

Déconvolution PSK par échantillonnage de Gibbs

Eric FILLEAU¹

¹Laboratoire des Images et des Signaux (UMR 5083)
ENSIEG-LIS, rue de la houille blanche, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France
eric.filleau@lis.inpg.fr

Résumé – Dans le contexte des communications numériques, nous proposons un algorithme permettant l'égalisation aveugle d'un canal légèrement variable au cours du temps en utilisant l'échantillonnage de Gibbs. Le message émis est ainsi reconstruit à partir d'échantillons simulés selon la loi conditionnelle au signal reçu.

Abstract – In the context of numerical communication, we propose an algorithm allowing the blind equalization of a channel temporally slowly varying, using Gibbs sampling. The emitted message is then built from the simulated samples following the law conditioned by the received signal.

Introduction

Un signal issu d'une modulation PSK est transmis à travers un canal de réponse impulsionnelle finie évoluant lentement au cours du temps, et dont la longueur est connue. Nous nous proposons d'estimer conjointement les symboles émis et la réponse impulsionnelle du canal à partir d'un bloc d'observations bruitées du signal. La technique employée est similaire à celle de [3] qui considère un canal constant et elle utilise l'échantillonnage de Gibbs [5] [2].

1 Modélisation

La traduction mathématique des hypothèses précédentes nous amène à la modélisation suivante pour le signal reçu :

$$y_k^c = \exp(i\phi_k) \sum_{j=0}^{L-1} h^j \exp(i \frac{2\pi\theta_{k-j}}{n_e}) + b_k^c \quad (1)$$

où (b_k^c) est une séquence blanche gaussienne centrée complexe circulaire de puissance connue $2\sigma^2$, L est la longueur du canal inconnu $H = [h^0 \dots h^{L-1}]$ correspondant au filtre et (θ_k) une séquence blanche de variables aléatoires uniformes sur l'ensemble discret $[0..n_e - 1]$ correspondant aux symboles. n_e désigne le nombre d'états de la modulation. ϕ_k désigne une phase inconnue correspondant à la variation temporelle du canal qui suit l'équation d'évolution suivante :

$$\phi_k = \phi_{k-1} + v_k$$

v_k étant une séquence blanche gaussienne centrée de puissance connue μ^2 . Si on suppose la variation de phase faible, c'est à dire μ et donc v_k petits, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \exp(i\phi_k) &= \exp(i(\phi_{k-1} + v_k)) \\ &\approx \exp(i\phi_{k-1})(1 + iv_k) \end{aligned}$$

et, en posant $H_k^c = \exp(i\phi_k)H^T$, on obtient :

$$\begin{aligned} H_k^c &= \begin{bmatrix} h_k^0 \\ \vdots \\ h_k^{L-1} \end{bmatrix} \\ &= \exp(i\phi_{k-1})(1 + iv_k)H^T \\ &= H_{k-1}^c + iH_{k-1}^c v_k \end{aligned}$$

on définit $X_k^c = [\exp(i \frac{2\pi\theta_k}{n_e}) \dots \exp(i \frac{2\pi\theta_{k-L+1}}{n_e})]$ et on arrive à la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} H_k^c &= H_{k-1}^c + iH_{k-1}^c v_k \\ y_k^c &= X_k^c H_k^c + b_k^c \end{aligned} \quad (2)$$

2 Estimation

Etant données $k+1$ observations $Y_0^k = (y_0^c, \dots, y_k^c)$, notre objectif est de déterminer la séquence de symboles $\theta_0^k = (\theta_0, \dots, \theta_k)$.

La suite de canaux $H_0^k = (H_0^c, \dots, H_k^c)$ est inconnue, nous devons par conséquent considérer la densité de probabilité conjointe des canaux et des symboles conditionnelle aux observations $p(\theta_0^k, H_0^k | Y_0^k)$.

Nous allons simuler cette densité et ainsi générer un certain nombre de séquences de symboles $(\theta_0^k)^i$ et de canaux $(H_0^k)^i$. Nous pourrions dès lors estimer pour chaque instant $t \in [0..k]$ le symbole θ_t en choisissant le plus fréquemment tiré.

