

Shock Filters and Mathematical Morphology

Benoit TREMBLAIS, Bertrand AUGEREAU, Michel LEARD

Laboratoire IRCOM-SIC UMR 6615 CNRS, Université de Poitiers,
Bât SP2MI, 1 bvd Marie et Pierre Curie,
BP 30179 , 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex , France.

tremblai@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr, augereau@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr
leard@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr

Résumé – Nous traitons dans cet article des méthodes de rehaussement d’images par Equations aux Dérivées partielles (EDP). Nous proposons une nouvelle EDP inspirée de l’EDP de filtre de choc et de la morphologie mathématique. Nous présentons une comparaison des performances de ce nouveau filtre de choc avec le filtre de choc classique.

Abstract – In the present paper we deal with image enhancement by Partial Differential Equations (PDEs). We propose a new PDE which is based on shock filters and mathematical morphology. Then, we compare the performance of this new filter with the classical shock filter ones.

1 Introduction

Pour éliminer le flou dans les images, l’idée générale est d’accentuer les transitions en augmentant localement leur amplitude. Diverses approches existent dans la littérature : les filtres linéaires [11], [3], les filtres homomorphiques [4], les filtres d’ordre adaptatifs [6], les filtres morphologiques [9], ... Dans cet article, nous ne nous intéressons qu’aux méthodes de rehaussement d’images par Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Perona et Malik [8] sont les premiers à proposer une EDP qui en combinant des processus de diffusion direct et inverse permet de rehausser les images. Néanmoins, le processus itératif de diffusion inverse est connu pour être instable. L. Rudin [10] propose alors, d’utiliser une EDP de filtre de choc utilisée classiquement en mécanique des fluides pour rehausser les images de façon stable. Dans la section 2 nous décrivons le principe du filtre de choc. Dans la section 3, après avoir établi le lien entre filtre de choc et morphologie mathématique, nous présentons une nouvelle EDP de filtre de choc inspirée des méthodes de la morphologie mathématique en niveaux de gris. Ensuite, dans la section 4, nous comparons les performances de ce nouveau filtre de choc avec celui de Rudin en terme de rehaussement, de sensibilité au bruit et de stabilité.

2 Rehaussement par filtre de choc

Tout d’abord, introduisons quelques notations. Dans cet article, nous traitons des processus itératifs sur des images bi-dimensionnelles. Une image est donc modélisée par la fonction : $I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \theta \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}$. Soit $\chi = \{x, y\}$ le système de coordonnées. L’opérateur $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ nous permet d’obtenir le gradient de l’image I . Soit $I_t = \frac{\partial I}{\partial t}$. Soit $\xi = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. La dérivée seconde dans la direction de ξ est notée $I_{\xi\xi}$. Pour

toutes les EDP, les conditions aux bords de l’image sont celles de Neumann et la méthode numérique d’approximation du terme $\|\nabla I\|$ est celle de Brockett et Maragos [2].

L. Rudin [10] est le premier à avoir proposé, avec la notion de filtre de choc, l’utilisation de concepts et de techniques développés dans le cadre des solutions d’EDP hyperboliques non-linéaires pour le traitement d’images. L’idée est d’inverser le sens du flux au niveau des structures à rehausser afin d’améliorer le contraste. Un moyen de faire cela est d’imposer des niveaux de gris opposés de part et d’autre du contour. Voici l’équation proposée par Rudin :

$$\begin{cases} I_t & = -\text{signe}(I_{\xi\xi}^0) \|\nabla I\| \\ I(x, y, t = 0) & = I^0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

où I_0 et $I_{\xi\xi}^0$ représentent respectivement l’image initiale et la dérivée seconde locale dans la direction du gradient pour l’image initiale. Le terme $I_{\xi\xi}$ est un opérateur linéaire permettant de localiser les contours de l’image. Rudin fait l’hypothèse que le signe de $I_{\xi\xi}$ évolue peu au cours des itérations. C’est pour cela qu’il l’estime dès la première étape du processus. Ce filtre permet, en théorie, de rehausser les contours des images de façon stable et non-oscillante ainsi que de reconstruire une image constante par morceaux. Néanmoins, il reste très sensible au bruit.

