

# Analyse et conception des systèmes multiporteuses BFDM suréchantillonnés

Cyrille SICLET<sup>1</sup>, Pierre SIOHAN<sup>1</sup>, Didier PINCHON<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Direction des services Mobiles et systèmes Radio (DMR), France Télécom R&D,  
4 rue du Clos Courtel, BP 59, 35512 Cesson-Sévigné Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire MIP, Université Paul Sabatier  
31062 Toulouse Cedex, France

cyrille.siclet@rd.francetelecom.com, pierre.siohan@francetelecom.com  
pinchon@cict.fr

**Résumé** – Nous décrivons un nouveau système de modulation multiporteuse qui utilise la propriété de biorthogonalité pour généraliser la technique de l’OFDM suréchantillonné, conduisant au système Biorthogonal Frequency Division Multiplex, appelé BFDM/QAM. Une analyse à temps discret de ce système conduit à un modèle discret de transmultiplexeur modulé. En utilisant une décomposition polyphase de ce transmultiplexeur, nous obtenons un schéma de réalisation efficace et nous donnons les conditions de biorthogonalité du système. Enfin, des exemples de synthèse de filtres sont fournis qui illustrent les avantages respectifs du BFDM/QAM et de l’OFDM/QAM suréchantillonnés.

**Abstract** – A new system of multicarrier modulation is described which takes advantage of the biorthogonality property to generalize the oversampled OFDM technique into a Biorthogonal Frequency Division Multiplex scheme named BFDM/QAM. A discrete-time analysis of this scheme leads to a discrete model of modulated transmultiplexer. Using a polyphase decomposition of this transmultiplexer, computationally efficient realizations of the modulators and demodulators and the biorthogonality conditions of the system are given. Lastly, some design examples are provided illustrating respective advantages of oversampled BFDM/QAM and OFDM/QAM.

## 1 Introduction

La modulation multiporteuse orthogonale OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex) est actuellement intégrée dans plusieurs normes de transmission. Son efficacité a en particulier été démontrée pour la transmission dans des canaux de type radio-mobile et sur la paire de cuivre. Toutefois, l’OFDM classique, associé à un alphabet QAM sur chaque porteuse, aussi appelé OFDM/QAM [1], présente plusieurs limitations. En effet, les symboles transmis doivent être prolongés par un préfixe cyclique, ce qui réduit le débit utile. De plus, la mise en forme du signal par une fenêtre rectangulaire ne permet pas d’obtenir une séparation fréquentielle suffisante des différents sous-canaux. En outre, la propriété d’orthogonalité ne permet pas d’atteindre l’optimalité pour des canaux non gaussiens et contraint fortement le délai de reconstruction. Le choix d’une modulation multiporteuse biorthogonale BFDM (Biorthogonal Frequency Division Multiplex) permet, au contraire, de mieux prendre en compte les canaux non gaussiens [2] et de réduire les délais de reconstruction. Pour permettre, de plus, d’introduire une mise en forme spectrale adaptée au canal, nous disposons de deux possibilités. La première solution, le BFDM/OQAM (OQAM : Offset QAM) où un offset d’un demi-temps symbole est introduit dans la modulation de chaque sous-porteuse, a déjà été présentée dans les références [3], [4]. Dans cet article, nous proposons une deuxième solution :

le BFDM/QAM suréchantillonné [5], généralisation de l’OFDM suréchantillonné [6], qui offre également les avantages liés à la mise en forme spectrale, et bénéficie de plus de ceux de la biorthogonalité.

