

# Compensation des réponses en fréquences des capteurs en séparation aveugle de sources

Massoud BABAIE-ZADEH<sup>1,2</sup>, Christian JUTTEN<sup>1</sup>, Kambiz NAYEBI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), Laboratoire des images et des signaux (LIS) \*  
46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex, France

<sup>2</sup>Université Technologique Sharif  
Téhéran, Iran

babaie@yahoo.com, Christian.Jutten@inpg.fr, knayebi@sina.sharif.ac.ir

**Résumé** – La séparation aveugle de source est un problème fondamental en traitement des signaux. Dans le cas général de mélanges convolutifs, le critère d'indépendance est complexe car il doit s'appliquer à un processus aléatoire. Dans cet article, nous traitons un cas particulier, dans lequel le canal introduit un mélange linéaire instantané et le filtrage est lié à la réponse en fréquence des amplificateurs associés aux capteurs. Dans ce cas, on montre le critère d'indépendance des variables aléatoires est suffisant pour réaliser la séparation.

**Abstract** – Blind source separation is a fundamental signal processing problem. For convolutive mixtures, the independence criterion is complex since it does take into account that sources are random processes. In this paper, we consider a special convolutive mixture, in which the channel implies linear memoryless mixtures, and componentwise linear filterings are due to the frequency response of the amplifiers associated to each sensor. In this case, we show that statistical independence of random variables is sufficient for insuring source separation.

## 1 Introduction

La séparation aveugle de source est un problème important en traitement des signaux et a été largement étudié dans la dernière décennie. Dans le cas instantané linéaire, le mélange est de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (1)$$

où  $\mathbf{s}$  est le vecteur des sources,  $\mathbf{x}$  est le vecteur des observations, et  $\mathbf{A}$  est la matrice mélangeante. Pour séparer les sources, on estime une matrice de séparation,  $\mathbf{B}$ , telle que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}. \quad (2)$$

On montre [3] que l'indépendance des composantes de  $\mathbf{y}$ , est suffisante pour obtenir la séparation (avec des indéterminations sur les ordres et le gain des sources).

Dans le cas convolutif, les matrices de mélange et de séparation sont des matrices de filtres, fréquemment des filtres à réponse impulsionnelle finie [6, 5, 1]. Pour ce type de mélanges, on montre que l'indépendance des sorties est suffisante pour obtenir la séparation (à un filtre près) [7]. Mais, le critère d'indépendance de  $y_1$  et  $y_2$  ne se restreint pas à l'indépendance de  $y_1(n)$  et  $y_2(n)$ . Il doit inclure l'indépendance des paires  $y_1(n)$  et  $y_1(n - m)$  pour toutes les paires  $(m, n)$ .

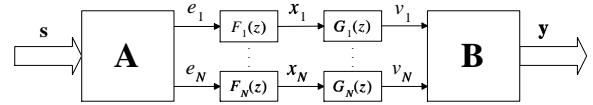


FIG. 1: Les systèmes de mélange et de séparation

Dans ce papier, nous considérons un cas particulier de mélanges convolutifs dans lequel le canal induit un mélange linéaire instantané, mais les réponses fréquentielles des capteurs et des amplificateurs associés sont modélisées par des filtres. Dans ce cas spécial, on montre que l'indépendance de  $y_1(n)$  et  $y_2(n)$  à l'instant  $n$  est suffisante pour la séparation. Ce résultat permet de concevoir un algorithme très simple pour séparer ce type de mélanges.

## 2 Préliminaires

Considérons le système de figure 1, où les sources sont d'abord mixées par un mélange linéaire et instantané, puis filtrées, composante par composante, par les filtres  $F_i(z)$ , associés à la réponse fréquentielle des capteurs ou des amplificateurs qui suivent ces capteurs. Les observations, mélangées et filtrées par les filtres  $F_i$ , sont notées  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Pour séparer le mélange, on doit d'abord compenser l'effet du filtrage (en estimant des filtres  $G_i$ ), puis estimer une matrice de séparation. Les sorties des filtres  $G_i$  sont notées  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Dans la suite, le filtre total, sur chaque voie  $i$  sera noté :

$$H_i(z) = F_i(z)G_i(z) \quad (3)$$

\* Ce travail a été partiellement financé par le projet européen Blind Source Separation and applications (BLISS, IST-1999-13077).

