

Etude de lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+ : apport des fonctions caractéristiques et des cumulants de deuxième espèce dans l'étude de mélanges multiplicatifs et additifs.

Jean Marie NICOLAS

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications
Département Traitement du Signal et des Images
46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex (France)
nicolas@tsi.enst.fr

Résumé – Les lois de probabilités définies sur \mathbb{R}^+ , qui sont celles des images de Radar à Synthèse d'Ouverture, gagnent à être étudiée dans le cadre formel des fonctions caractéristiques et des cumulants de deuxième espèce [2]. En particulier, on montre que, dans le diagramme des cumulants de seconde espèce d'ordre 2 et 3, les lois classiquement utilisées dans le monde du radar (loi Gamma, loi K, système de Pearson, ...) sont clairement identifiables. Plus spécifiquement, dans l'hypothèse d'un mélange binaire de loi Gamma, ce diagramme permet d'identifier les composantes du mélange : rapport des rétrodiffusions et proportion du mélange.

Abstract – Probability density functions defined on \mathbb{R}^+ are well modeled with the help of Second Order Characteristic Functions and Second Kind Cumulants (SKC) [2]. More, by using the second SKC and the third ones, it is possible to identify a lot of image laws classically used in SAR (Synthetic Array Radar) as Gamma law, K law, the Pearson system, ... In the case when the image law is a gamma mixture, these two SKC allows easily the determination of the mixture parameters : ratio between the two classes and ratio of the mean value (RCS).

1 Introduction

Puisque les pixels d'une image traditionnelle sont toujours positifs ou nuls et correspondent donc à des lois de probabilités spécifiques définies sur \mathbb{R}^+ , il peut être intéressant de prendre en compte ce particularisme pour analyser les lois de probabilités comme celles des images obtenues en RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) ou en échographie médicale. Dans les deux cas précités, il se trouve en effet que le système imageur actif est à la source d'un bruit spécifique modélisable comme un bruit multiplicatif : le speckle (ou chatoiement). Aussi l'analyse de l'image doit prendre en compte cette combinaison multiplicative de lois de probabilités, que l'on peut aussi considérer comme une convolution de Mellin des lois du speckle et de la scène sous jacente[3].

Ce particularisme conduit à modifier les définitions conduisant aux fonctions caractéristiques et à la définition des cumulants en utilisant la transformée de Mellin (\mathcal{M}) plutôt que la transformée de Fourier. Connaissant une loi de probabilité $p_x(u)$ définie pour $u \in \mathbb{R}^+$, cette nouvelle approche [2] conduit donc aux définitions nouvelles de fonction caractéristique de deuxième espèce, de seconde fonction caractéristique de seconde espèce, de moments de deuxième espèce et de cumulants de deuxième espèce, reprises dans le tableau 1.

Notons que les propriétés de la transformée de Mellin[1]

TAB. 1: Rappel des définitions des fonctions caractéristiques de deuxième espèce pour une densité de probabilité $p_x(u)$ définie sur \mathbb{R}^+ ([2]).

la fonction caractéristique de seconde espèce
$\phi_x(s) = \mathcal{M}[p_x(u)](s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1} p_x(u) du$
la seconde fonction caractéristique de seconde espèce
$\psi_x(s) = \log(\phi_x(s))$
les moments de deuxième espèce
$\tilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_x(s)}{ds^\nu} \right _{s=1}$
les cumulants de deuxième espèce
$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \left. \frac{d^r \psi_x(s)}{ds^r} \right _{s=1}$

permettent d'écrire

$$\tilde{m}_\nu = \int_0^{+\infty} (\log u)^\nu p_x(u) du \quad (1)$$

les moments de deuxième espèce pouvant porter aussi l'appellation de "log-moments".

Notons aussi que si une loi s'obtient par convolution de Mellin de deux autres lois, ses cumulants de deuxième espèce sont alors les sommes des cumulants de deuxième espèce des deux lois :

$$p = q \hat{\star} w \Leftrightarrow \tilde{\kappa}_{p,x(r)} = \tilde{\kappa}_{q,x(r)} + \tilde{\kappa}_{w,x(r)}$$

Nous allons voir comment ce nouveau formalisme permet d'estimer les paramètres des lois dans des cas de combinaisons multiplicatives et additives.

