

Identification de filtres inverses périodiques pour la déconvolution et la séparation de processus cyclostationnaires

Jérôme ANTONI, Mohammed EL BADAoui, François GUILLET, Joannès DANIERE

Laboratoire d'Analyse des Signaux et des Processus Industriels
20, Avenue de Paris, 42334 Roanne Cédex, France
antoni@univ-st-etienne.fr, Elbadaoui@univ-st-etienne.fr

Résumé – Le problème de l'identification d'un filtre inverse pour la déconvolution de processus cyclostationnaires est traité. L'approche est menée dans le cadre de l'isomorphisme de Wold. La supériorité du filtre inverse périodique par rapport au filtre inverse invariant est largement discutée.

Abstract – The issue of identifying an inverse filter for the deconvolution of cyclostationary processes is investigated. This is done by using the Wold's isomorphism. The superiority of the periodic inverse filter over its invariant counterpart is stressed.

1 Introduction

La recherche d'un filtre inverse qui restitue au mieux l'entrée d'un système dont on observe la réponse est un objectif récurrent à de nombreux problèmes physiques. Lorsque les processus considérés sont cyclostationnaires se pose alors la question de la structure du filtre inverse à identifier. Nous montrons dans cet article que le filtre inverse linéaire périodique est la forme optimale qui satisfait aux hypothèses habituelles sur la relation entrée / sortie d'un système. Cela reste généralement vrai lorsque la relation directe est invariante. Nous justifions ces assertions à partir des processus équivalents d'énergie finie, définis sur la longueur du cycle. Cette équivalence, formalisée par l'isomorphisme de Wold, est valable sous des conditions que nous rappelons. Dans ce cadre, le problème de l'identification devient trivial.

Les résultats présentés dans cet article sont issus d'un travail sur le diagnostic des machines tournantes, cependant nous pensons qu'ils sont facilement transposables à d'autres domaines d'application qui impliquent des processus cyclostationnaires. C'est pourquoi nous les présentons d'abord d'une manière générale, avant d'étudier une application réelle à un problème industriel.

2 Cyclostationnarité au sens large

Les signaux dont il est question dans cette communication appartiennent à la classe des processus cyclostationnaires au sens large, c'est à dire dont les propriétés statistiques jusqu'à l'ordre 2 au moins sont périodiques par rapport à un cycle de base N fini. Pour un processus stochastique discret $\{X[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, l'espérance mathématique $m_X[n]$ et la fonction de covariance $K_{XX}[m, n]$ vérifient $m_X[n + N] = m_X[n]$ et $K_{XX}[m + N, n + N] = K_{XX}[m, n]$.

Dans le domaine fréquentiel et sous réserve d'harmonisabilité, on montre que la double TFD de la fonction de covariance donne lieu à une densité de corrélation spectrale $S_{XX}(\nu_1, \nu_2)$ nulle partout sauf sur la famille de droites équidistantes et parallèles à la première bissectrice du repère (ν_1, ν_2) , telle que [1]

$$S_{XX}(\nu_1, \nu_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{XX}^k \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) \delta \left(\nu_1 - \nu_2 + \frac{k}{N} \right) \quad (1)$$

La propriété de cyclostationnarité est généralement la conséquence d'un mécanisme périodique inhérent aux phénomènes qui génèrent le processus. Dans le cas des machines tournantes qui a motivé cette étude, elle est donc une conséquence naturelle lorsque les conditions de fonctionnement sont parfaitement stables.

3 Isomorphisme de Wold

Afin de pouvoir estimer des statistiques à partir de la mesure d'une trajectoire du processus $X[n]$, une approche intuitive consiste à remplacer les moyennes d'ensemble théoriques par des moyennes temporelles sur les cycles. Pour les séquences discrètes, le concept se formalise au travers de l'isomorphisme de Wold [2]. L'idée consiste à substituer à l'analyse du processus $\{X[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ celle du processus $\{X_N[m]\}_{m=0}^{N-1}$ d'énergie finie, défini sur la longueur du cycle et construit par fractionnement d'une trajectoire quelconque $x[n]$ de $X[n]$. Formellement, en définissant ζ une variable aléatoire qui prend des valeurs entières :