3 Echantillonnage de Gibbs

L'échantillonnage de Gibbs est une méthode MCMC (Monte Carlo Markov Chain) qui permet de simuler des lois de probabilité multidimensionnelle. Le principe est le suivant : prenons une distribution d'intérêt $p(x_1, \dots, x_n)$ et supposons que l'on puisse simuler les lois conditionnelles $p(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ pour $j \in [1..n]$. Considérons

maintenant la chaîne de markov (x_1^i, \dots, x_n^i) définie par la transition suivante :

$$\begin{aligned} x_1^i &\sim p(x_1|x_2^{i-1}, \dots, x_n^{i-1}) \\ &\vdots \\ x_j^i &\sim p(x_j|x_1^i, \dots, x_{j-1}^i, x_{j+1}^{i-1}, \dots, x_n^{i-1}) \\ &\vdots \\ x_n^i &\sim p(x_n|x_1^i, \dots, x_{n-1}^i) \end{aligned}$$

où \sim signifie 'tiré selon'. Après un temps i_0 de convergence, les échantillons successifs (x_1^i, \dots, x_n^i) suivent alors la loi de distribution d'intérêt.

Appliquons ce schéma à la distribution recherchée, à savoir $p(\theta_0^k, H_0^k | Y_0^k)$. Partant d'une séquence $(\theta_0^k)^0$ quelconque et de $i = 0$, on itère selon i avec la transition suivante :

$$\begin{aligned} (H_0^k)^i &\sim p(H_0^k | (\theta_0^k)^i, Y_0^k) \\ (\theta_0^k)^{i+1} &\sim p(\theta_0^k | (H_0^k)^i, Y_0^k) \end{aligned}$$

Donc, en simulant les deux lois $p(H_0^k | \theta_0^k, Y_0^k)$ et $p(\theta_0^k | H_0^k, Y_0^k)$, on est en mesure de générer les échantillons $(\theta_0^k)^i$ désirés. Les deux sections suivantes décrivent la manière de simuler les densités précédentes.

4 Simulation de $p(H_0^k | \theta_0^k, Y_0^k)$

Dans toute cette section, les symboles θ_0^k ayant une valeur fixée, ils sont considérés comme des paramètres du modèle. Nous allons maintenant fournir quelques formules nécessaires à la génération des canaux. Pour cela nous passons à des quantités réelles en posant :

$$H_k = \begin{bmatrix} \text{Re}(h_k^0) \\ \text{Im}(h_k^0) \\ \vdots \\ \text{Re}(h_k^{L-1}) \\ \text{Im}(h_k^{L-1}) \end{bmatrix} \quad H_k^p = \begin{bmatrix} -\text{Im}(h_k^0) \\ \text{Re}(h_k^0) \\ \vdots \\ -\text{Im}(h_k^{L-1}) \\ \text{Re}(h_k^{L-1}) \end{bmatrix}$$

$$X_k = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi\theta_k}{n_e}) & \sin(\frac{2\pi\theta_k}{n_e}) \\ -\sin(\frac{2\pi\theta_k}{n_e}) & \cos(\frac{2\pi\theta_k}{n_e}) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\frac{2\pi\theta_{k-L+1}}{n_e}) & \sin(\frac{2\pi\theta_{k-L+1}}{n_e}) \\ -\sin(\frac{2\pi\theta_{k-L+1}}{n_e}) & \cos(\frac{2\pi\theta_{k-L+1}}{n_e}) \end{bmatrix}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} \text{Re}(y_k^c) \\ \text{Im}(y_k^c) \end{bmatrix} \quad b_k = \begin{bmatrix} \text{Re}(b_k^c) \\ \text{Im}(b_k^c) \end{bmatrix}$$