Il est clair que si :

$$H_i(z) = c_{ij}H_j(z) \quad \forall i, j \quad (4)$$

et  $\mathbf{BA}$  est le produit d'une matrice de permutation et d'une matrice diagonale, les sorties sont indépendantes. Les sources ne peuvent donc être restituées qu'à un filtre près. Avec ce mélange convolutif particulier, nous pouvons montrer les résultats suivants, dont les preuves sont données dans l'annexe.

**Théorème 1** Soient 2 sources  $s_i$  centrées iid, dont une au plus est gaussienne, soit la matrice de mélange  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix}$  régulière telle que  $a_1 a_2 \neq -1$ , et soient les filtres vérifiant  $\exists m : h_1(m)h_2(m) \neq 0$ , si  $y_1(n)$  et  $y_2(n)$  sont indépendants, alors  $y_1(n)$  et  $y_2(n-m)$  sont indépendants  $\forall m$ .

**Théorème 2** Sous les hypothèses du théorème 1 et si la matrice  $\mathbf{A}$  satisfait la condition :  $a_1 \neq 0$  ou  $a_2 \neq 0$ , l'indépendance de  $y_1(n)$  et  $y_2(n)$  implique que  $H_1(z) = cH_2(z)$ , où  $c$  est une constante arbitraire.

Le premier théorème montre que, pour les mélanges particuliers considérés, l'indépendance de  $y_1(n)$  et  $y_2(n)$  est une condition nécessaire et suffisante d'indépendance des processus aléatoires  $y_1$  et  $y_2$ . Ce résultat s'étend facilement au cas  $N \times N$  en considérant l'indépendance par paire.

Le second théorème montre, que si la matrice  $\mathbf{A}$  est suffisamment mélangeante, les filtres globaux sont identiques sur chaque voie, à un facteur d'échelle près.

### 3 Equations d'estimation

Les filtres  $F_i(z)$  associés aux capteurs ou aux amplificateurs sont typiquement des filtres causaux que l'on peut modéliser par des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) d'ordre généralement réduit (1 à 3 sont des valeurs raisonnables) qui vérifient  $f_i(0) \neq 0, \forall i$ .

Les filtres compensateurs  $G_i(z)$  sont choisis de type RIF, causaux, d'ordre  $M$ , de la forme :

$$G_i(z) = 1 + \sum_{j=1}^M g_{ij}z^{-j}. \quad (5)$$

Compte tenu de l'hypothèse  $f_i(0) \neq 0$  et de la forme des filtres  $G_i$ , l'hypothèse  $h_i(0) \neq 0$  du théorème 1 est satisfaite, et le théorème peut s'appliquer.

Soit  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$  le vecteur aléatoire de sorties, on utilise comme critère d'indépendance l'information mutuelle,  $I(\mathbf{y})$  :

$$I(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^N H(y_k) - H(\mathbf{y}) \quad (6)$$

où  $H(\cdot) = -E \ln p_{(\cdot)}(\cdot)$  est l'entropie de Shannon.

### 3.1 Séparation de la partie instantanée

En utilisant les relations de changements de variables dans les densités, on peut exprimer l'entropie de  $\mathbf{y}$  en fonction de l'entropie de  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$  :

$$H(\mathbf{y}) = H(\mathbf{v}) + \ln |\det(\mathbf{B})|. \quad (7)$$

Le gradient de  $H(\mathbf{y})$  par rapport à  $\mathbf{B}$  s'écrit :

$$\frac{\partial H(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{B}} |\det(\mathbf{B})| = \mathbf{B}^{-T}. \quad (8)$$

De plus, à partir de la définition de l'entropie et de  $y_j = \sum_{k=1}^N b_{jk}v_k$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial b_{ij}} \left( \sum_{k=1}^N H(y_k) \right) = -E \{ \psi_i(y_i)v_j \} \quad (9)$$

où  $\psi_i = \frac{p'_{y_i}(\cdot)}{p_{y_i}(\cdot)}$  est la fonction score de  $y_i$ .

En combinant (8) et (9), nous avons :

$$\frac{\partial I(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{B}} = -E \{ \psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})\mathbf{v}^T \} - \mathbf{B}^{-T} \quad (10)$$

où  $\psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = (\psi_1(y_1), \psi_2(y_2), \dots, \psi_N(y_N))^T$ .