$$X_N[m] = x[m + \zeta N], \quad m = 0, \dots, N - 1 \quad (2)$$

Le principe de l'isomorphisme est schématisé à la figure (1). Il établit la stricte équivalence des statistiques du processus $X_N[m]$ avec celles du processus original, c'est à

dire,

$$m_{X_N} [m] = m_X [m + iN] \quad (3)$$

$$K_{X_N X_N} [m, n] = K_{X X} [m + iN, n + iN] \quad (4)$$

$$m, n = 0, \dots, N - 1, \quad i \in \mathbb{Z}$$

Du fait de la troncature de la fonction de covariance sur le cycle, la densité de corrélation spectrale du processus $X_N [m]$ est liée à celle du processus original par une convolution avec les fonctions sinus cardinal. Pour éviter ce problème, nous supposons que le support effectif de $K_{X_N X_N} [m, n]$ est contenu sur le cycle, de sorte qu'il y ait équivalence des densités de corrélation spectrale sur tous les canaux de fréquences k/N : $S_{X_N X_N} (\frac{k}{N}, \frac{l}{N}) = N \cdot s_{X X}^{l-k} (\frac{k+l}{2N})$, $k, l = 0, \dots, N - 1$. Sous ces conditions, $S_{X_N X_N} (\frac{k}{N}, \frac{l}{N})$ réalise un échantillonnage de $S_{X X} (\nu_1, \nu_2)$ sur ses valeurs non-nulles.

4 Filtrage inverse périodique en contexte cyclostationnaire

4.1 Relation entrée-sortie directe

Nous considérons ici que le processus observé $Y [m]$ est la réponse d'un système linéaire excité par une source transitoire $X [m]$, éventuellement pollué par un bruit additif $B [m]$. Soit $h [m, n]$ la réponse impulsionnelle causale du système que nous supposons sous sa forme linéaire la plus générale. De par la cyclostationnarité des processus $\{Y, X, B\}$, la fonction de Green $h [m, n]$ du système est implicitement périodique telle que $h [m + N, n + N] = h [m, n]$ le cas invariant apparaissant comme un cas particulier.

Lorsque la somme du support de la source et du support effectif de la réponse impulsionnelle (maximum sur tous les m) est inférieure à la durée N du cycle, on peut écrire :

$$Y_N [m] = \sum_{n=0}^m h [m, n] X_N [n] + B_N [m], \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (5)$$

où $\{Y_N, X_N, B_N\}$ sont les processus équivalents construits comme indiqué au paragraphe précédents.

Par ailleurs, il n'est pas rare que la réponse impulsionnelle présente de petites fluctuations aléatoires autour d'une valeur moyenne, de sorte que $h [m, n]$ soit également un processus stochastique que nous notons $H [m, n]$.

4.2 Relation entrée-sortie inverse

L'objectif est de reconstruire la source $X_N [m]$ à partir de l'observation bruitée $Y_N [m]$. Il s'agit d'un problème de déconvolution, qui passe d'abord par l'identification d'un filtre inverse optimal. De manière générale, une estimation $\hat{X}_N [m]$ de $X_N [m]$ est envisagée sous la forme

$$\hat{X}_N [m] = \sum_{n=0}^{N-1} g [m, n] Y_N [n], \quad m = 0, \dots, N - 1 \quad (6)$$

avec $g [m, n]$ une fonction de Green périodique en N . Le filtre optimal g_{opt} trouvé par minimisation de l'énergie de

l'erreur de prédiction permet de donner une justification théorique à la périodicité du filtre. Pour ce faire, reformulons le problème dans le domaine fréquentiel. Posons \mathbf{S}_{UV} la matrice d'intercorrélation spectrale entre les processus arbitraires $U_N [m]$ et $V_N [m]$ construite à partir des éléments de la densité de corrélation spectrale $S_{U_N V_N} (\frac{k}{N}, \frac{l}{N})$ et $\tilde{\mathbf{H}}$ et $\tilde{\mathbf{G}}_{opt}$ les matrices de transfert construites à partir des éléments des doubles TFD de $H [m, n]$ et $g_{opt} [m, n]$. On montre alors que [3] :

$$\tilde{\mathbf{G}}_{opt} = \mathbf{S}_{Y_N X_N} \mathbf{S}_{Y_N Y_N}^{-1} \quad (7)$$

$$= \mathbf{S}_{X_N X_N} E \left\{ \tilde{\mathbf{H}} \right\} \left(E \left\{ \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{S}_{X_N X_N} \tilde{\mathbf{H}} \right\} + \mathbf{S}_{B_N B_N} \right)^{-1} \quad (8)$$