La modélisation (2) devient alors :

$$H_k = H_{k-1} + H_{k-1}^p v_k \quad (3)$$

$$y_k = X_k^T H_k + b_k \quad (4)$$

Sachant que $p(H_0^{i-1} | H_i, H_{i+1}, \theta_0^k, Y_0^i) = p(H_0^{i-1} | H_i, \theta_0^k, Y_0^{i-1})$, on établit la récurrence suivante pour $i \in [0..k-1]$:

$$\begin{aligned} p(H_0^i | H_{i+1}, \theta_0^k, Y_0^i) = \\ p(H_0^{i-1} | H_i, \theta_0^k, Y_0^{i-1}) p(H_i | H_{i+1}, \theta_0^k, Y_0^i) \end{aligned}$$

que l'on itère pour trouver :

$$p(H_0^k | \theta_0^k, Y_0^k) = p(H_k | \theta_0^k, Y_0^k) \prod_{i=1}^{k-1} p(H_i | H_{i+1}, \theta_0^k, Y_0^i) \quad (5)$$

A partir de cette formule, on va réaliser l'échantillonnage arrière des canaux (Backward Sampling) en tirant H_k suivant $p(H_k | \theta_0^k, Y_0^k)$ puis H_{k-1} sachant H_k et ainsi de suite jusqu'à H_0 . Cette technique est utilisée dans [2] et permet une simulation efficace de $p(H_0^k | \theta_0^k, Y_0^k)$ car les densités $p(H_i | H_{i+1}, \theta_0^k, Y_0^i)$ pour $i \in [0..k-1]$ sont facilement accessibles à partir de la densité de filtrage.

Les valeurs des symboles, donc des X_k , étant données, le modèle défini par les équations (3) et (4) devient pratiquement linéaire (seule la covariance du bruit dans (3) dépend de l'état H_k). On utilise alors le filtre de Kalman étendu [1], pour obtenir une bonne approximation de la moyenne $\bar{H}_i = E[H_i | \theta_0^k, Y_0^i]$ et de la covariance $P_i = E[(H_i - \bar{H}_i)(H_i - \bar{H}_i)^T | \theta_0^k, Y_0^i]$ de filtrage. Ces quantités sont ainsi évaluées récursivement partant de $i = 0$ grâce au jeu d'équations suivant (voir la définition de H_k^p en début de section pour \bar{H}_{i-1}^p) :

$$\begin{aligned} P_i^\sim &= P_{i-1} + \mu^2 \bar{H}_{i-1}^p \bar{H}_{i-1}^{pT} \\ K_i &= P_i^\sim X_k (X_k^T P_i^\sim X_k + \sigma^2 I)^{-1} \\ P_i &= (I - K_i X_k^T) P_i^\sim \\ \bar{H}_i &= \bar{H}_{i-1} + K_i (y_i - X_k^T \bar{H}_{i-1}) \end{aligned}$$

\bar{H}_{-1} et P_{-1} étant donnés par l'utilisateur.

Itérant le filtre de Kalman pour l'observation H_{i+1} de H_i , nous obtenons :

$$\begin{aligned} G_i &= P_i P_{i+1}^{-1} \\ \hat{H}_i &= E[H_i | H_{i+1}, \theta_0^k, Y_0^i] \\ &= \bar{H}_i + G_i (H_{i+1} - \bar{H}_i) \\ \hat{P}_i &= E[(H_i - \hat{H}_i)(H_i - \hat{H}_i)^T | H_{i+1}, \theta_0^k, Y_0^i] \\ &= \bar{P}_i - G_i \bar{P}_i \end{aligned}$$

Pour générer H_i on approche la densité $p(H_i | H_{i+1}, \theta_0^k, Y_0^i)$ par la gaussienne de paramètres \hat{H}_i et \hat{P}_i . On arrive alors à l'expression :

$$H_i = \hat{H}_i + \sqrt{\hat{P}_i} r_i$$

où r_i est une séquence de longueur $2L$, gaussienne, décorrélée, centrée et de puissance unité.