### 3.2 Compensation des filtres

De l'équation (7), on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\mathbf{y})}{\partial g_{ij}} &= \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial g_{ij}} = -E \left\{ \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \ln p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) \right\} \\ &= -E \left\{ \frac{\partial \ln p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial g_{ij}} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Donc :

$$\frac{\partial H(\mathbf{y}(n))}{\partial g_{ij}} = -E \{ \varphi_{\mathbf{v},i}(\mathbf{v}(n)) x_i(n-j) \} \quad (12)$$

où  $\varphi_{\mathbf{v},i}(\mathbf{v})$  est la  $i$ -ème composante de la fonction score conjointe [1] de  $\mathbf{v}$ , définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} \ln p_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{p_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})} \left( \frac{\partial p_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})}{\partial x_N} \right)^T \end{aligned} \quad (13)$$

Puisque  $y_k = \sum_{i=1}^N b_{ki}v_i$  et que seul  $v_i$  dépend de  $g_{ij}$ , le calcul de la dérivée de  $H(y_k)$  par rapport à  $g_{ij}$  donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(y_k)}{\partial g_{ij}} &= -E \left\{ \frac{\partial \ln p_{y_k}(y_k)}{\partial g_{ij}} \right\} \\ &= -E \left\{ \frac{\partial \ln p_{y_k}(y_k)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial g_{ij}} \right\} \\ &= -E \left( \psi_k(y_k) b_{ki} \frac{\partial v_i}{\partial g_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} \sum_{k=1}^N H(y_k) = -E \left\{ \left( \sum_{k=1}^N b_{ki} \psi_k(y_k(n)) \right) x_i(n-j) \right\}. \quad (15)$$

En notant la matrice  $N \times M$ ,  $\mathbf{G} = (g_{ij})$ , les vecteurs  $\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}(n-1), \mathbf{x}(n-2), \dots, \mathbf{x}(n-M)]$  et  $\psi_{diff}(n) = \varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}(n)) - \mathbf{B}^T \psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}(n))$  et en appliquant (12) et (15), on a :

$$\frac{\partial I(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{G}} = E \left\{ \text{diag} \left( \psi_{diff}(n) \right) \mathbf{X}(n) \right\}. \quad (16)$$

## 4 Algorithme

La mise en oeuvre des équations d'estimations requiert l'estimation préalable des fonctions score marginales et multivariées [4]. Nous proposons un algorithme par bloc pour la séparation, mais une version adaptative est bien entendu envisageable.

En ce qui concerne la partie instantanée, l'équation d'estimation tirée de (10) est identique à celle obtenue pour des mélanges linéaires instantanés. Donc, l'algorithme d'estimation de  $\mathbf{B}$  s'écrit :

$$\mathbf{B}_{n+1} = (I + \mu_1 \mathbf{D})\mathbf{B}_n \quad (17)$$

où :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 - y_i^2 & \text{if } i = j \\ \hat{E} \{ \psi_i(y_i) y_j \} & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (18)$$

Les filtres  $G_i$  sont ajustés selon (16), à partir d'un algorithme de descente de gradient :

$$\mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{G}_n - \mu_2 \hat{E} \left\{ \text{diag} \left( \psi_{diff}(n) \right) \mathbf{X}(n) \right\} \quad (19)$$

où  $\hat{E}$  est l'espérance mathématique empirique, et  $\mu_2$  est un pas, soit constant, soit décroissant [2] selon :

$$\mu_2(n) = \frac{\mu_2(0)}{n+1} \quad \forall n \geq 0. \quad (20)$$

## 5 Résultats Expérimentaux

Pour valider notre méthode, nous avons choisi des filtres  $F_i(z)$  passe-bas du premier ordre :

$$F_i(z) = \frac{1}{1 - \alpha_i z^{-1}} \quad (21)$$

et des filtres compensateurs de la forme :

$$G_i(z) = 1 + g_i z^{-1}. \quad (22)$$

Ce choix règle le problème d'indétermination (la constante  $c$ ) qui apparaît dans le théorème 2.

Dans la première expérience, 100 échantillons de deux signaux iid, à distribution uniforme, sont mixés par la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients des filtres sont  $\alpha_1 = 0.6$  et  $\alpha_2 = 0.8$ . Nous avons utilisé  $\mu_1 = 0.1$  et  $\mu_2 = 0.05$  (constante). Les résultats de séparation, obtenus avec l'algorithme ci-dessus, sont moyennés sur 50 expériences. On trouve, en moyenne,  $g_1 = -0.5954$  et  $g_2 = -0.7942$ , avec des variances de 0.0023 et 0.0008, respectivement.

