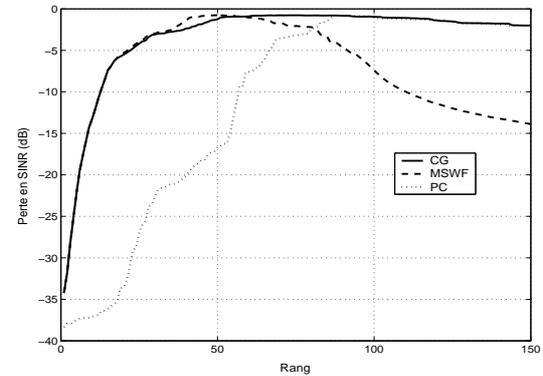


FIG. 6 – Perte en SINR en fonction du rang pour PC, MSWF et GC itératif pour 200 échantillons

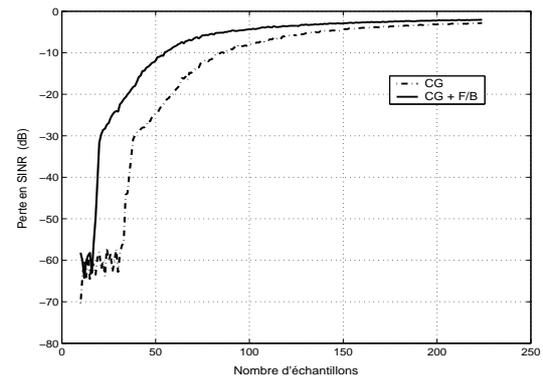


FIG. 7 – Perte en SINR en fonction du nombre d'échantillons pour GC et GC avec lissage (f/b), $r=80$