

Codage correcteur d'erreur dans le corps des complexes et systèmes multiporteuses

Fatma ABDELKEFI, Pierre DUHAMEL, Florence ALBERGE

Laboratoire des Signaux et Systèmes
SUPELEC, F-91192 GIF sur YVETTE Cedex France
abdelkefi@lss.supelec.fr, pierre.duhamel@lss.supelec.fr
florence.alberge@lss.supelec.fr

Résumé – Ce papier présente une méthode élégante pour la correction des erreurs impulsives dans les systèmes OFDM. Il existe une analogie entre ces systèmes OFDM et les codes Reed Solomon. Ceci montre que si un signal est envoyé sur un canal contenant un bruit gaussien de faible amplitude et un bruit impulsif alors ce bruit impulsif peut être corrigé par une procédure similaire aux techniques de décodage canal classique. Nous expliquons tout d'abord ce résultat dans un cas simple dont l'intérêt est principalement d'ordre théorique. Généralement, on envoie des pilotes utilisés pour la synchronisation ou l'estimation du canal. Ces symboles pilotes sont répartis de façon aléatoire dans la séquence à émettre. Notre apport dans cet article est d'utiliser ces pilotes pour corriger les erreurs impulsives. Nous avons montré que la capacité de correction dépend essentiellement de l'emplacement de ces pilotes dans la séquence. L'efficacité de cette méthode est corroborée par les simulations présentées dans le contexte pratique d'Hiperlan2.

Abstract – This paper presents an elegant solution to impulse noise cancellation in OFDM systems. A parallel between Reed Solomon codes in the complex field and multicarrier transmission using OFDM is first presented. This shows that when the signal is sent over some channel composed of Gaussian plus impulse noise, the impulse noise can be removed by a procedure similar to channel decoding, using information carried by the "syndrome". These results are first derived in a simple situation (oversampled DMT, additive channel), which is merely of theoretical interest. In any case, consecutive zeroes, in the output of the OFDM modulator, do not correspond to real subcarriers. However in many cases, pilot tones are emitted for synchronization or channel estimation purposes. These pilot tones are generally scattered among the information bearing frequencies. Our approach is to use these pilot tones as "syndromes", in order to correct impulse noise. We show that the correction capacity is conditioned by the position of these pilot tones in the emitted sequence. Efficiency of this technique is corroborated with simulation in the practical context of the Hiperlan2.

1 Introduction

La technique de transmission multiporteuses connue sous le nom de "Orthogonal Frequency Division Multiplexing" (OFDM) a été introduite dans les années 70. Cette technique est retenue actuellement comme solution pour la diffusion de programmes numériques radio "Digital Audio Broadcasting" (DAB) et télévisés "Digital Video Broadcasting" (DVB), notamment pour le projet européen "Digital Terrestrial TV Broadcasting" DTTB.

Les schémas classiques des systèmes OFDM basés sur l'utilisation d'une transformée de Fourier discrète dans le modulateur, utilisent un intervalle de garde (IG) afin de permettre une égalisation peu coûteuse et afin d'éliminer l'interférence intersymbole (ISI). En effet, c'est dans les zones du canal où l'atténuation est la plus forte (fading) que le RSB sera le plus mauvais et c'est à ces endroits et à ces instants précis que le récepteur risque d'être pris en défaut. D'où l'intérêt d'utiliser un codeur canal combiné avec des entrelaceurs en temps et en fréquences tels que les systèmes COFDM très utilisés notamment pour l'ADSL ou pour la deuxième génération de Hiperlan2.

Dans certaines de ces applications, le signal émis peut être perturbé par un bruit de type impulsif de forte amplitude

en présence d'un bruit Gaussien d'amplitude beaucoup plus faible.

Pour corriger ces erreurs impulsives, nous avons proposé d'utiliser l'analogie entre les systèmes OFDM les plus simple (calculés à partir d'une transformée de Fourier) et les codes spectraux du type Reed Solomon calculés dans le corps des complexes. Cette approche repose sur des techniques semblables à celles utilisées par Wolf [3] et Redinbo[4].