Dans une seconde expérience, on a choisi une matrice de mélange mal conditionnée :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Avec  $\mu_1 = 0.1$  et  $\mu_2(n) = 0.0005$ , en moyenne sur 50 expériences, on obtient  $g_1 = 0.6004$  et  $g_2 = 0.8001$ , avec

des variances de  $7 \times 10^{-5}$  et  $4 \times 10^{-5}$ , respectivement. On peut accélérer la vitesse de convergence en utilisant un pas variable,  $\mu_2(n) \propto 1/n$ , en conservant les mêmes performances.

On observe que l'estimation de filtre est meilleure dans le cas des mélanges mal conditionnés, probablement parce que l'algorithme (17) est alors plus sensible à la déformation introduite par les filtres. Cette hypothèse doit cependant être vérifiée par un calcul de performances.

Le théorème 1 a été démontré sous l'hypothèse de sources iid. La robustesse de l'algorithme vis-à-vis de cette hypothèse est intéressante à tester.

Dans une troisième expérience, on a donc mixé deux sources non iid. Si les filtres passe-bas  $F_i$  ont une fréquence de coupure élevée par rapport aux fréquences des deux sources, le mélange total est très proche d'un mélange linéaire instantané. On peut alors obtenir une bonne séparation des sources, en estimant simplement la matrice de séparation, mais on est incapable d'estimer correctement les filtres.

En revanche, si l'une des sources contient des fréquences élevées, ou est iid, la séparation ne peut être obtenue que pour une estimation correcte de la matrice de séparation et des filtres compensateurs. Dans une quatrième expérience, nous avons mixé 300 échantillons de trois sources : une séquence iid de distribution uniforme, une sinusoïde, et un signal carré par la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix},$$

suivie de filtres du premier ordre de coefficients  $\alpha_1 = 0.6$ ,  $\alpha_2 = 0.8$  et  $\alpha_3 = 0.7$ . Dans ce cas, on estime correctement la matrice de séparation et les filtres. En répétant 50 fois l'expérience, avec les pas d'adaptation  $\mu_1 = 0.01$  et  $\mu_2(n) = \frac{0.1}{n+1}$ , on obtient en moyenne  $g_1 = -0.5971$ ,  $g_2 = -0.7982$ ,  $g_3 = -0.6978$  et :

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.0045 & -0.0083 & 0.9743 \\ -0.0248 & 1.4352 & 0.0849 \\ -3.5945 & 0.0248 & -0.0476 \end{pmatrix}.$$

Les rapports signal à bruit en sortie sont alors de 34.1dB, 24.6dB et 25.8dB, pour les sources estimées 1, 2 et 3, respectivement (figure 2). Dans ce cas, il faut mentionner que, pour assurer la convergence de l'algorithme, le pas d'adaptation  $\mu_2$  doit être très petit ou décroissant.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté un algorithme de séparation dans le cas de mélanges convolutifs particuliers. Pour ce type de mélanges, l'indépendance instantanée des sorties permet de restituer les sources à un filtre près. Actuellement, nous étendons cette étude aux mélanges post-non linéaires à mémoire, obtenus en insérant une non-linéarité (modélisant la distortion de chaque capteur) entre la matrice de mélange et chaque filtre, associé alors à la réponse

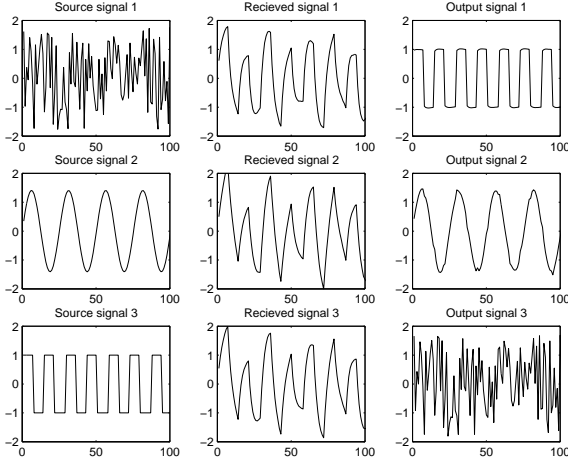


FIG. 2: Séparation de 3 mélanges avec post-filtrage.

en fréquence de la chaîne d'amplification (supposée linéaire) qui suit chaque capteur.