5 Simulation de $p(\theta_0^k | H_0^k, Y_0^k)$

Dans cette partie, ce sont cette fois les canaux H_0^k qui ont une valeur fixée. Pour réaliser le tirage des symboles selon $p(\theta_0^k | H_0^k, Y_0^k)$, on va utiliser un second échantillonneur de Gibbs. Pour cela, partant d'une séquence de symboles quelconque $(\theta_0^k)^0$ et de $n = 1$, on itère la transition sui-

vante :

$$\begin{aligned} (\theta_0)^n &\sim p(\theta_0 | (\theta_1^k)^{n-1}, Y_0^k, H_0^k) \\ &\vdots \\ (\theta_i)^n &\sim p(\theta_i | (\theta_0^{i-1})^n, (\theta_{i+1}^k)^{n-1}, Y_0^k, H_0^k) \\ &\vdots \\ (\theta_k)^n &\sim p(\theta_k | (\theta_0^{k-1})^n, Y_0^k, H_0^k) \end{aligned}$$

où $\theta_p^{p+q} = (\theta_p, \dots, \theta_{p+q})$. Au bout d'un temps n_0 , $(\theta_0^k)^{n_0}$ est alors distribuée selon $p(\theta_0^k | H_0^k, Y_0^k)$.

De par le caractère discret fini des symboles, le calcul de $p(\theta_i | \theta_0^{i-1}, \theta_{i+1}^k, Y_0^k, H_0^k)$ est très simple. Utilisant la règle de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} p(\theta_i | \theta_0^{i-1}, \theta_{i+1}^k, Y_0^k, H_0^k) &= \\ \frac{p(Y_0^k | \theta_0^k, H_0^k) p(\theta_i | \theta_0^{i-1}, \theta_{i+1}^k, H_0^k)}{p(Y_0^k | \theta_0^{i-1}, \theta_{i+1}^k, H_0^k)} \end{aligned}$$

La séquence (b_k) est blanche, on peut donc écrire :

$$p(Y_0^k | \theta_0^k, H_0^k) = \prod_{j=1}^k p(y_j | \theta_{j-L+1}^j, H_0^k) \quad (6)$$

où :

$$p(y_j | \theta_{j-L+1}^j, H_0^k) \propto \exp\left(-\frac{(y_j - X_j^T H_j)^T (y_j - X_j^T H_j)}{2\sigma^2}\right)$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} p(Y_0^k | \theta_0^{i-1}, \theta_{i+1}^k, H_0^k) &= \\ \sum_{l=0}^{n_e-1} p(Y_0^k | \theta_0^{i-1}, \theta_i = l, \theta_{i+1}^k, H_0^k) p(\theta_i = l | \theta_0^{i-1}, \theta_{i+1}^k, H_0^k) \end{aligned} \quad (7)$$

θ_i est indépendant des H_j et des autres θ_j . De plus, il n'intervient que dans les termes pour j allant de i à $i+L-1$ du produit de (6). Utilisant (7), nous obtenons :

$$p_i(l) = \frac{\prod_{j=i}^{i+L-1} p(y_j | \theta_{j-L+1}^j, \theta_i = l, \theta_{i+1}^j, H_0^k)}{\sum_{l=0}^{n_e-1} \prod_{j=i}^{i+L-1} p(y_j | \theta_{j-L+1}^j, \theta_i = l, \theta_{i+1}^j, H_0^k)}$$

où $p_i(l)$ désigne la probabilité $p(\theta_i = l | \theta_0^{i-1}, \theta_{i+1}^k, Y_0^k, H_0^k)$. Le tirage du symbole θ_i est réalisé simplement avec la loi discrète $p_i(l)$, $l \in [0..n_e - 1]$.

6 Algorithme

L'algorithme de reconstruction de la séquence de symboles émise est synthétisé sur la figure 1.

On fixe un nombre total d'itérations N et un seuil i_0 à partir duquel on commence l'estimation. Elle est donc effectuée avec $N - i_0$ séquences de symboles. On doit aussi fixer le nombre n_0 d'itérations de l'échantillonneur des symboles. On notera que l'algorithme de [3] correspond à la séquence d'initialisation $(\theta_0^k)_0 = (\theta_0^k)^i$ et $n_0 = 1$.