Ce résultat a le mérite de montrer que le filtre inverse est *variable périodiquement* dès lors que la matrice $\tilde{\mathbf{G}}_{opt}$ est non-diagonale. Cette situation est une conséquence des cas non-exclusifs suivants :

- la relation directe est variable périodiquement ($\tilde{\mathbf{H}}$ non-diagonale),
- la matrice de corrélation spectrale est non-nulle (le cas diagonal étant exclu puisque le processus est à support borné),
- la réponse impulsionnelle H est stochastique.

Inversement, le filtre inverse est *invariant* ssi la matrice $\tilde{\mathbf{G}}_{opt}$ est diagonale, ce qui est réalisé lorsque la relation directe est à la fois invariante, déterministe et sans bruit additif. On a alors $\tilde{\mathbf{G}}_{opt} = \tilde{\mathbf{H}}^{-1}$. L'hypothèse d'un filtre inverse périodique est donc la plus générale en pratique. Par rapport à sa contre-partie invariante, le filtre inverse périodique a la possibilité de réaliser un rejet du bruit plus sévère. En particulier, lorsque le bruit $B [m]$ est décorrélé de la source $X [m]$ et que leurs supports respectifs dans le domaine fréquentiel (ν_1, ν_2) sont disjoints, on montre alors qu'il est théoriquement possible de reconstruire *exactement* la source $X [m]$ à partir de la seule observation de la sortie $Y [m]$ du système [4]. Le problème de la déconvolution se formule alors comme celui de la séparation de sources. Par comparaison aux méthodes classiques de séparation de sources qui utilisent une batterie de capteurs, la diversité spatiale est ici remplacée par la diversité fréquentielle provenant de la cyclostationnarité des processus analysés.

5 Structures de filtres et identification

Plusieurs structures de filtres sont envisageables pour identifier $g_{opt} [m, k]$. Elles conduisent à des implémentations plus ou moins aisées, mais impliquent surtout des manières différentes de traiter le problème de la réduction du nombre de degrés de liberté du filtre inverse. Cet aspect est essentiel dans nombre d'applications, car le choix d'un filtre périodique nécessite théoriquement d'identifier $N_{ddl} = N^2$ coefficients contre N pour sa contre partie invariante, ce qui devient vite prohibitif. En pratique, il est nécessaire de réduire le nombre N_{ddl} de degrés de liberté afin de préserver une signification statistique suffisante aux estimations (réduction la variance d'estimation), ce

qui se traduit colatéralement par une meilleure robustesse du modèle.

Structure en bloc

La forme la plus immédiate est donnée par (8) ou, plus simplement, par sa forme duale en temps :

$$\mathbf{G}_{opt} = \mathbf{K}_{Y_N X_N} \mathbf{K}_{Y_N Y_N}^{-1} \quad (9)$$

avec $\mathbf{K}_{U_N V_N}$ la matrice d'intercovariance des processus arbitraires $U_N[m]$ et $V_N[m]$ et \mathbf{G}_{opt} la double TFD inverse de $\tilde{\mathbf{G}}_{opt}$. La matrice $\mathbf{K}_{U_N V_N}$ est estimée de manière consistante par moyennage sur plusieurs cycles consécutifs.

Afin de réduire le nombre de degrés de liberté, une solution consiste à remplacer $\mathbf{K}_{Y_N Y_N}^{-1}$ par sa pseudo-inverse de rang N_v . Ce procédé consiste en fait à appliquer un filtre sur les valeurs propres ordonnées de $\mathbf{K}_{Y_N Y_N}$, de manière à rejeter les $N - N_v$ valeurs propres plus moins énergétiques (par ailleurs, sont susceptibles d'instabiliser la procédure de déconvolution) [5].