2 Estimation des paramètres de la loi Gamma

La loi Gamma, bien connue des radaristes, est une loi définie par deux paramètres L et μ telle que :

$$\mathcal{G}(u) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{L}{\mu} \left(\frac{Lu}{\mu} \right)^{L-1} e^{-\frac{Lu}{\mu}} \quad (2)$$

Sa transformée de Mellin [1] donne directement sa fonction caractéristique de deuxième espèce

$$\phi_x(s) = \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)} \quad (3)$$

d'où ses moments et cumulants de deuxième espèce. En particulier

$$\tilde{\kappa}_{x(1)} = \log(\mu) + \Psi(L) - \log(L) \quad (4)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \Psi(r-1, L) \quad \forall r > 1 \quad (5)$$

(avec $\Psi(1, L)$ fonction Digamma et $\Psi(r, L)$ fonction Polygamma d'ordre r).

Une méthode originale d'estimation des paramètres de la loi Gamma revient à résoudre le système d'équation (4, 5) [6]. En particulier, le paramètre de forme L s'estime directement à partir de la relation 5 et d'un jeu de N échantillons $x_i, i \in [1, N]$ de sorte que \hat{L} s'écrit sous forme implicite

$$\Psi(1, \hat{L}) = \frac{\sum_{i=1}^N (\log x_i)^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^N \log x_i}{N} \right)^2$$

La résolution numérique s'effectue aisément, les fonctions Polygamma étant strictement monotones.

La variance de ces nouveaux estimateurs nécessite d'établir une variante de la formule de Kendall et Stuart [4] en introduisant des variance et covariance de deuxième espèce sous la forme

$$var \{\tilde{m}_i\} = E \left\{ \left[(\log x)^i - \tilde{m}_i \right]^2 \right\} \quad (6)$$

$$cov \{\tilde{m}_i, \tilde{m}_j\} = E \left\{ \left[(\log x)^i - \tilde{m}_i \right] \left[(\log x)^j - \tilde{m}_j \right] \right\} \quad (7)$$

Un calcul très classique conduit alors à l'expression suivante

$$Var \left\{ \hat{L} \right\} = \frac{1}{N} \frac{\Psi(3, L) + 2\Psi(1, L)^2}{\Psi(2, L)^2} \quad (8)$$

ce que confirment les résultats expérimentaux présentés dans [6]. On peut ainsi noter que cette méthode nouvelle : "la méthode des cumulants de deuxième espèce", permet d'estimer le paramètre L d'une loi Gamma avec une variance proche de la variance minimale obtenue par le maximum de vraisemblance et beaucoup plus faible que celle obtenue par la méthode des moments ($\frac{2L(L+1)}{N}$).

3 Diagramme $\tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3$

Nous avons donc vu l'intérêt d'utiliser les cumulants de deuxième espèce pour une loi à 2 paramètres : la loi Gamma. En particulier, il était notable que seul le paramètre de forme L intervenait pour les cumulants d'ordre supérieur à 1. Nous allons voir que cette approche est d'un grand intérêt pour des lois à 3 paramètres définies sur \mathbb{R}^+ .

3.1 Lois à 3 paramètres utilisées en imagerie radar

Dans le cadre de l'imagerie radar, on utilise comme modèle d'image et de scène les lois issues du système de Pearson [5]. Comme solution de ce système correspondant à des lois définies sur \mathbb{R}^+ , on trouve des lois à 2 paramètres : les lois Gamma et Gamma inverse, et des lois à 3 paramètres que l'on dénommera ici Pearson 1 et Pearson 6. Or, une propriété des lois de Pearson à 3 paramètres est qu'elles s'expriment comme des convolution de Mellin (directe ou inverse) de lois Gamma et Gamma inverse : l'expression de leurs cumulants de deuxième espèce est alors une somme (ou une différence) des cumulants de deuxième espèce de la loi Gamma et de la loi Gamma inverse. Les résultats sont regroupés dans le tableau 2, qui inclut aussi la loi $\mathcal{K}[\mu, L, M]$ que l'on peut écrire comme une convolution de Mellin de deux lois Gamma, et qui est bien connue des radaristes

Aussi, plutôt que d'utiliser les grandeurs traditionnelles d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis), qui donnent naissance au diagramme " $\beta_1 \beta_2$ " [4], nous proposons d'utiliser les cumulants de deuxième espèce $\tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3$ pour caractériser les lois à 3 paramètres.

La figure 1 place dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2 \tilde{\kappa}_3$ les lois évoquées ci dessus. Notons que la loi \mathcal{K} occupe une zone correspondant aux lois de Pearson de type 6, et qu'elle est limitée inférieurement par la courbe correspondant à la loi Gamma, et supérieurement par une caustique décrite par les lois $\mathcal{K}[\mu, L, L]$.

Remarquons aussi une curiosité dans ce diagramme : les lois de Pearson de type I apparaissent tant pour des valeurs positives que négatives de $\tilde{\kappa}_3$.