La contribution principale de cet article est de montrer que les symboles pilotes, qui sont généralement émis dans un but de synchronisation ou d'estimation du canal, peuvent aussi jouer le rôle de syndromes. Nous montrons alors qu'il est possible de corriger des erreurs impulsives même lorsque ces syndromes ne sont pas répartis de manière consécutive. La capacité de correction sera toutefois liée à la position de ces pilotes dans la séquence émise. La technique proposée est ensuite testée dans le contexte d'Hiperlan2 où son efficacité est vérifiée.

2 Le schéma de transmission et les codes spectraux

Soit $\{I_n\}$ la séquence de symboles à émettre à la cadence $\{T_s\}$. Ces symboles appartiennent, généralement, à un alphabet fini correspondant à une modulation donnée. Le flot initial de données est émis sur une des N porteuses qui sont orthogonales entre elles. On construit donc, à partir de cette séquence, N sous séquences regroupées dans le vecteur $\underline{I}(n) = (I_0(n) \dots I_N(n))^T$ qu'on appelle symbole OFDM et qui est de durée NT_s . L'orthogonalité permet d'assurer la reconstruction parfaite des symboles émis à la réception.

Un modulateur OFDM continu, nécessitant l'utilisation de N filtres orthogonaux, est difficile à réaliser et donc très coûteux. On préfère alors la solution numérique. On considère donc une modélisation discrète du modulateur. Ceci revient à suréchantillonner le signal continu avec une période T_e telle que $MT_e = NT_s$ où $M \leq N$. Les systèmes traditionnels utilisent des filtres rectangulaires de durée NT_s et l'espacement entre les porteuses $\delta f = \frac{1}{NT_s}$ est choisi pour que l'occupation spectrale soit minimale. Finalement, les symboles modulés sont donnés par l'expression suivante:

$$c_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} I_m(n-1) e^{\frac{2j\pi km}{M}}$$

Les c_k apparaissent donc comme les transformées de Fourier discrètes inverses (IFFT) de la séquence $\{I_m(n-1)\}$ complétée par $M-N$ zéros (voir figure 1). Dans ce qui suit, on suppose que $M-N=2t$, où t est un entier naturel positif. Au niveau du récepteur, après conversion analogique/numérique et après démodulation (FFT), les symboles $\{Y_k\}$ reçus s'écrivent:

$$Y_k = I_k + N_k, 0 \leq k \leq N-1$$

où N_k est la transformée de Fourier d'ordre M de la séquence de bruit $\{n_k\}$.

2.1 Modèle et capacité du canal

On considère que le canal est sans mémoire et que chaque symbole émis est perturbé de la manière suivante:

$$r_k = c_k + b_k + w_k, k \in \{0 \dots M-1\}$$

où $\{w_k\}$ est un bruit Gaussien, blanc, de moyenne nulle et de variance σ_w^2 et $\{b_k\}$ est le bruit impulsif. Toutes ces quantités sont complexes.

Ce bruit impulsif a été rarement pris en compte jusqu'à maintenant et pourtant il est présent dans beaucoup de systèmes. Il peut être dû à une surtension des lignes d'alimentation, à une étincelle de rupture dans un relais. On suppose dans tout ce qui suit que le bruit impulsif est un bruit Gaussien de Bernoulli et nous utiliserons le modèle proposé par Ghosh dans [1]:

$$b_k = e_k g_k \forall k \in \{0 \dots M-1\}$$

où $\{e_k\}$ est une séquence de Bernoulli telle que $pr(e_k = 1) = p$ et $\{g_k\}$ est une séquence de bruit Gaussien complexe de moyenne nulle et de variance σ_b^2 telle que $\sigma_b^2 \gg$

σ_w^2 .