7 Résultats

L'algorithme a été testé sur des données simulées du modèle de signal initial (1). Les conditions de simulation

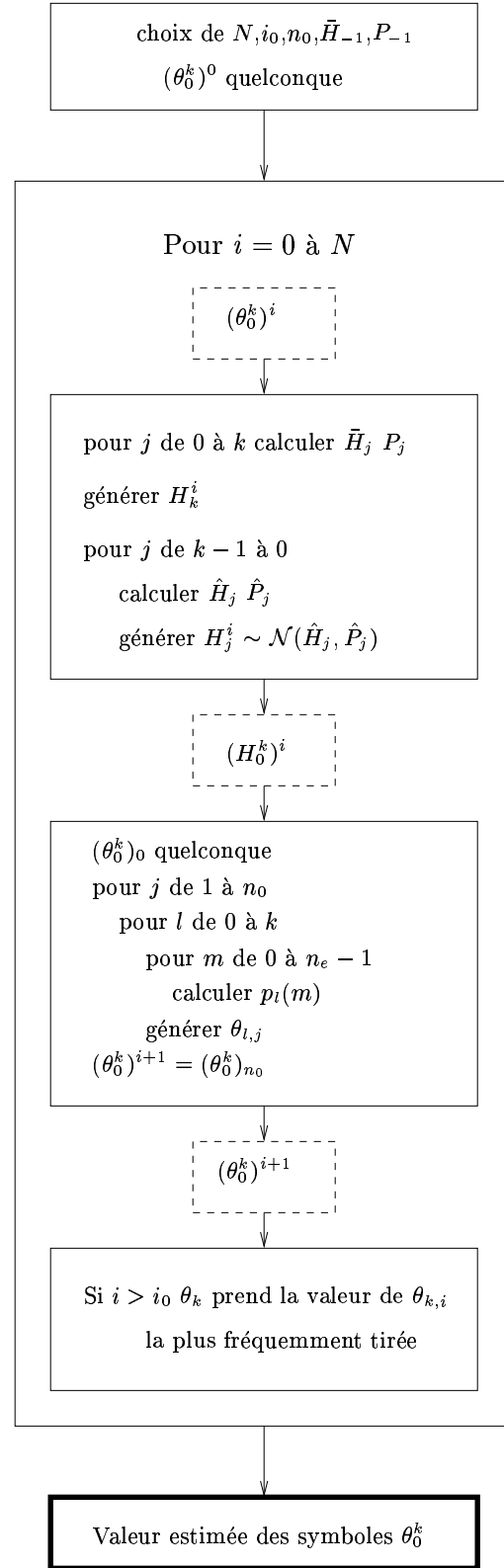


FIG. 1 – Algorithme de déconvolution.

sont un écart-type μ de 0.07 pour la séquence de bruit de phase (v_k), un canal H de coefficients $(0.6, -0.3i, 0.7i, -0.3)$, $\sigma = 0.2$ soit un rapport signal à bruit d'observation $10 \log \frac{H^* H}{2\sigma^2}$ de 11dB et une modulation 4PSK ($n_e = 4$).

On a supposé que la longueur L du canal était de 5 coefficients et on a fixé le nombre n_0 d'itérations de l'échantillonneur des symboles à 25.

On peut voir sur la figure 2, 300 séquences de symboles générées par l'algorithme à partir de 250 observations du signal. On voit qu'au bout d'un certain nombre d'itérations l'échantillonneur s'accroche à une séquence et n'en varie presque plus. L'estimateur de la séquence émise sur les 50 dernières itérations donne une seule erreur.

La figure 3 montre le module des coefficients des canaux estimés grâce aux échantillons simulés. On retrouve bien 4 coefficients aux bonnes valeurs et un presque nul à une extrémité. La moindre qualité sur les premiers et derniers instants est due au fait que les symboles ne sont que partiellement observés.

Enfin, sont tracées sur la figure 4 la phase du modèle simulé ϕ_k et celle du coefficient de plus grand module correspondant à l'argument de ce dernier.

La méthode présentée permet l'égalisation aveugle d'un canal de transmission lentement variable à partir d'un seul capteur. Etant donné l'espace des possibilités (n_e^{temps} pour les seuls symboles), elle semble converger assez rapidement vers la solution. La modélisation nécessite la connaissance des deux paramètres μ et σ (leur réglage s'avère cependant assez souple), ce qui est assez restreint par rapport au modèle AR classiquement utilisé [7].