La loi correspondant à des valeurs négatives de $\tilde{\kappa}_3$

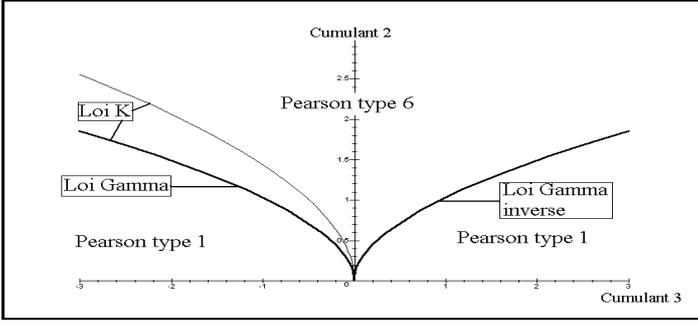


FIG. 1: Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ $\tilde{\kappa}_3$ pour les lois du système de Pearson et pour la loi K.

s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{G}[\mu, p] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, p+q] \quad (9)$$

ce qui, après développement, donne la forme bien connue :

$$\frac{p}{(p+q)\xi} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \left(\frac{pu}{(p+q)\xi} \right)^{p-1} \left(1 - \frac{pu}{(p+q)\xi} \right)^{q-1} \quad (10)$$

La loi correspondant à des valeurs positives de $\tilde{\kappa}_3$ s'écrit sous forme d'inverse de convolution de Mellin de loi Gamma Inverse :

$$\mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, M] \quad (11)$$

Comme l'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce a une forme analytique que l'on trouve dans les tables de transformées de Mellin [1], on peut en écrire directement la forme analytique de la loi :

$$\frac{M}{L\xi} \frac{\Gamma(M)}{\Gamma(L)\Gamma(M-L)} \frac{\left(\frac{Mu}{L\xi} - 1 \right)^{M-L-1}}{\left(\frac{Mu}{L\xi} \right)^M} \quad (12)$$

avec $u \geq \frac{L\xi}{M}$, $M \geq L+1$

Il est intéressant de noter que c'est bien une loi de type Pearson I, mais que curieusement, elle est ignorée de la communauté scientifique (en particulier de [4]).

3.2 Mélange additif de loi Gamma dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ $\tilde{\kappa}_3$

Un autre cas intéressant de lois à 3 paramètres est le mélange additif de deux lois gamma $\mathcal{G}[\mu, L]$ et $\mathcal{G}[\mu', L]$ dans des proportions $\lambda \in [0, 1]$ et $\lambda' = 1 - \lambda$:

$$\lambda \mathcal{G}[\mu, L] + \lambda' \mathcal{G}[\mu', L]$$

En définissant la variable ρ telle que $\mu' = \rho\mu$, on montre aisément que la fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit :

$$\phi = (\lambda + (1-\lambda)\rho^{s-1}) \mu^{s-1} \frac{\Gamma(L+s-1)}{L^{s-1} \Gamma(L)}.$$

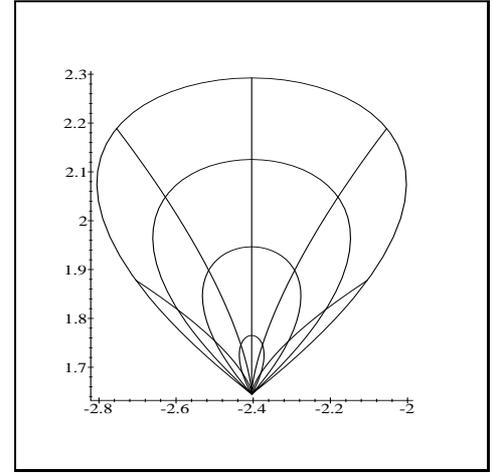
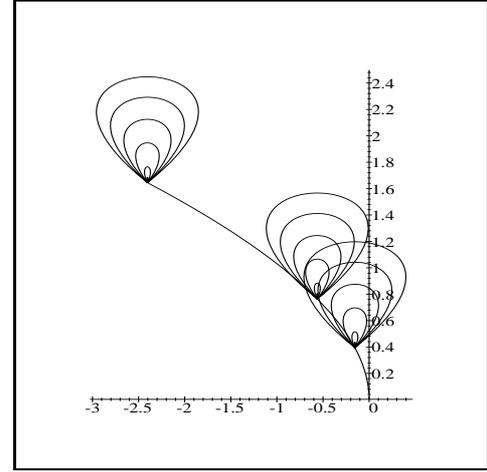


FIG. 2: Diagramme $\tilde{\kappa}_2$ $\tilde{\kappa}_3$ pour un mélange de lois Gamma décrit par les paramètres λ (proportion du mélange) et ρ (rapport des moyennes des zones). En haut, on trace plusieurs diagrammes correspondant à plusieurs valeurs de L . En bas, pour $L = 1$, on fait varier séparément λ et ρ , diagrammes que l'on place sur la même figure.