La densité de probabilité du bruit global $n_k = b_k + w_k$ engendrée par le canal est:

$$p(n) = (1-p)G(n, 0, \sigma_w^2) + pG(n, 0, (\sigma_w^2 + \sigma_b^2))$$

où $G(n, m_x, \sigma_x^2)$ est la densité de probabilité d'un bruit Gaussien de moyenne m_x et de variance σ_x^2 . Cette expression de densité nous permet de calculer la capacité du canal Gaussien - Bernoulli Gaussien, afin d'avoir une idée de l'impact du bruit impulsif sur la capacité du canal. Cette capacité a été calculée grâce à l'algorithme itératif proposé par Blahut et Arimoto [5] et qui s'applique à un canal arbitraire et sans mémoire.

La figure (2) présente la capacité en bit/seconde, normalisée par la bande du canal (w), en fonction de la puissance du signal P , pour différentes valeurs de p ($\sigma_b = 1$, $\sigma_w = 6.10^{-2}$). Par exemple pour $p = 5.10^{-2}$, on peut transmettre au plus 7.4 bits/s/Hz c'est à dire qu'on perd 0.6 bit/s/Hz et ceci est dû essentiellement à la présence du bruit impulsif.

2.2 Code spectral

Nous avons vu que la réalisation d'un modulateur OFDM numérique impose souvent de travailler avec une version suréchantillonnée du signal. Cela revient à ajouter $2t$ symboles nuls au bloc modulé. Dans [2] nous avons pris ces $2t$ symboles consécutifs. A la réception, ces symboles sont généralement non nuls, ils sont perturbés par le bruit "Gaussien-Gaussien Bernoulli". Nous avons montré dans [2] qu'il existe une similitude entre le système OFDM le plus simple (à base de transformée de Fourier rapide) et le codeur canal de type Reed Solomon calculé dans le corps des complexes. Pour le décodage, nous avons choisi un algorithme de décodage classique que nous avons adapté à notre problème, c'est à dire qu'il prend en compte conjointement l'effet du bruit impulsif et du bruit gaussien qui est de faible amplitude. La procédure de décodage est détaillée dans la section suivante.

3 L'algorithme de décodage

Il existe plusieurs algorithmes de décodage des codes Reed Solomon tels que: l'algorithme de Peterson-Gorenstein-Zierler, l'algorithme de Berlekamp-Massey ... Ces algorithmes sont, en général, très sensibles aux erreurs de faible amplitude. Notre travail se distingue de celui de Redinbo [4] au niveau de l'algorithme de décodage.

L'algorithme que nous avons utilisé a de bonnes performances dans le contexte de codage conjoint source-canal [6]. Nous avons utilisé une version modifiée de celui de Peterson-Gorenstein-Zierler qui prend en compte l'effet du bruit de faible amplitude. Nous détaillons ci-après les différentes étapes de notre algorithme.

Notons \mathcal{A} l'ensemble des positions des symboles connus (pilotes ou zéros).

A la réception, les symboles reçus $\{Y_k\}$ dont l'indice est dans \mathcal{A} ne sont pas nuls:

$$Y_k = B_k + \Gamma_k, \forall k \in \mathcal{A}$$

où B_k est la transformée de Fourier du bruit impulsif b_n , et Γ_k est la transformée de Fourier du bruit Gaussien w_n . Soit $\beta = \text{card}\{\mathcal{A}\}$, à la réception, la correction du bruit impulsif se fait au moyen des syndromes S_k :

$$S_k = Y_{\mathcal{A}(k)}, k \in \{1 \dots \beta\}$$

Dans ces termes, il y a deux contributions: celle de la transformée de Fourier du bruit Gaussien qui est aussi un bruit Gaussien et celle de la transformée de Fourier du bruit impulsif qui est la somme de sinusoides complexes dont la fréquence correspond à la localisation du bruit impulsif dans la séquence.