3 Rehaussement par filtre de choc morphologique

Si l’on remarque d’une part que l’EDP de filtre de choc de Rudin peut, suivant le signe de $I_{\xi\xi}^0$, se décomposer

comme suit :

$$I_t = -\|\nabla I\| \quad \text{si } I_{\xi\xi}^0 > 0 \quad (2)$$

$$I_t = 0 \quad \text{si } I_{\xi\xi}^0 = 0 \quad (3)$$

$$I_t = +\|\nabla I\| \quad \text{si } I_{\xi\xi}^0 < 0 \quad (4)$$

et que d'autre part les EDP (2) et (4) correspondent respectivement à l'EDP d'érosion et à l'EDP de dilatation [7], nous pouvons alors, interpréter l'EDP de filtre de choc en terme de morphologie mathématique en niveaux de gris. Les opérateurs d'érosion et de dilatation sont connus pour être plus sensibles au bruit que les opérateurs d'ouverture et de fermeture. Nous proposons, donc d'augmenter la robustesse au bruit du filtre de choc de Rudin en substituant les opérateurs d'ouverture et de fermeture aux opérateurs d'érosion et de dilatation. Nous obtenons ainsi, une nouvelle EDP de filtre de rehaussement d'image. Elle se présente sous la forme discrétisée :

$$\begin{cases} I^{k+\frac{1}{2}} &= I^k + \lambda \operatorname{signe}(I_{\xi\xi}^0) \|\nabla I^k\| \\ I^{k+1} &= I^{k+\frac{1}{2}} - \lambda \operatorname{signe}(I_{\xi\xi}^0) \|\nabla I^{k+\frac{1}{2}}\| \\ I(x, y, t = 0) &= I^0 \end{cases} \quad (5)$$

où λ est le pas de discrétisation temporel.

4 Résultats

Afin d'évaluer les performances de notre filtre de choc morphologique, nous allons dans cette partie comparer ses capacités de rehaussement, sa sensibilité au bruit et sa stabilité à celles du filtre de choc de Rudin. Pour cela, nous appliquerons les filtres sur l'image de synthèse savoise du GDR-PRC ISIS, lissée par un filtre gaussien de moyenne nulle et d'écart type 2 que nous noterons par la suite I_L (Fig. 1).

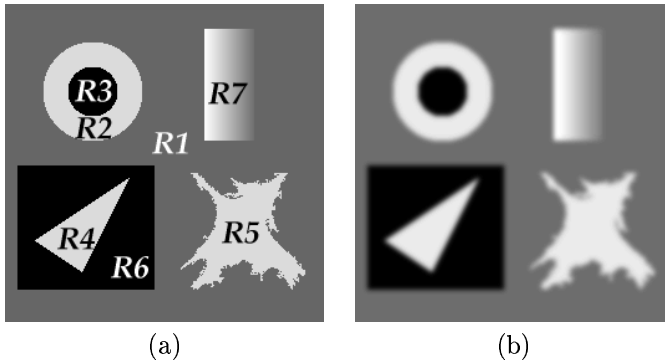


FIG. 1: (a) image savoise (I), (b) image savoise lissée (I_L).