## 2 BFDM/QAM : du continu au discret

Nous considérons un système analogique de modulation multiporteuse. Le but est de transmettre sur  $M$  portuses les symboles complexes  $c_{m,n}$  ( $m \in \mathbf{I} = \{0, \dots, M-1\}$  et  $n \in \mathbf{Z}$ ) obtenus à partir d’un alphabet QAM. Alors, en bande de base, le signal modulé s’écrit :

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} f_{m,n}(t) \quad (1)$$

avec

$$f_{m,n}(t) = \sqrt{2} f(t - nT_0) e^{j2\pi m F_0 t}, \quad (2)$$

et  $f(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ ,  $T_0$  la durée symbole,  $F_0$  l’espacement entre deux portuses successives.  $T_0$  et  $F_0$  sont liés par la relation  $d = \frac{1}{F_0 T_0}$  qui définit la densité  $d$  de la modulation. La démodulation n’est possible que pour  $d \leq 1$ . L’efficacité spectrale du système est maximale pour  $d = 1$ . Lorsque  $d < 1$  on dit que le système est sous-critique ou encore qu’il est suréchantillonné.

Pour obtenir un filtre normalisé  $f[k]$  discret, causal et de durée finie, on tronque  $f(t)$  à l'intervalle  $[-\frac{D+1}{2}T_e, (L_f - \frac{D+1}{2})T_e[$  de longueur  $L_f T_e$ , on le translate d'une durée  $\frac{D}{2}T_e$ , on l'échantillonne à la fréquence  $\frac{1}{T_e} = M F_0$ , et on le normalise à l'aide d'un facteur multiplicatif égal à  $\sqrt{T_e}$  :

$$f[k] = \sqrt{T_e} f\left(\left(k - \frac{D}{2}\right)T_e\right), \text{ pour } 0 \leq k \leq L_f - 1.$$

Le signal modulé s'écrit alors

$$s[k] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} f_{m,n}[k] \quad (3)$$

avec

$$f_{m,n}[k] = \sqrt{2}\sqrt{T_e} f\left(\left(k - \frac{D}{2} - n\frac{M}{d}\right)T_e\right) e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-D/2)}.$$

On impose que la densité soit rationnelle,  $d = \frac{M}{N}$ , de sorte que

$$f_{m,n}[k] = \sqrt{2} f[k - nN] e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-D/2)}. \quad (4)$$

Alors, si la famille de fonctions à temps discret ( $f_{m,n}[k]$ ) constitue une famille libre, les symboles peuvent être parfaitement démodulés en l'absence de perturbation sur le canal de transmission, à l'aide d'une base duale ( $\check{f}_{m,n}[k]$ ) :

$$c_{m,n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \check{f}_{m,n}^*[k] s[k] \quad (5)$$

avec

$$\check{f}_{m,n}[k] = \sqrt{2} \check{f}[k - nN] e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-D/2)}. \quad (6)$$

On dit que les familles ( $f_{m,n}$ ) et ( $\check{f}_{m,n}$ ) forment un couple de bases biorthogonales, c'est-à-dire qu'elles vérifient

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,n}^*[k] \check{f}_{m',n'}[k] = \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}. \quad (7)$$

### 3 Schémas de réalisation à base d'algorithmes rapides

Il apparaît que le modem BFDQM/QAM peut se réaliser à l'aide d'un transmultiplexeur (cf. fig. 1), en notant  $D = aN - b$ , avec  $a$  le retard de reconstruction,  $0 \leq b \leq N - 1$ , et :

$$f_m(k) = \sqrt{2} f[k] e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-\frac{D}{2})}, \quad (8)$$

$$h_m(k) = \sqrt{2} h[k] e^{j\frac{2\pi}{M}m(k-\frac{D}{2})}, \quad (9)$$

avec

$$h[k] = \check{f}[D - k], \quad (10)$$

et en notant respectivement  $F(z)$ ,  $F_m(z)$ ,  $H(z)$  et  $H_m(z)$  les transformées en  $z$  de  $f[k]$ ,  $f_m[k]$ ,  $h[k]$  et  $h_m[k]$ .

La réalisation directe sous cette forme serait très coûteuse en termes de complexité opératoire. En utilisant une décomposition polyphase des filtres  $F(z)$  et  $H(z)$ , il est possible de la réduire considérablement et d'utiliser des algorithmes rapides de transformées de Fourier discrètes inverses.

