

Etude Exacte des Conditions de Convergence des Egaliseurs

Y. Ben Jemâa⁽¹⁾⁽²⁾, M.Jaidane⁽¹⁾, S.Marcos⁽²⁾

⁽¹⁾ L.S.C, ENIT, Campus Universitaire, Le Belvédère, Tunis, TUNISIE

Tél : (216-1) 874-700, Fax : (216-1) 872-729.

⁽²⁾ L.S.S SUPELEC, Plateau de Moulon 91192 GIF sur YVETTE, Paris

Tél : (331-1)69.85.17.29, Fax : (331-1)69.41.30.60,

E-mail : yousra.benjema@enis.rnu.tn,
meriem.jaidane@enit.rnu.tn et marcos@lss.supelec.fr

Résumé – Il s’agit de déterminer les conditions de convergence pour un égaliseur adaptatif transverse et de longueur finie travaillant en phase d’apprentissage optimisé avec l’algorithme du gradient stochastique dans le cas d’un canal transverse d’ordre fini. Ceci traite la convergence en moyenne, en moyenne quadratique et la convergence presque sûre.

On a pu déterminer une borne suffisante sur le pas d’adaptation critique (le pas à partir duquel l’algorithme diverge) pour différents types de canaux avec ou sans bruit. On a pu mettre en cause l’approche classique en comparant sa borne avec la borne exacte.

Abstract – In this paper, we determine the convergence conditions for adaptive and transversal equalizers in the training phase. This study concerns the mean and mean square convergence.

We determine the critical step size from which the algorithm diverges for noisy and noiseless channels. We demonstrate that classical approaches are not satisfactory and give, in some situations, a wrong result.

1 Introduction

Le rôle d’un égaliseur dans une chaîne de transmission numérique est de corriger les déformations introduites par le canal sur le signal émis et qui se traduisent par des interférences entre symboles du message à transmettre. Il est donc nécessaire de déterminer avec précision les performances de l’égaliseur utilisé.

On va traiter le cas d’un égaliseur adaptatif transverse et de longueur finie en phase d’apprentissage optimisé avec l’algorithme du gradient stochastique dans le cas d’un canal transverse d’ordre fini.

Le but de cette étude est de déterminer les conditions de convergence d’un tel égaliseur que ce soit convergence en moyenne, en moyenne quadratique ou convergence presque sûre. En fait, la détermination de ces conditions est cruciale du point de vue pratique et a un intérêt dans la conception des systèmes de transmission.

Jusqu’à présent et à travers une littérature abondante [1], l’étude des conditions de convergence des algorithmes adaptatifs a été faite sous des hypothèses simplificatrices et les résultats sont donc approximatifs.

Dans ce papier, on va essayer de mener exactement cette étude en se basant sur le caractère alphabet fini de l’entrée.

2 Approche alphabet fini

2.1 Formulation du problème

La formulation classique de l’égalisation adaptative d’un canal est donnée par le schéma ci-dessous :

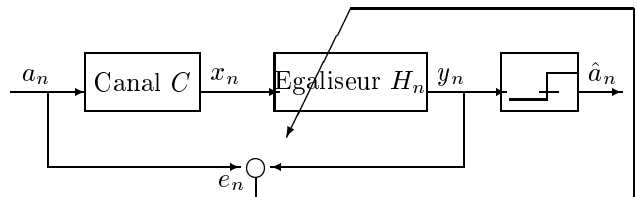


FIG. 1: Egalisation adaptative

Nous supposons pour le moment que le canal n’introduit pas de bruit et nous travaillons dans un contexte stationnaire. Par conséquent, le signal reçu au niveau du receptr est défini par :

$$x_n = C^T A_n \quad (1)$$

où x_n est l’observation supposée scalaire, C est le vecteur de dimension L représentant les paramètres du canal et $A_n = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L+1}]^T$ est le vecteur d’observation à valeurs complexes représentant le signal d’entrée.

L’équation d’entrée/sortie de l’égaliseur s’écrit :

$$y_n = H_n^T X_n \quad (2)$$

où $X_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p+1}]^T$ est le vecteur représentant l’entrée de l’égaliseur et H_n est le vecteur paramètres de l’égaliseur de dimension p .

L’adaptation se fait par l’algorithme du gradient stochastique et en phase d’apprentissage, l’ensemble est régi par le système d’équation suivant :

$$\begin{cases} e_n &= a_n - H_n^T X_n, \\ H_{n+1} &= H_n + \mu X_n^* e_n \end{cases} \quad (3)$$

où μ est le pas d'adaptation supposé constant, e_n est l'erreur *a priori* et M est le retard du à l'égalisation.