4.1 Performances de rehaussement

4.1.1 Evolution temporelle de la moyenne des gradients sur les contours

L'un des objectifs principaux d'un filtre de rehaussement d'image est de réduire l'étendue de la zone de transition entre les régions. Pour caractériser cela, nous allons étudier l'évolution de la moyenne (m_g) des gradients sur

les contours de l'image lissée I_L au cours des deux processus itératifs précédents. Nous présentons les résultats de cette expérience sur la figure 2. Nous avons fait figurer à titre de comparaison la moyenne des gradients sur les contours de l'image savoise (I). Nous constatons que les

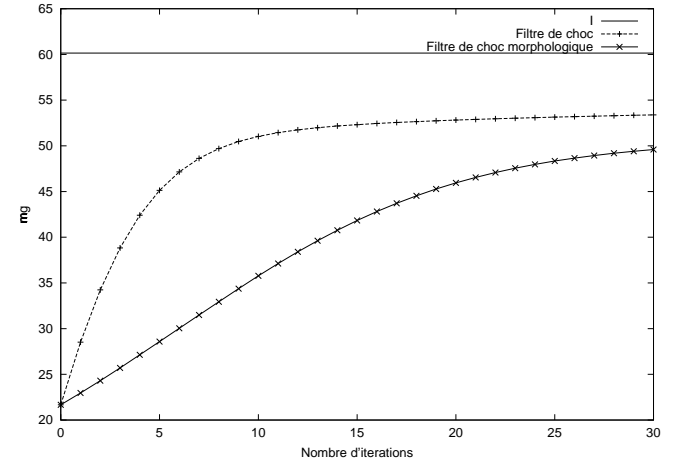


FIG. 2: Evolution temporelle de la moyenne des gradients sur les contours de l'image I_L pour les deux processus et pour $\lambda = 0.5$.

deux filtres réduisent bien la zone de transition entre les régions. Mais le filtre de choc offre de meilleures performances que le filtre de choc morphologique. Néanmoins, l'écart entre les deux méthodes se réduit au cours des itérations.

4.1.2 Evolution temporelle du contraste

Un autre manière d'évaluer la qualité de rehaussement d'une image est d'étudier l'évolution du contraste (Eq. 6) entre les régions adjacentes de l'image. Soient R_i et R_j deux régions adjacentes d'une image I . Le contraste entre ces deux régions sera défini ici par :

$$C(R_i, R_j) = \frac{\mu(R_i) - \mu(R_j)}{2^n - 1} \quad (6)$$

où $\mu(R)$ et n sont respectivement la moyenne des niveaux de gris de la région R et le nombre de bits de codage de l'image. Par soucis de concision, nous ne présentons ici, que l'évolution du contraste entre les régions R_1 et R_2 et, R_1 et R_6 (Fig. 1). Nous présentons ces résultats sur les figures 3 et 4. De même que précédemment, nous faisons figurer à titre de comparaison le contraste entre les régions R_1 et R_2 et, R_1 et R_6 pour l'image savoise. Nous constatons d'une part que pour les deux filtres, le contraste augmente au cours des itérations et d'autre part, que le filtre de choc offre des performances légèrement meilleures.

Finalement, en terme de rehaussement, pour un même nombre d'itérations, le filtre de choc classique est plus performant que le filtre de choc morphologique. Nous pouvons vérifier qualitativement ces faits sur la figure 5.

4.2 Sensibilité au bruit

Soit B_1 un bruit additif, gaussien, centré et de variance 0.01. Soit B_2 un bruit de type «speckle» de variance 0,01.

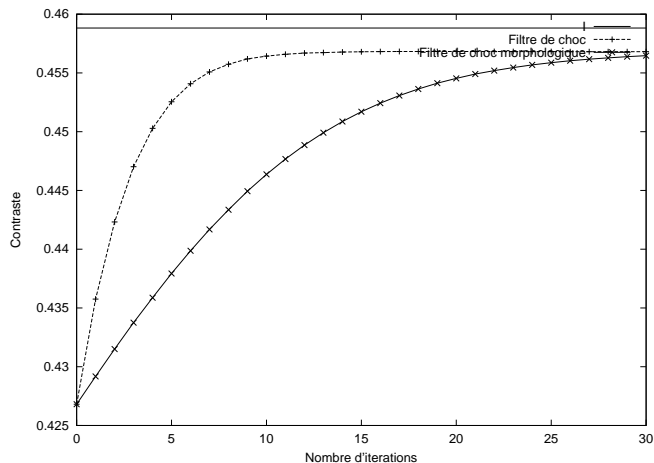


FIG. 3: Evolution temporelle du contraste entre les régions R_1 et R_2 de l'image I_L pour les deux filtres de choc et pour $\lambda = 0.5$.