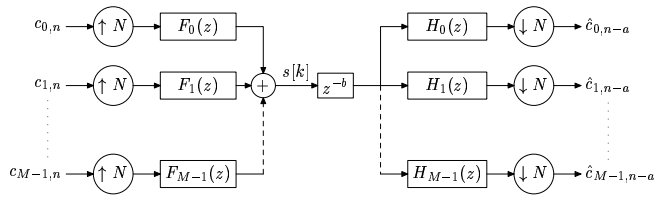


FIG. 1: Transmultiplexeur associé aux modulations BFDQM/QAM ( $M \leq N$ ).

Soient  $N_0$  et  $M_0$  les plus petits entiers positifs et premiers entre eux tels que  $N_0 M = N M_0$ , et soient  $K_l(z)$  et  $G_l(z)$  les  $N_0 M$  composantes polyphases de  $F(z)$  et  $H(z)$  respectivement :

$$K_l(z) = \sum_n f(l + nN_0 M) z^{-n},$$

$$G_l(z) = \sum_n h(l + nN_0 M) z^{-n}.$$

Alors, on peut montrer que la partie modulation et la partie démodulation peuvent être réalisées respectivement selon les schémas des figures 2 et 3.

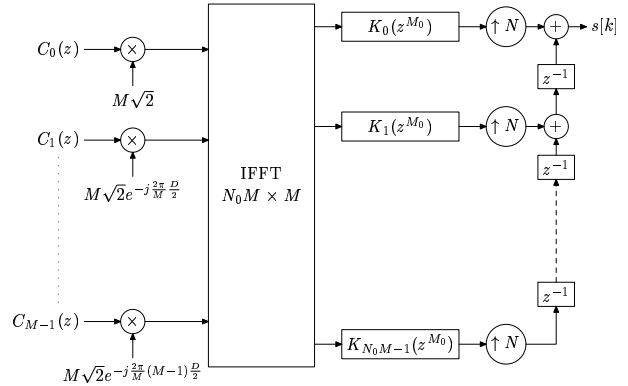


FIG. 2: Modulateur BFDQM/QAM réalisé à l'aide d'une IFFT.

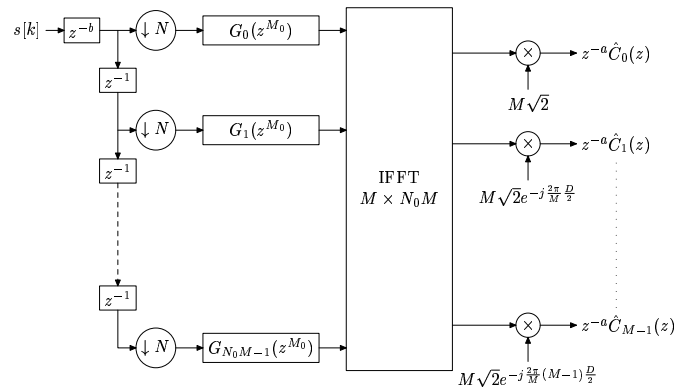


FIG. 3: Démodulateur BFDQM/QAM réalisé à l'aide d'une IFFT.

## 4 Les conditions de biorthogonalité

Notons  $\Lambda_b = \{0, \dots, M_0 - 1\}$  si  $b = 0$ ,  $\Lambda_b = \{1, \dots, M_0\}$  sinon et  $n_{l,\lambda} = \left\lfloor \frac{\lambda N - b - l}{M} \right\rfloor$ , où  $\lfloor x \rfloor$  désigne le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Définissons aussi l'opérateur de congruence  $d_{m,n}$  égal à 1 si  $m$  est un multiple de  $n$  et nul sinon.