Il est important de remarquer que le problème d'égalisation peut être traité comme un problème d'identification d'un égaliseur optimal $H^{opt} = C^{-1}$ par H dont l'entrée est X_n , sortie du canal et dont la sortie est a_n , comme c'est montré dans la figure suivante :

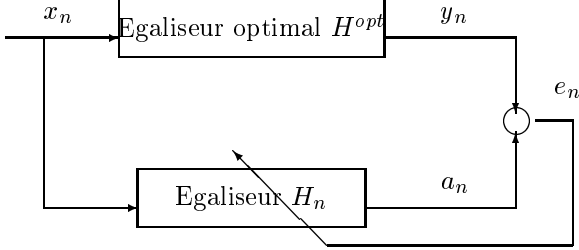


FIG. 2: Egalisation vue comme un problème d'identification

De ce fait, nous introduisons le vecteur déviation entre les paramètres de l'égaliseur optimal et ceux du filtre adaptatif défini par :

$$V_n = H_n - H^{opt} \quad (4)$$

D'après l'équation (3), la récurrence entre V_{n+1} et V_n est donnée par :

$$V_{n+1} = (I - \mu X_n^* X_n^T) V_n \quad (5)$$

2.2 Détermination du pas d'adaptation critique

C'est grâce à une approche originale dédiée au contexte alphabet fini qu'on a pu obtenir des résultats exacts en traitant des situations pratiques. Nous sommes donc capables de déterminer une expression exacte du pas d'adaptation critique μ_c (le pas à partir duquel l'algorithme diverge), sans avoir recours à des hypothèses simplificatrices.

En fait, dans le contexte particulier de transmission numérique, le signal d'entrée a_n appartient à un alphabet fini $\{s_1, s_2, \dots, s_d\}$. Par conséquent, les vecteurs A_n de dimension L de l'entrée du canal évoluent eux aussi dans un alphabet fini $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ de cardinalité $N = d^L$. De ce fait, la sortie du canal x_n appartient à un alphabet fini ($x_n = C^T A_n$) de même cardinalité que les A_n .

Les vecteurs d'entrée de l'égaliseur X_n peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-p+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C^T & \dots & 0 \\ 0 & C^T & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & C^T \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-p-L+2} \end{bmatrix}}_{A_n} \quad (6)$$

Par conséquent, ils appartiennent à un alphabet fini $\{w_1, w_2, \dots, w_R\}$ de cardinalité $R = d^{L+p-1}$ puisque le vecteur A_n est de dimension $L + p - 1$.

Puisque l'entrée est stationnaire, elle peut être modélisée par une chaîne de Markov discrète à nombre fini d'états $\{\theta(n)\}$ caractérisée par sa matrice de transition P_{ij} .

Vue que l'entrée de l'égaliseur appartient à R états, l'approche alphabet fini consiste à décomposer la matrice déviation $E(V_n V_n^H)$ en R composantes définies par :

$$Q_j(n) = E(V_n V_n^H 1_{\theta(n)=j}) \quad (7)$$

avec $1_{\theta(n)=j}$ est la fonction indicatrice qui vaut 1 si $\theta(n) = j$ et 0 sinon.

Afin d'étudier la convergence de l'algorithme, nous allons établir une récurrence entre $Q_j(n+1)$ et $Q_j(n)$, elle est donnée dans [2] et [3] par :

$$\tilde{Q}(n+1) = \Gamma \tilde{Q}(n) \quad (8)$$

avec $\tilde{Q}(n) = [vec(Q_1(n))^T, vec(Q_2(n))^T, \dots, vec(Q_R(n))^T]^T$ et

$$\Gamma = (P^T \otimes I_{p^2}) diag(M_i^H \otimes M_i) \quad (9)$$

où les matrices $M_i = (I - \mu w_i^* w_i^T)$.

Pour que l'algorithme converge en moyenne quadratique et donc en moyenne, il faut que les valeurs propres de la matrice Γ soient de modules inférieurs à 1.

D'après [4] et [5], cette condition ne peut être vérifiée que si le pas d'adaptation ne dépasse pas une valeur critique donnée par :

$$\mu_c^{AF} = \frac{2}{\max(w_i^T w_i^*)} \quad (10)$$

où μ_c^{AF} désigne le pas d'adaptation critique relatif à la nouvelle approche qui utilise le fait que l'entrée appartient à un alphabet fini.

En considérant le cas d'un alphabet réel symétrique fréquemment rencontré en pratique, nous montrons d'après l'équation (10), que le pas d'incrémention critique est borné par :

$$\mu_c^{AF} = \frac{2}{p \sum_i |c_i| \max(s_i)^2} \quad (11)$$

où les c_i sont les coefficients du canal ($C = [c_1, c_2, \dots, c_L]^T$).