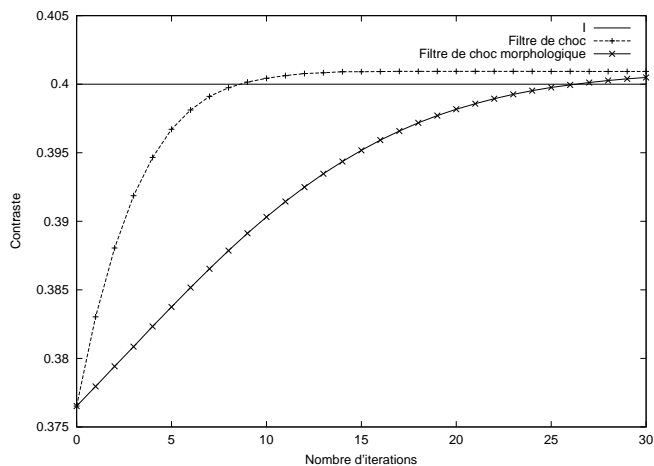


FIG. 4: Evolution temporelle du contraste entre les régions R_1 et R_6 de l'image I_L pour les deux filtres de choc et pour $\lambda = 0.5$.

Soient I_{LB_1} et I_{LB_2} respectivement, l'image I_L entachée des bruits B_1 et B_2 (Figure 6). Nous allons comparer la sensibilité au bruit des deux filtres de choc sur ces deux images de synthèse. Pour cela, nous utiliserons le rapport signal sur bruit (RSB) comme critère quantitatif :

$$RSB(I, Ref) = 20 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i,j} I_{i,j}^2}{\sum_{i,j} (I_{i,j} - Ref_{i,j})^2} \right) \quad (7)$$

où Ref est l'image de référence (ou de synthèse). Soient C_5 et CM_5 les images respectives obtenues par les équations (1) et (5) appliquées aux images I_{LB_1} ou I_{LB_2} pour $t = 5$. Les tableaux 1 et 2 présentent respectivement les rapports signal sur bruit pour les deux filtres de choc appliqués aux images I_{LB_1} et I_{LB_2} pour $t = 5$. Bien évidemment, pour les deux processus, le rapport signal sur bruit augmente au cours des itérations. Les filtres de rehaussement sont en effet, faits pour accentuer les fréquences élevées du signal image. Il est donc naturel que les deux filtres de chocs soient sensibles au bruit. Néanmoins, que se soit pour le bruit gaussien ou pour le bruit de type «speckle», le filtre de choc morphologique est nettement moins perturbé par

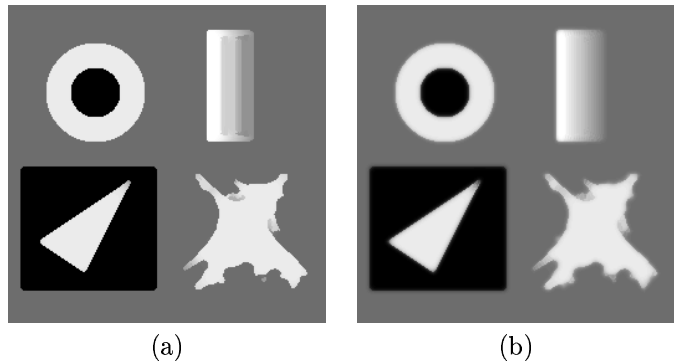


FIG. 5: (a) Image I_L rehaussée par (1), (b) I_L rehaussée par (5) pour $t = 5$.