## A Annexe

*Preuve du théorème 1.* La matrice de séparation étant notée  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix}$ , on a :

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{h_1(k) + a_2 b_1 h_2(k)\} s_1(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{a_1 h_1(k) + b_1 h_2(k)\} s_2(n-k) \quad (23)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{b_2 h_1(k) + a_2 h_2(k)\} s_1(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{a_1 b_2 h_1(k) + h_2(k)\} s_2(n-k) \quad (24)$$

Supposons que  $y_1(n)$  et  $y_2(n)$  sont indépendants. En appliquant le théorème de Darmois [3] aux variables aléatoires  $s_1(n-k)$  et  $s_2(n-k)$ , on doit avoir,  $\forall k$  :

$$\begin{cases} b_2 h_1(k) + a_2 h_2(k) = 0 \\ a_1 h_1(k) + b_1 h_2(k) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

ou :

$$\begin{cases} h_1(k) + a_2 b_1 h_2(k) = 0 \\ a_1 b_2 h_1(k) + h_2(k) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Supposons maintenant  $\exists m$  tel que  $h_1(m)h_2(m) \neq 0$ , en écrivant (25) pour  $k = m$ , on déduit :

$$b_1 = -a_1 \frac{h_1(m)}{h_2(m)} \quad (27)$$

$$b_2 = -a_2 \frac{h_2(m)}{h_1(m)} \quad (28)$$

Posons  $c = \frac{h_1(m)}{h_2(m)}$ . Pour  $k \neq m$ , on trouve  $h_1(k) = c h_2(k)$  en reportant dans (25), ou le système suivant en reportant dans l'équation (26) :

$$\begin{pmatrix} h_2(m) & -a_1 a_2 h_1(m) \\ -a_1 a_2 h_2(m) & h_1(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Le déterminant de (29) est  $(1 - a_1^2 a_2^2) h_1(m) h_2(m) \neq 0$  compte tenu des hypothèses. Les solutions uniques de (29) sont donc  $h_1(k) = h_2(k) = 0$ , et sont aussi solutions de (25). Ainsi, (25) est satisfaite pour tout  $k$  et on a  $h_1(k) = c h_2(k)$ . Les sorties  $y_1(n)$  et  $y_2(n)$  sont alors :

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{h_1(k) + a_2 b_1 h_2(k)\} s_1(n-k) \quad (30)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{a_1 b_2 h_1(k) + h_2(k)\} s_2(n-k) \quad (31)$$

et l'on voit aisément que  $y_1(n)$  and  $y_2(n-m)$  sont indépendants,  $\forall m$ . De la même manière, ce raisonnement peut s'appliquer à l'équation (26).  $\square$

D'après ce résultat, on peut déduire le théorème 2. En effet, si  $a_1 \neq 0$  ou  $a_2 \neq 0$ , alors  $\forall k$ ,  $h_1(k) = c h_2(k)$ , où  $c$  est une constante réelle. Dans le cas contraire ( $a_1 = 0$  et  $a_2 = 0$ ), c'est-à-dire pour une matrice  $\mathbf{A}$  identité, l'indépendance peut être préservée avec des filtres quelconques.  $\square$

## Références

- [1] M. Babaie-Zadeh, C. Jutten, and K. Nayebi. Separating convolutive mixtures by mutual information minimization. In *Proceedings of IWANN'2001, Part II*, pages 834–842, Granada, Spain, June 2001.
- [2] N. Charkani. *Séparation auto-adaptative de sources pour des mélanges convolutifs. Application à la téléphonie mains-libres dans les voitures*. Thèse de l'INP Grenoble, 1996.
- [3] P. Comon. Independent component analysis, a new concept? *Signal Processing*, 36(3):287–314, 1994.
- [4] W. Härdle. *Smoothing techniques with implementation in S*. Springer-Verlag, 1991.
- [5] C. Simon. *Séparation aveugle des sources en mélange convolutif*. Thèse de l'université de Marne la Vallée, 1999.
- [6] H.L. Nguyen Thi and C. Jutten. Blind sources separation for convolutive mixtures. *Signal Processing*, 45:209–229, 1995.
- [7] D. Yellin and E. Weinstein. Criteria for multichannel signal separation. *IEEE Trans. Signal Processing*, pages 2158–2168, August 1994.