Nous pouvons alors montrer que le système est parfaitement biorthogonal (c'est-à-dire que les symboles sont parfaitement démodulés en l'absence de perturbation sur le canal de transmission) si et seulement si, pour  $0 \leq l \leq M - 1$  et  $\lambda \in \Lambda_b$ , l'équation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{n_{l,\lambda}} G_{nM+l}(z) K_{\lambda N - b - (nM+l)}(z) \\ & + z^{-1} \sum_{n=n_{l,\lambda}+1}^{N_0-1} G_{nM+l}(z) K_{N_0 M + \lambda N - b - (nM+l)}(z) \\ & = \frac{z^{-\frac{a-\lambda}{M_0}}}{2M} d_{\lambda-a, M_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

## 5 Synthèse de filtres prototypes

### 5.1 Critères d'optimisation

Comme dans [7], le premier critère que nous avons sélectionné est la minimisation de l'énergie hors bande. En utilisant une notation avec une fréquence normalisée (fréquence d'échantillonnage = 1), la fonction objectif est donnée par

$$J = \int_{-\frac{1}{M}}^{\frac{1}{2}} |H(e^{j2\pi\nu})|^2 d\nu. \quad (12)$$

Le second critère utilisé est lié à la localisation temps-fréquence, qui, comme indiqué dans [8, 9], peut aussi être intéressante pour les systèmes de modulation multiporteuse. La fonction objectif est alors donnée par

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{4m_2 M_2}}, \quad (13)$$

avec  $m_2$  et  $M_2$  les moments de second ordre en temps et en fréquence respectivement, du prototype  $H(z)$ , comme définis dans [10]. On a alors  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\xi = 1$  étant l'optimum.

### 5.2 Contexte

Nous nous plaçons dans le cas simplifié où :

- le facteur de suréchantillonnage est égal à 2 :  $M = 2N$ ;
- les prototypes de modulation et de démodulation sont identiques :  $F(z) = H(z)$ ;
- $b = 1$ , i.e.  $D = 2aM - 1$ .

Dans ce cas les conditions de biorthogonalité s'écrivent pour  $0 \leq l \leq M - 1$  :

$$G_l(z)G_{2M-1-l}(z) + G_{M+l}(z)G_{M-1-l}(z) = \frac{z^{-(a-1)}}{2M} \quad (14)$$

et les conditions d'orthogonalité s'écrivent pour  $0 \leq l \leq M - 1$

$$G_l(z)\tilde{G}_l(z) + G_{M+l}(z)\tilde{G}_{M+l}(z) = \frac{1}{2M} \quad (15)$$

et  $F(z) = H(z) = z^{-(L_f-1)}\tilde{F}(z)$ , avec  $\tilde{\cdot}$  l'opération de paraconjugaison :  $\tilde{F}(z) = F^*(z^{-1})$ .

Ainsi, les conditions de biorthogonalité et d'orthogonalité sont les mêmes que pour un système BFDM/OQAM [3] ou pour les bancs modulés de type DCT ou MDFT [7], ce qui permet d'utiliser des méthodes de construction rapide de prototypes parfaitement biorthogonaux [11] ou orthogonaux [12]. Nous les avons utilisées ici dans le cas d'un système BFDM/QAM à 1024 porteuses ( $M = 1024$ ).

### 5.3 Résultats

En ce qui concerne l'intérêt du suréchantillonnage, il est illustré par la figure 4 qui compare la réponse fréquentielle de la fonction rectangulaire utilisée en échantillonnage critique et de deux prototypes orthogonaux avec un facteur de suréchantillonnage égal à 2, obtenus par optimisation de la sélectivité fréquentielle.