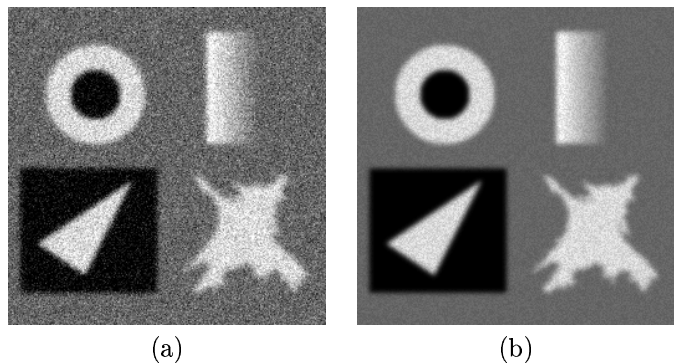


FIG. 6: (a) I_{LB_1} , (b) Image I_{LB_2} .

le bruit que le filtre de choc. Nous pouvons l'observer parfaitement sur la figure 7.

Afin de réduire la sensibilité au bruit du filtre de choc certains auteurs [5], [1] modifient l'équation (1) de la façon suivante :

$$\begin{cases} I_t &= -[h_\tau(\|\nabla I_\sigma\|)] \text{signe}((I_\sigma^0)_{\xi\xi}) \|\nabla I\| \\ I(x, y, t = 0) &= I^0(x, y) \end{cases} \quad (8)$$

avec

$$h_\tau = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{si } \tau < 0 \end{cases} \quad (9)$$

I_σ et $I_{\tilde{\sigma}}$ étant respectivement l'image I lissée par les gaussiennes d'écart type σ et $\tilde{\sigma}$. Cette modification permet d'estimer au mieux le signe de $I_{\xi\xi}^0$ et de n'effectuer des chocs que sur les structures significatives. Pour simplifier la comparaison entre les deux filtres de choc nous n'avons pas jugé nécessaire d'introduire de telles modifications.

4.3 Stabilité du processus

L'équation (5) se décomposant en deux équations d'Hamilton-Jacobi équivalentes (à un signe près) à l'équa-

TAB. 1: Comparaison des Rapports Signal sur Bruit (RSB) des deux filtres de choc appliqués à l'image I_{LB_1} pour $t = 5$.

Images	I	I_L	I_{LB_1}	C_5	CM_5
RSB (en dB)	∞	35, 46	25, 28	18, 56	22, 07

TAB. 2: Comparaison des Rapports Signal sur Bruit (RSB) des deux filtres de choc appliqués à l'image I_{LB_2} pour $t = 5$.

Images	I	I_L	I_{LB_1}	C_5	CM_5
RSB (en dB)	∞	35, 46	33, 90	30, 67	33, 25

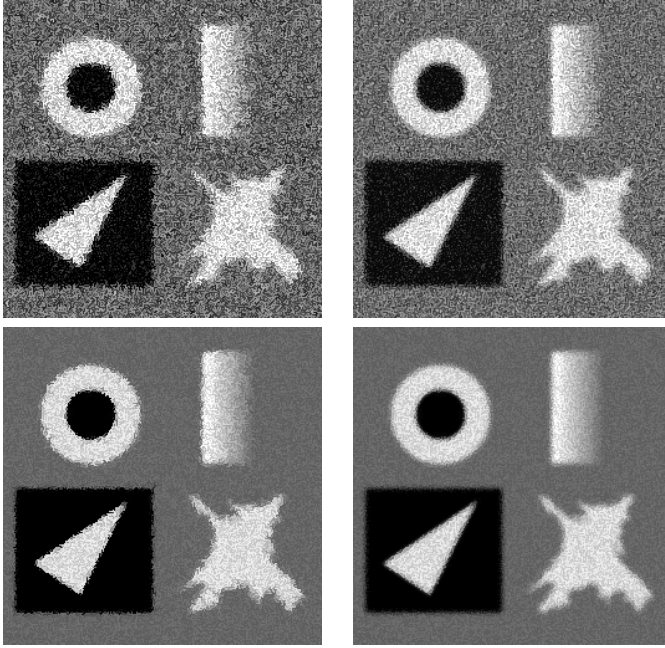


FIG. 7: En haut : I_{LB_1} rehaussée par (1) et par (5) pour $t = 5$, en bas : I_{LB_2} rehaussée par (1) et par (5) pour $t = 5$.