L'algorithme de décodage proposé comprend donc trois étapes: (i) estimation du nombre des erreurs impulsives, (ii) estimation de leur position et (iii) estimation de l'amplitude correspondante. Nous avons ajouté à ces trois étapes une étape de contrôle à posteriori de l'efficacité du codeur.

Les étapes (i) et (iii) sont identiques à celles présentées dans [2]. L'étape (ii) est détaillée dans le paragraphe 3.1. Nous montrons aussi que la capacité de correction est conditionnée par l'emplacement des symboles pilotes dans la séquence. L'approche que nous présentons dans cet article est nouvelle pour les systèmes OFDM et en particulier dans le contexte d'Hiperlan2.

3.1 Localisation des erreurs impulsives

L'algorithme classique de Peterson-Gorenstein-Zierler a été conçu pour les codes BCH et en particulier les codes Reed Solomon dans un corps à dimension fini. Le polynôme localisateur $\Lambda(x)$ est défini par $\lambda_i = \Lambda(W^{-i}) = 0$ si $b_i \neq 0$ on a alors:

$$\lambda_i b_i = 0 \quad \forall i \in \{0 \dots M-1\} \quad (1)$$

On suppose qu'on dispose de L symboles pilotes qui sont répartis aléatoirement dans la séquence à émettre. Pour pouvoir corriger ces erreurs impulsives, il faut avant tout déterminer la capacité de correction. Nous prouvons dans le paragraphe suivant que cette capacité est conditionnée par la position de ces pilotes dans la séquence.

Supposons qu'on a au plus t impulsions de bruit de forte amplitude. Cela revient à dire qu'il y a au moins t valeurs de λ qui sont nulles, donc nous avons $M-t$ degré de libertés sur le vecteur $\underline{\Lambda}(n) = (\Lambda_0(n) \dots \Lambda_N(n))^T$. Après passage au domaine fréquentiel l'équation (1) s'écrit: $\underline{B} \underline{\Lambda} = 0$. On peut montrer que \underline{B} est une matrice circulante et que $\text{rang}(\underline{B}) \leq t$ (car on a au plus t erreurs impulsives). La matrice \underline{B} contient des syndromes (dont l'indice correspond à celui des symboles pilotes) et des éléments inconnus. On cherche alors à regrouper ensemble le maximum d'éléments connus dans une sous matrice \underline{B}_r de \underline{B} , telle que: $\underline{B}_r = \underline{H} \underline{B} \underline{D}$, où \underline{H} (resp. \underline{D}) est une matrice de permutation des lignes (resp. des colonnes) de taille $r \times M$ où $1 < r \leq t$ (resp. $M \times (r+1)$). Donc $\text{rang}(\underline{B}_r) \leq r$.

Posons $\Lambda_r = \underline{D}^T \underline{\Lambda}$, l'équation clé est donc:

$$\underline{B}_r \Lambda_r = 0 \quad (2)$$

Si $\text{rang}(\underline{B}_r) = r$, alors l'équation (2) admet une solution unique à un coefficient multiplicatif près. Or \underline{B}_r peut

s'écrire sous la forme:

$$\begin{pmatrix} B_{m_0+\theta_0+\delta_0} & \dots & B_{m_0+\theta_0+\delta_t} \\ B_{m_0+\theta_1+\delta_0} & \dots & B_{m_0+\theta_1+\delta_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m_0+\theta_{t-1}+\delta_0} & \dots & B_{m_0+\theta_{t-1}+\delta_t} \end{pmatrix} \quad (3)$$

où $m_0, (\theta_k)_{0 \leq k \leq t-1}$ et $(\delta_k)_{0 \leq k \leq t}$ sont des entiers positifs qui dépendent de l'emplacement des pilotes dans la séquence. La sous matrice de \underline{B}_r construite à partir des r premières colonnes se décompose sous la forme [7]: $\underline{R}_r \underline{P}_r \underline{Q}_r$ avec:

$$\underline{R}_r = \begin{pmatrix} W_M^{f_0 \theta_0} & \dots & W_M^{f_{r-1} \theta_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_M^{f_0 \theta_{t-1}} & \dots & W_M^{f_{r-1} \theta_{t-1}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{Q}_r = \begin{pmatrix} W_M^{f_0 \delta_0} & \dots & W_M^{f_0 \delta_{r-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_M^{f_{r-1} \delta_0} & \dots & W_M^{f_{r-1} \delta_{r-1}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{P}_r = \begin{pmatrix} b_0 W_M^{m_0 f_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 W_M^{m_0 f_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_1 W_M^{m_0 f_{r-1}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$f_0 \dots f_{r-1}$ sont les localisations des erreurs impulsives dans la séquence, telles que: $f_0 < f_1 \dots < f_{r-1}$ et $W_M = \exp(\frac{2\pi j}{M})$.

Si \underline{P}_r et \underline{Q}_r sont inversibles alors $\text{rang}(\underline{R}_r \underline{P}_r \underline{Q}_r) = r$ et par la suite l'équation (2) admet une solution unique et la capacité de correction est r . Il nous faut donc trouver une condition pour que les matrices \underline{R}_r et \underline{Q}_r soient de rang plein.

3.2 Exemple: Hiperlan2

Lorsque r est grand, il est difficile de vérifier l'inversibilité de \underline{R}_r et \underline{Q}_r . En revanche, si $r = 2$, une condition nécessaire pour que \underline{B}_2 soit inversible est:

$$(\det(\underline{R}_2) \neq 0 \text{ et } \det(\underline{Q}_2) \neq 0) \iff$$

$$(pgcd(\theta_1 - \theta_0, M) = 1 \text{ et } pgcd(\delta_1 - \delta_0, M) = 1) \quad (7)$$

Si $\theta_0, \theta_1, \delta_0$ et δ_1 vérifient cette condition alors $\text{rang}(\underline{Q}_2) = \text{rang}(\underline{R}_2) = 2$ et la capacité de correction est 2. Nous avons appliqué ce résultat dans le contexte d'Hiperlan2. Dans Hiperlan2, le nombre de porteuses est $M = 64$ et la longueur de l'intervalle de garde est $D = 16$. Parmi ces M porteuses, il y a 12 porteuses nulles (celles qui sont sur les bords et celle du milieu), 4 pilotes P_1, P_2, P_3, P_4 dont les positions dans la séquence sont (11 39 53 59) et le reste sont des symboles d'information. Pour corriger les erreurs impulsives, nous avons utilisé $P_1 P_3 P_4$, le zéro qui est à la position 32 et un zéro du bord (à la position 59). Pour que la condition (7) soit vérifiée nous avons déplacé la position de P_3 à 38 au lieu de 39. Donc la sous matrice \underline{B}_2 sélectionnée est:

$$\underline{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{32} & B_{38} \\ B_{32} & B_{53} & B_{59} \end{bmatrix}$$

ce qui correspond à $m_0 = 0$, $\delta_0 = 11$, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 21$, $\delta_1 = 32$ et $\delta_2 = 27$. La condition (7) étant vérifiée ce qui implique que $\underline{\mathcal{R}}_2$ et $\underline{\mathcal{Q}}_2$ sont inversibles. La capacité de correction vaut alors 2.

4 Simulations

Les paramètres des simulations sont ceux utilisés dans Hiperlan2. Pour le bruit Bernoulli Gaussien, nous avons pris $p = 10^{-3}$ et $\sigma_b = 2$.

La figure (3) présente les performances en terme de distorsion, $1/EQM(dB)$, où EQM est l'erreur quadratique moyenne entre la séquence émise et la séquence reçue pour deux cas différents: après correction et avant correction. Ces deux cas sont comparés au cas où le canal est gaussien et sans bruit impulsif.

La figure 4 montre les performances en terme de BER, lorsqu'on ajoute un canal C du type Model A, spécifique à la norme Hiperlan2.