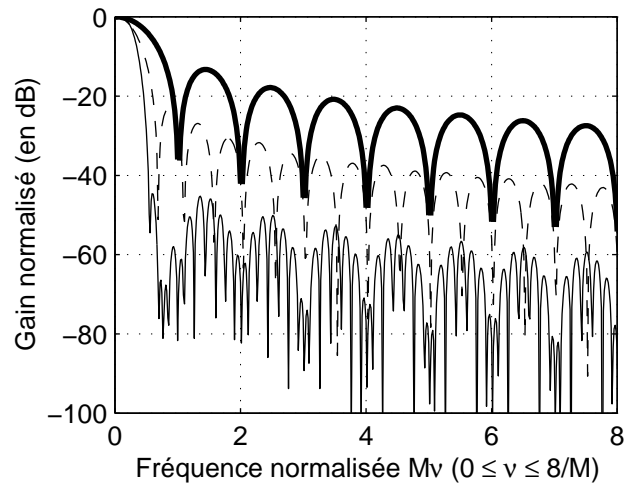


FIG. 4: Réponses fréquentielles de la fonction rectangulaire (ligne continue en gras,  $M = 1024$ ,  $N = 1024$ ,  $L_f = 1024$ ,  $J = 2, 263.10^{-1}$ ,  $\xi = 0, 03830$ ), d'un prototype orthogonal optimisé pour l'énergie hors bande de longueur  $L_f = 2048$  (tirets,  $M = 1024$ ,  $N = 2048$ ,  $J = 1, 898.10^{-2}$ ) et d'un prototype orthogonal optimisé pour l'énergie de longueur 8192 (ligne continue claire,  $M = 1024$ ,  $N = 2048$ ,  $J = 8, 364.10^{-5}$ ).

Ensuite, la figure 5 montre que l'on peut réduire le délai de reconstruction en utilisant des prototypes biorthogonaux plutôt que des prototypes orthogonaux, tout en conservant de bonnes caractéristiques temporelles et fréquentielles.

Enfin, l'utilisation d'un prototype biorthogonal permet aussi d'augmenter la longueur des filtres sans augmenter le délai, ce qui permet d'obtenir des filtres mieux localisés en fréquence, comme le montre le tableau 1. Néanmoins, ce tableau montre aussi que si le délai de démodulation n'est pas un critère important par rapport à la localisa-

$L_f$	2048	4096	6144	8192
Prototypes orthogonaux	$1,898.10^{-2}$	$2,037.10^{-3}$	$3,183.10^{-4}$	$8.364.10^{-5}$
Prototypes biorthogonaux	$1,898.10^{-2}$	$2,923.10^{-3}$	$1,445.10^{-3}$	$1.317.10^{-3}$

TAB. 1: Énergie hors-bande ( $J$ ) de prototypes optimisés orthogonaux ( $D = L_f - 1$ ) et biorthogonaux ( $D = 2047$ ), pour  $M = 1024$  et  $N = 2048$ .

tion fréquentielle, alors il peut être préférable d'utiliser un prototype orthogonal avec un plus grand délai.