Il est important de signaler que la condition sur le pas d'adaptation critique ne dépend pas des statistiques de l'entrée mais dépend uniquement des caractéristiques du canal et de l'alphabet, d'où l'intérêt pratique de cette borne. En effet, quelque soit les statistiques de l'entrée, si on prend un pas d'adaptation inférieur à cette borne nous sommes sûres de la convergence de l'algorithme.

3 Comparaison avec les approches classiques

Cette comparaison va être faite sur un exemple précis où les a_n appartiennent à l'ensemble $\{\pm 1\}$. Dans ce cas, l'égalité (11) devient :

$$\mu_c^{AF} = \frac{2}{p(|c_1| + \dots + |c_L|)^2} \quad (12)$$

La borne supérieure du pas donnée par l'approche classique est, dans le cadre de cet exemple [6]:

$$\mu_c^{cl} = \frac{2}{pE(X_k^2)} = \frac{2}{p(c_1^2 + \dots + c_L^2)} \quad (13)$$

où μ_c^{cl} désigne le pas d'adaptation donné par l'approche classique.

Il est évident que $\mu_c^{AF} < \mu_c^{cl}$. Ceci met en cause les approches classiques. En effet, si on choisit un pas appartenant à l'intervalle $[\mu_c^{AF}, \mu_c^{cl}]$, l'algorithme peut diverger alors qu'il est, d'après les approches classiques convergent.

Pour mettre en évidence l'inexactitude des approches classiques, on a simulé le comportement d'un égaliseur transverse d'ordre 2 pour un canal d'ordre 2 ($C = [0.5, 0.7]^T$) et un pas d'adaptation $\mu = 0.75$. Cette valeur est encadrée entre la valeur exacte ($\mu_c^{AF} = 0.6944$) et la valeur calculée par les approches classiques ($\mu_c^{cl} = 1.35$).

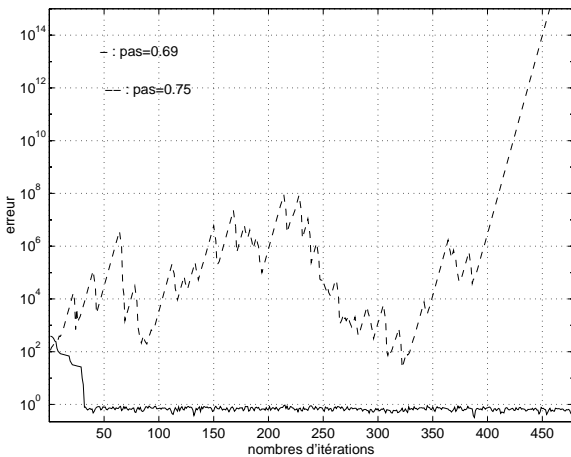


FIG. 3: Evolution des paramètres de l'égaliseur en fonction des itérations

Il est clair, d'après la figure, que l'algorithme diverge pour la valeur de $\mu = 0.75$. Cependant, les approches classiques démontrent sa convergence.

4 Pas d'adaptation critique dans le cas d'un canal bruité

Nous supposons maintenant que le canal introduit un bruit blanc additif gaussien b_n de puissance σ^2 . Par conséquent, le signal reçu au niveau du récepteur est défini par :

$$x_n = C^T A_n + b_n \quad (14)$$

Le vecteur X_n est donné dans ce cas par :

$$X_n = CA_n + B_n \quad (15)$$

Avec B_n désigne le vecteur bruit formé par $[b_n, b_{n-1}, \dots, b_{n-p+1}]^T$

D'après l'équation (3) et (15), nous pouvons établir une récurrence entre $E(H_{n+1})$ et $E(H_n)$ pour étudier la convergence en moyenne du système. La relation est la suivante :

$$\begin{aligned} E(H_{n+1}) &= E(H_n) - \mu E(B_n^* B_n^T H_n) - \mu E(CA_n^* B_n^T H_n) \\ &\quad - \mu E(B_n^* A_n^T C^T H_n) + \mu E(CA_n^* A_n^T U) \\ &\quad - \mu E(CA_n^* A_n^T C^T H_n) + \mu E(U^T A_n B_n^*) \end{aligned} \quad (16)$$

Avec $U^T = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots]^T$ tel que le 1 se trouve à la M ième place.

Comme dans la section précédente, nous décomposons le vecteur $E(H_n)$ en R composantes $q_j(n) = E(H_n 1_{\theta(n)=j})$ et en utilisant le caractère alphabet fini du signal A_n , nous aboutissons à la récursion suivante entre $q_j(n+1)$ et $q_j(n)$:

$$\begin{aligned} q_j(n+1) &= \sum_{i=1}^R (I - \mu C w_i^* w_i^T C^T) q_i(n) P_{ij} + \mu C P_A U \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^R E(B_n^* B_n^T H_n 1_{\theta(n+1)=j} 1_{\theta(n)=i}) \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^R C w_i^* E(B_n^T H_n 1_{\theta(n+1)=j} 1_{\theta(n)=i}) \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^R w_i^T C^T E(H_n B_n^* 1_{\theta(n+1)=j} 1_{\theta(n)=i}) \\ &\quad + \mu U^T \sum_{i=1}^R w_i P_{ij} E(B_n^*) \end{aligned} \quad (17)$$

avec P_A est la puissance du signal A_n .