A partir de cette expression, un calcul des cumulants peut se mener directement, donnant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{x(2)} &= \Psi(1, L) + \log(\rho)^2 \lambda (1 - \lambda) \\ \tilde{\kappa}_{x(3)} &= \Psi(2, L) + \log(\rho)^3 \lambda (1 - \lambda) (2\lambda - 1) \end{aligned}$$

et on montre que, connaissant L , on obtient alors les inconnues λ et ρ : λ est alors solution d'une équation du second degré aisée à déterminer. Le calcul de la variance des estimateurs de ces deux variables ne pose pas de problème majeur et s'effectue comme précédemment (paragraphe 2) ; néanmoins, l'expression analytique est extrêmement lourde. Toutefois, grâce à ce calcul, on remarque qu'à variance égale, l'estimation d'une loi à partir du diagramme $\tilde{\kappa}_2$ $\tilde{\kappa}_3$ nécessite moins de points que le calcul mené à partir du diagramme β_1 β_2 .

Il faut noter aussi une propriété assez remarquable : dans le diagramme $\tilde{\kappa}_2$ $\tilde{\kappa}_3$, le mélange décrit des courbes spécifiques selon les valeurs de λ et de ρ dont les allures ne dépendent pas du paramètre L des lois Gamma sous jacentes.

TAB. 2: Lois définies sur \mathbb{R}^+ obtenues à l'aide de convolution de Mellin de lois Gamma et Gamma inverse

		$\tilde{\kappa}_2$	$\tilde{\kappa}_3$
Loi Gamma	$\mathcal{G}[\mu, L]$	$\Psi(1, L)$	$\Psi(2, L)$
Loi Gamma Inverse	$\mathcal{GI}[\mu, L]$	$\Psi(1, L)$	$-\Psi(2, L)$
Pearson 1	$\mathcal{G}[\mu, p] \hat{\star}^{-1} \mathcal{G}[1, p+q]$ $\mathcal{GI}[\mu, L] \hat{\star}^{-1} \mathcal{GI}[1, M]$	$\Psi(1, p) - \Psi(1, p+q)$ $\Psi(1, L) - \Psi(1, M)$	$\Psi(2, p) - \Psi(2, p+q)$ $-\Psi(2, L) - \Psi(2, M)$
Pearson 6	$\mathcal{G}[\mu, p] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, q]$	$\Psi(1, p) + \Psi(1, q)$	$\Psi(2, p) - \Psi(2, q)$
Loi K	$\mathcal{K}[\mu, L, M]$	$\Psi(1, L) + \Psi(1, M)$	$\Psi(2, L) + \Psi(2, M)$

4 Perspectives

L'analyse de lois définies sur \mathbb{R}^+ gagne à être analysée à l'aide des fonctions caractéristiques de deuxième espèce. Si cette analyse revient en apparence à se placer sur une échelle logarithmique, elle utilise certaines propriétés méconnues de la transformée de Mellin et débouche rapidement sur des expressions simples à manipuler. Les calculs de variance des estimateurs peuvent aussi être menés à bien, ce qui permet de noter que les méthodes d'estimation fondées sur cette nouvelle approche, mieux adaptée aux lois sur \mathbb{R}^+ , nécessitent moins de points que les méthodes traditionnelles.

Références

- [1] S. Colombo, J. Lavoine *Transformations de Laplace et de Mellin* Gauthier-Villars, 1972
- [2] JM Nicolas, A. Maruani *Lower order statistics : a new approach for probability density functions defined on \mathbb{R}^+* EUSIPCO2000, Tampere
- [3] JM Nicolas, M. Sigelle, C.Thuillier, F. Tupin *Images de radar à Ouverture Synthétique : transformée de Mellin et Multirésolution* GRETSI'97, Grenoble 1997
- [4] A.Stuart, J.Keith *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol.1 Distribution Theory* Griffin, 1987
- [5] JM Nicolas, A. Maruani *Speckle well modeled by Mellin transform* PIERS'98, Nantes, juillet 1998
- [6] JM Nicolas, A. Maruani *Les moments d'ordre inférieur : Principes et application au filtrage des images RSO* RFIA2000, Paris, janvier 2000