Structure en banc de filtres

La structure en banc de filtres [6] consiste à paramétrer les variations de la fonction de Green de sorte à remplacer la relation périodique de type *entrée simple/sortie simple* par une relation invariante de type *entrées multiples/sortie simple*. En effet, la relation inverse (6) combinée à la nature périodique du filtre inverse permet d'écrire :

$$\hat{X}_N[m] = \sum_{k=-K}^K \sum_{n=0}^{N-1} g_{opt}^k[m-n] \left(Y_N[n] e^{-j2\pi kn/N} \right) \quad (10)$$

où les filtres invariants g_{opt}^k sont les coefficients de la série de Fourier $g_{opt}^k[m+n, m] = \sum_{k=-K}^K g_{opt}^k[n] e^{-j2\pi km/N}$ tronquée à $2K+1$ termes. La structure décrite par la relation (10) est illustrée à la figure (2). La forme (10) a l'avantage de fixer explicitement le nombre de degré de liberté $N_{ddl} = N \cdot (2K+1)$ du filtre inverse.

L'identification des filtres g_{opt}^k se fait selon les procédures classiques des systèmes à voies multiples [7], soit en fréquentiel soit en temporel, et où les statistiques nécessaires sont estimées de manière consistante par moyennage sur plusieurs cycles consécutifs.

6 Application

Un cas réel est traité qui illustre l'utilisation du filtre inverse linéaire périodique pour répondre à une problématique industrielle. L'objectif est de mesurer de manière non-intrusive les forces de pression à l'intérieur des cylindres d'un moteur diesel, ceci à partir des signatures vibratoires qu'elles génèrent sur le bloc moteur. Le problème s'inscrit donc dans le schéma précédent, où $X[m]$ sont les forces à reconstruire, $Y[m]$ le processus vibratoire mesuré, $H[m]$ la réponse impulsionnelle du bloc moteur et $B[m]$ des perturbations liées au vibrations engendrées par d'autres phénomènes. Les processus $X[m]$ et $Y[m]$ sont cyclostationnaires de période égale au cycle moteur et sont supposés vérifier (5). Le problème choisi ici est volontairement difficile, car la sortie du système est dominée par des

oscillations HF à partir desquelles on veut retrouver une forme qui évolue dans les BF (Figure 3). Dans ce contexte et en présence de bruit, le filtre inverse invariant donne de pauvres résultats. Les deux structures de filtre discutées au paragraphe 4 sont comparées par rapport au critère de l'erreur quadratique moyenne normalisée sur une ensemble test, ceci en fonction du nombre de degrés de liberté. Les résultats (Figure 4) indiquent la supériorité de la structure en banc de filtres dans ce cas précis, avec une suprématie évidente sur le filtre invariant ($N_{ddl} = N$) même pour N_{ddl} très petit devant sa taille théorique N^2 . Le filtre retenu a été identifié. La figure (5) permet de juger de la qualité de la reconstruction de X_N lorsque le filtre inverse est choisi périodique ($N_{ddl} = 0,1 \cdot N^2$), de manière à exploiter la redondance spectrale dans le domaine fréquentiel (ν_1, ν_2).

7 Conclusion

Dans cette communication, nous avons présenté les conditions sous lesquelles un filtre périodique est optimal. Ce type de filtre se montre très efficace pour la déconvolution et la séparation de processus cyclostationnaires bruités. Ces résultats apparaissent clairement en travaillant sur des processus connexes à supports bornés sur le cycle, dont l'équivalence statistique est assurée par l'isomorphisme de Wold. Cette même approche rend alors triviale l'estimation du filtre optimal.

Références

- [1] P.-O. Amblard, Statistiques d'ordre supérieur pour les signaux non gaussiens, non linéaires, non stationnaires, Thèse de l'INPG, 1994.
- [2] W. A. Gardner, Introduction to Random Processes, McGraw-Hill, 1989.
- [3] J. Antoni, Apports de l'échantillonnage angulaire et de la cyclostationnarité au diagnostic par analyse vibratoire des moteurs thermiques, Thèse de l'INPG, 2000.
- [4] J. R. Hopgood, P. J. W. Rayner, Single Channel Separation using Linear Time Varying Filters : Separability of Non-Stationary Stochastic Signal, *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, (3), 1999, p.1449-14752.
- [5] S. Twomey, Introduction to the Mathematics of Inversion, Elsevier, 1977.
- [6] C. M. Loeffler, C. S. Burrus, Optimal Design of Periodically Time-Varying and Multirate Digital Filters, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 32(5), 1984, p.991-997.
- [7] S. L. Marple, Digital Spectral Analysis with Applications, Prentice-Hall, 1987.