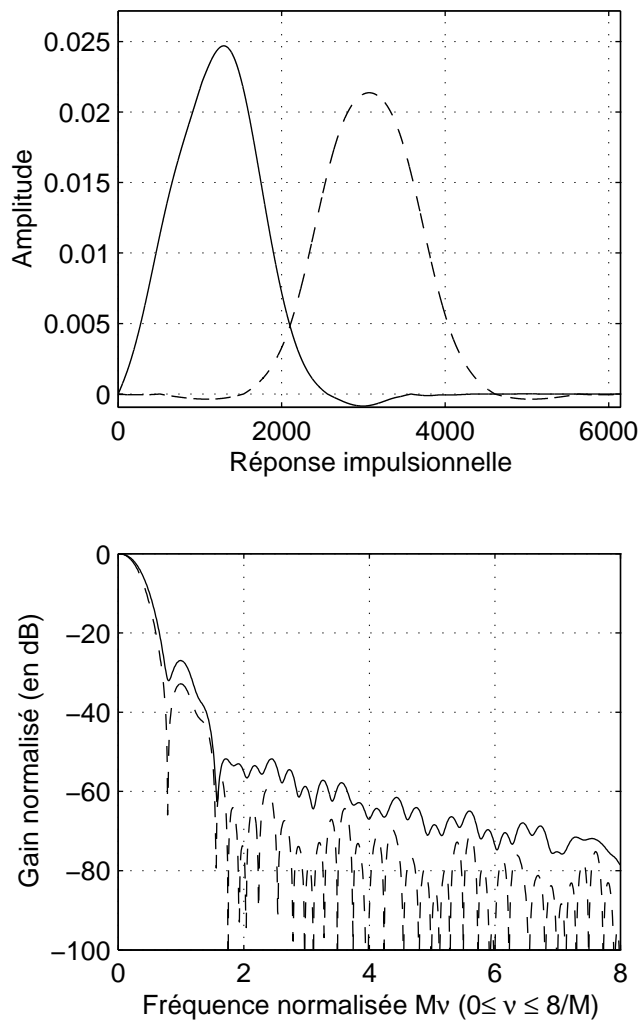


FIG. 5: Prototype orthogonal (tirets,  $a = 3$ ,  $\xi = 0,9775$ ) et biorthogonal (ligne continue,  $a = 1$ ,  $\xi = 0,9562$ ), optimisés pour la localisation temps-fréquence avec  $M = 1024$ ,  $N = 2048$ ,  $L_f = 6144$ .

## 6 Conclusion

Nous avons donné la formulation du système BFDM/OQAM à l'aide d'un transmultiplexeur ainsi qu'un schéma de réalisation efficace à base de transformée de Fourier discrète inverse. Nous avons aussi fourni les conditions de biorthogonalité du système.

Par ailleurs, nous avons montré, à l'aide de différents

résultats de synthèse de filtres prototypes, comment le suréchantillonnage permet d'obtenir des filtres ayant de meilleures caractéristiques (localisation temps-fréquence ou énergie dans la bande atténuée), et nous avons aussi illustré la possibilité de réduire le délai de démodulation avec des prototypes biorthogonaux, tout en conservant des prototypes bien localisés ou sélectifs en fréquence.

## Références

- [1] Floch (B. Le), Alard (M.) et Berrou (C.). – Coded orthogonal frequency division multiplex. *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, juin 1995, pp. 982–996.
- [2] Kozek (W.) et Molisch (A. F.). – Nonorthogonal pulse-shapes for multicarrier communications in doubly dispersive channels. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, n8, octobre 1998, pp. 1579–1589.
- [3] Siclet (C.) et Siohan (P.). – Design of BFDM/OQAM systems based on biorthogonal modulated filter banks. *In: Proc. GLOBECOM'00*, pp. 701–705. – San Francisco, USA, novembre 2000.
- [4] Siohan (P.) et Siclet (C.). – Procédé de transmission d'un signal multiporteuse biorthogonal BFDM/OQAM. – 1999. Application patent no 9912371.
- [5] Siclet (C.) et Siohan (P.). – Procédé de transmission d'un signal multiporteuse associé à des porteuses modulées synchroniquement, procédés de modulation et de démodulation et dispositifs correspondants. – 2001. Application patent no 6760WO.
- [6] Hleiss (R.), Duhamel (P.) et Charbit (M.). – Oversampled OFDM systems. *In: Proc. International Conference on Digital Signal Processing*. – Santorini, Greece, juillet 1997.
- [7] Heller (P.), Karp (T.) et Nguyen (T. Q.). – A general formulation of modulated filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, n4, avril 1999, pp. 986–1002.
- [8] Bölcskei (H.), Duhamel (P.) et Hleiss (R.). – Design of pulse shaping OFDM/OQAM systems for high data-rate transmission over wireless channels. *In: Proc. International Conference on Communications (ICC)*. – Vancouver, Canada, juin 1999.
- [9] Siohan (P.) et Lacaille (N.). – Analysis of OFDM/OQAM systems based on the filterbank theory. *In: Proc. GLOBECOM'99*. – Rio de Janeiro, Brazil, décembre 1999.
- [10] Doroslovački (M. I.). – Product of second moments in time and frequency for discrete-time signals and the uncertainty limit. *Signal Processing*, vol. 67, n1, mai 1998.
- [11] Pinchon (D.), Siohan (P.) et Siclet (C.). – A fast design method for biorthogonal modulated filter banks. – 2001. Journal paper in preparation.
- [12] Pinchon (D.), Siohan (P.) et Siclet (C.). – A fast design method for orthogonal modulated filter banks. – 2001. Journal paper in preparation.