Ces deux courbes montrent bien les améliorations apportées par l'algorithme de décodage considéré, sachant que dans toutes ces simulations aucun codeur canal classique n'a été employé.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons présenté une technique permettant de détecter, puis corriger les erreurs impulsives dans les systèmes OFDM. Généralement les pilotes sont utilisés pour la synchronisation, ou l'estimation du canal. Nous avons montré qu'ils peuvent être aussi utilisés pour corriger les erreurs impulsives. Cependant, la capacité de correction dépend de l'emplacement de ces pilotes dans la séquence. Nous avons prouvé que cette technique peut être appliquée dans le contexte d'Hiperlan2.

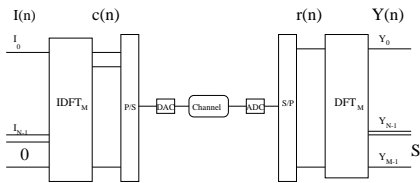


FIG. 1: Système OFDM

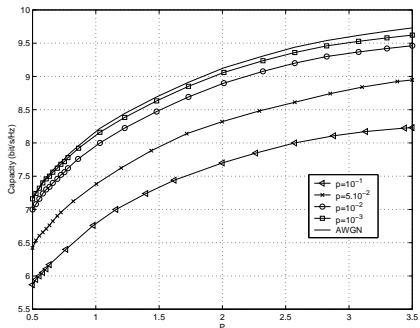


FIG. 2: La capacité du canal Gaussien - Bernoulli Gaussien

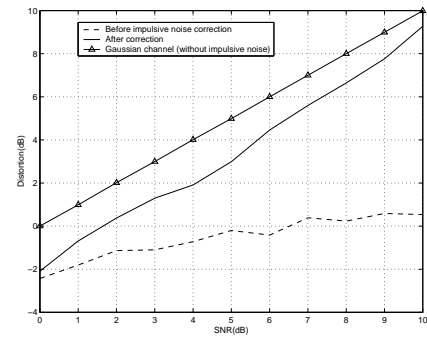


FIG. 3: Les performances en terme de distorsion lorsqu'on a un canal "Gaussien-Bernoulli Gaussien" et 2t zéros consécutifs

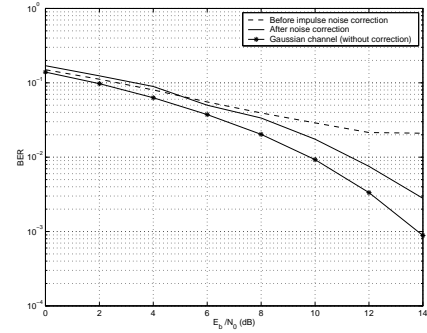


FIG. 4: Les performances en terme de BER lorsqu'on ajoute un canal du type Model A (Hiperlan2)

References

- [1] Monisha Ghosh. *Analysis of the Effect of Impulse Noise on Multicarrier and Single Carrier QAM Systems*. IEEE Transactions on communications, February 1996.
- [2] Fatma Abdelkefi. Abraham Gabay and Pierre Duhamel. *Impulse noise cancellation in multicarrier transmission*. ICASSP, 2001.
- [3] Jack Keil Wolf. *Redundancy, the Discrete Fourier Transform, and Impulse Noise Cancellation*. IEEE Transactions on communications March 1983.
- [4] G.Robert Redinbo. *Decoding Real Block Codes: Activity Detection, Wiener Estimation*. IEEE Transaction Information Theory March 2000.
- [5] Suguru Arimoto. *An algorithm for computing the capacity of arbitrary discrete memoryless channels*. IEEE Transactions on Infomation Theory January 1972.
- [6] Abraham Gabay. *Spectral Interpolation Coder for Impulse Noise Cancellation over a Binary Symmetric Channel*. EUSIPCO 2000.
- [7] Carlos R.P.Hartmann and Robert T.Chien. *Some results on the minimum distance structure of cyclic codes*. IEEE Transactions on Infomation Theory. May 1972.