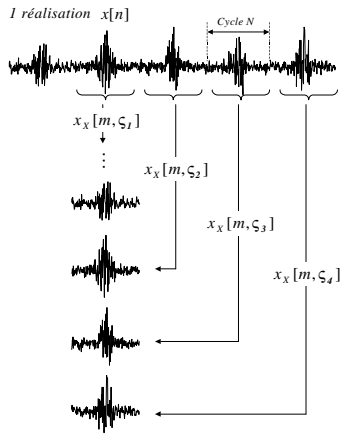


FIG. 1: Principe de l'isomorphisme de Wold.

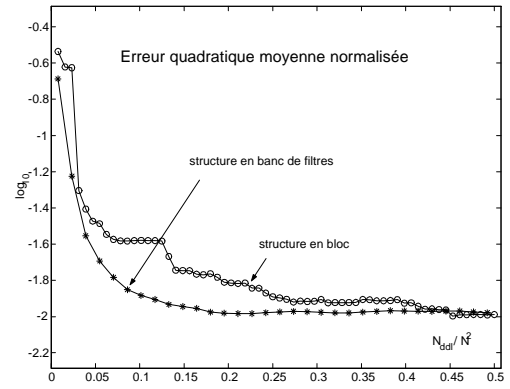


FIG. 4: Evolution de l'EQM normalisée en fonction du nombre de degrés de liberté.

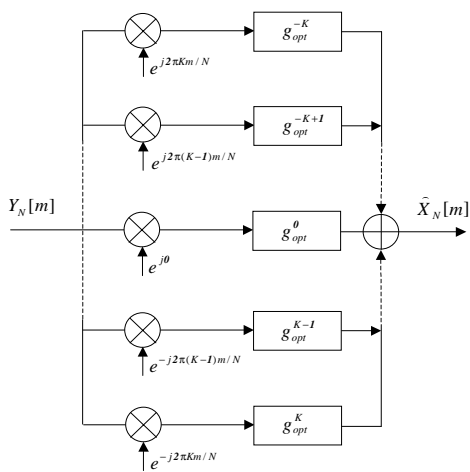


FIG. 2: Structure en banc de filtres.

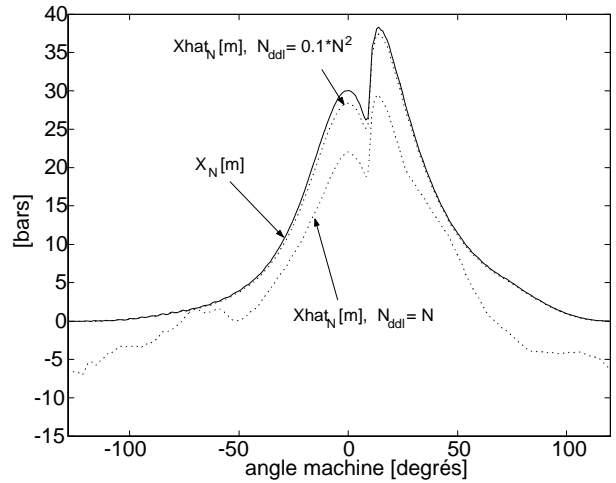


FIG. 5: Comparaison de $X[m]$ aux processus reconstruits $\hat{X}[m]$ par filtre inverse invariant ($N_{dof} = N$) et périodique ($N_{dof} = 0,1 \cdot N^2$).

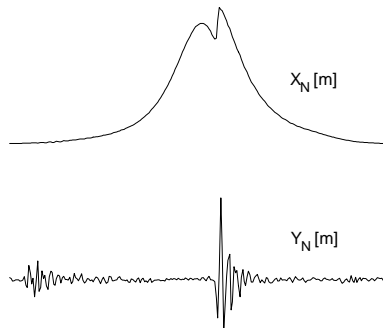


FIG. 3: Processus en entrée et en sortie du système.

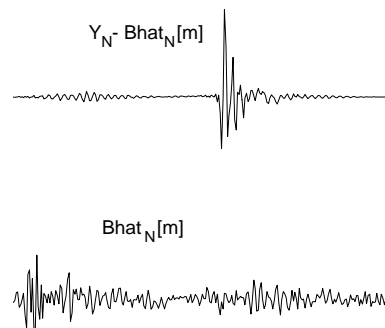


FIG. 6: Processus en sortie débruité et estimation du bruit.