tion (1), la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) nécessaire à la stabilité du schéma numérique de l'équation (5) est donc la même que pour l'équation (1). Soit, pour des pas de discrétisation spatiaux égaux à 1, $\lambda \leq 0.5$. Le processus itératif (5) présente donc des propriétés de stabilité aussi bonnes que le processus (1). Sur la figure 8, les résultats de l'application des deux filtres de choc sur l'image I_L pour $t = 500$ (avec $\lambda = 0.5$) montrent que les deux processus restent stables, même après un grand nombre d'itérations.

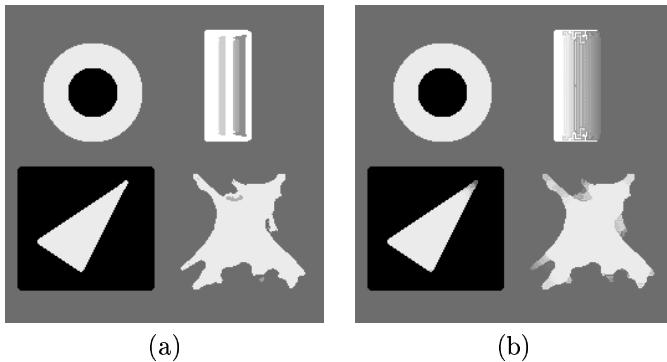


FIG. 8: (a) Image I_L rehaussée par (1), (b) I_L rehaussée par (5) pour $t = 500$.

5 Conclusion

Après avoir fait le lien entre EDP de filtre de choc et les opérateurs d'érosion et dilatation de la morphologie mathématique en niveaux de gris, nous avons proposé un nouveau filtre de choc permettant de rehausser les contours de façon stable et non-oscillante avec une moindre sensibilité au bruit. Le filtre de rehaussement proposé ici peut, à l'instar d'Alvarez et al. [1] ou Kornprobst [5], facilement être couplé avec un terme de lissage et donc améliorer sensiblement un processus de restauration d'image.

Remerciements

Nous remercions la région Poitou-Charentes pour le financement de ces travaux.

Références

- [1] L. ALVAREZ AND L. MAZORRA, *Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion*, SIAM Journal of Numerical Analysis, 31 (1994), pp. 590–605.
- [2] R. BROCKETT AND P. MARAGOS, *Evolution equations for continuous-scale morphological filtering*, IEEE Transactions on Signal Processing, 42 (1994), pp. 3377–3385.
- [3] D. GABOR, *Information theory in electron microscopy*, Laboratory Investigation, 14 (1965), pp. 801–807.
- [4] A. JAIN, *Fundamentals of digital image processing*, Prentice Hall, 1989.
- [5] P. KORNPBST, *Contribution à la restauration d'images et à l'analyse de séquences : approches variationnelles et solutions de viscosité*, PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, Novembre 1998.
- [6] Y. LEE AND A. FAM, *An edge gradient enhancing adaptive order statistic filter*, IEEE Tans. on ASPP, 35 (1987), pp. 680–695.
- [7] P. MARAGOS, *Differential morphology: Multiscale image dynamics, max-min difference equations, and slope transforms*, ICIP-II, (1994).
- [8] P. PERONA AND J. MALIK, *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*, IEEE Transaction On Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12 (1990), pp. 629–639.
- [9] F. PRÊTEUX, *Description et interprétation des images par la morphologie mathématique : application à l'imagerie médicale.*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, 1987.
- [10] L. RUDIN, *Shock filters*, tech. rep., Rockwell International Science Center Annual DARPA, 1984.
- [11] J. SHEN AND S. CASTAN, *Un nouvel algorithme de detection de contours*, 5ème Congrès AFCET-RFIA Grenoble, (1985), pp. 201–213.