Références

- [1] C.K. Chui G. Chen, "Kalman Filtering", *Springer Series in Information Sciences*, 1987.
- [2] A. Doucet P. Duvaut, "Bayesian Estimation of State Space Models Applied to Deconvolution of Bernoulli-Gaussian Processes", *Signal Processing*, vol. 57, 1997, pp 147-161.
- [3] R. Chen T. Li, "Blind Restoration of Linearly Degraded Discrete Signals by Gibbs Sampling", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 10, 1995, pp 2410-2413.
- [4] J.Liu R.Chen "Blind deconvolution via sequential imputations", *J. Am. Stat. Assoc.*, vol. 90, no. 430, pp. 567-576, 1995.
- [5] C.K. Carter R. Kohn, "On Gibbs Sampling for State Space Models", *Biometrika*, vol. 81, no. 3, 1994, pp 541-553.
- [6] C.K. Carter R. Kohn, "Markov Chain Monte Carlo Methods in Conditionnally Gaussian State Space Models", *Biometrika*, vol. 83, 1996, pp 589-601.
- [7] I.B. Collings J.B. Moore "An adaptative hidden Markov model approach to FM and M-ary DPSK demodulation in noisy fading channels", *Signal Processing*, vol. 47, no. 1, pp. 71-84, 1995.

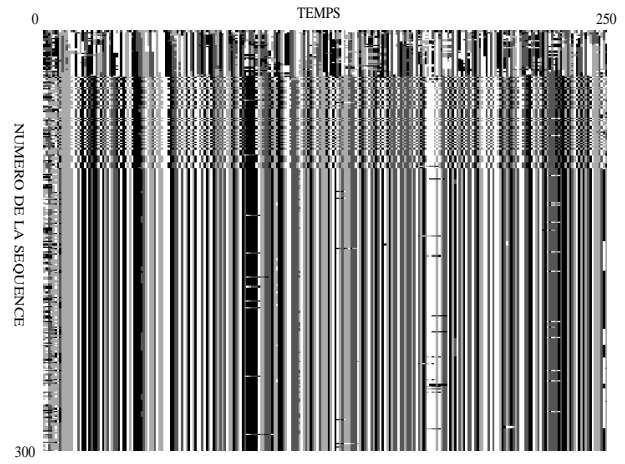


FIG. 2 – Symboles générés par l'échantillonneur. L'intensité du gris correspond à la valeur du symbole (4 états).

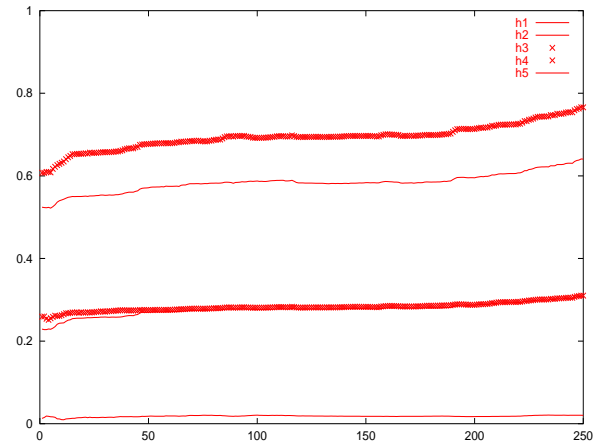


FIG. 3 – Module des coefficients des canaux.

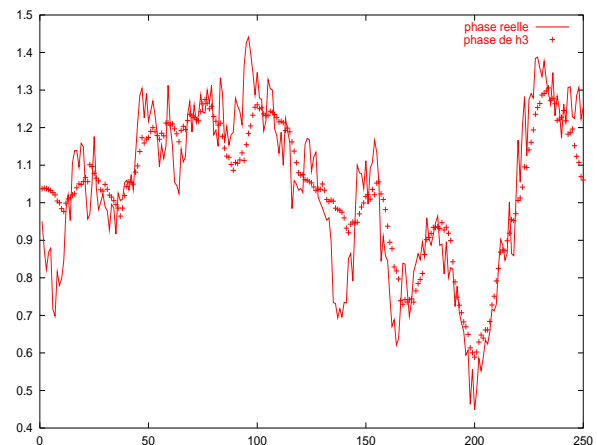


FIG. 4 – Phases réelle et estimée à partir du coefficient de plus grand module.