Du fait que les deux vecteurs B_n et H_n sont indépendants et que le bruit B_n est centré, les trois derniers termes de l'équation (17) sont nuls et nous montrons ainsi, que le système est régi par la récurrence suivante :

$$\tilde{q}(n+1) = \Lambda \tilde{q}(n) + \tilde{Z}(n) \quad (18)$$

où $\tilde{Z}(n) = \mu P_A C U$, $\tilde{q}(n) = [q_1(n)^T, q_2(n)^T, \dots, q_R(n)^T]^T$ et

$$\Lambda = (P^T \otimes I_p) \text{diag}(\mathcal{M}_i) \quad (19)$$

où les matrices $\mathcal{M}_i = ((1 - \mu\sigma^2)I - \mu w_i^* w_i^T)$.

REFERENCES

En se basant sur l'étude des valeurs propres de la matrice Λ , la borne exacte du pas d'adaptation critique est donnée dans ce cas par :

$$\mu_c^{AF} = \frac{2}{(\sigma^2 + \max(w_i^T w_i^*))} \quad (20)$$

il est important de remarquer que l'ajout du bruit entraîne une contrainte plus grande sur la condition de convergence dans le sens où la borne du pas critique devient plus petite. Cette contrainte devient de plus en plus importante quand la puissance du bruit augmente.

Dans la figure suivante, nous allons considérer l'alphabet de l'entrée du canal $\{\pm 1\}$, le canal $[0.5, 0.7]$ et un égaliseur d'ordre 2. Le bruit est de puissance $\sigma^2 = 0.01$. Le pas critique relatif à ce bruit est $\mu_c = 0.6920$. il est clair que pour cette valeur du pas d'adaptation, l'algorithme converge par contre, pour $\mu = 0.75$, l'algorithme reste toujours divergent.

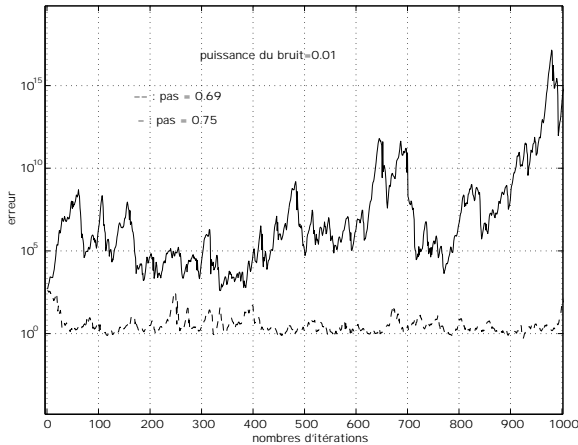


FIG. 4: Evolution des paramètre de l'égaliseur en fonction des itérations, dans le cas d'un canal bruité

5 Conclusion

Dans le cadre de l'étude de la convergence des égaliseurs transverses en phase d'apprentissage, des conditions nécessaires de convergence sont énoncées. Une borne suffisante sur le pas d'adaptation est donnée pour des canaux sans et avec bruit et elle est simple à calculer. Nous avons pu montrer que les valeurs du pas critique déterminées par les approches classiques peuvent causer la divergence de l'algorithme.

- [1] O. Macchi, "LMS adaptive processing with applications in transmission", Wiley, 1994.
- [2] H. Besbes, Y. Ben Jemâa et M. Jaidane, "Exact convergence analysis of affine projection algorithm: the finite alphabet input case", ICASSP, Vol 3, pp 1669-1672, mars 1999.
- [3] Y. Ben Jemâa, H. Besbes et M. Jaidane, "Exact analysis of adaptive and transversal equalizers: the finite alphabet input case", ACIDCA, mars 2000.
- [4] H. Besbes, M. Jaidane et J. Ezzine, "On Exact Convergence Results of Adaptive Filters: the Finite Alphabet Case", Int.J. Signal Processing de EURASIP, dec 1999.
- [5] H. Besbes, "Filtrage adaptatif dans le contexte alphabet fini. Application à l'identification de canaux non-linéaires et non-stationnaires", thèse soutenue en février 1999 à l'Université de TunisII, ENIT.
- [6] J.G Proakis, "Digital communications", 2nd edition McGraw-Hill, N.Y.1991.