Filtre adapté stochastique sous contrainte

Bernard XERRI , Bruno BORLOZ
Groupe d'Etudes des Signaux et SYstème MS-GESSY/ISITV
Avenue Georges POMPIDOU BP 56, 83162 La Valette du Var (FRANCE)
xerri@isitv.univ-tln.fr, borloz@univ-tln.fr

Résumé – Cette étude se positionne dans l'hypothèse d'une superposition additive de deux processus stochastiques dont l'un d'intérêt noté S(t) est appelé signal et le second noté b(t) est le terme perturbateur ou bruit. On associe classiquement à ce mélange le rapport signal à bruit noté ici RSB= $E[S^{2}(t)]/E[b^2(t)]$ défini comme le rapport des puissances. Dans les problèmes de détection on est amené à trouver un filtre linéaire qui maximise le nouveau RSB après filtrage; néanmoins la filtrée du signal ainsi obtenue peut s'écarter fortement de S(t). Dans les problèmes de filtrage, de compression, de reconstruction etc... cet inconvénient peut devenir majeur. On est alors amené à maximiser le RSB sous contrainte.

Abstract – This work deals with two additive stochastic signals: the first one S(t) is called signal of interest, the second one is the noise b(t). Classically the signal to noise ratio is defined by SNR= $E[S^{2}(t)]/E[b^2(t)]$. In the detection problems we search a linear filter which maximizes the new SNR after filtering, but this resulting signal can be very different from the original signal S(t). In filtering, compression, reconstruction ... this disadvantage may become serious. We will naturally try to achieve the constrained maximization of the SNR.

1 Introduction

Dans le cas de signaux à temps discret la puissance s'exprime à partir de la matrice de covariance A_0 pour le signal et B_0 pour le bruit. La maximisation du RSB après filtrage conduit alors au rapport de Rayleigh généralisé et par suite à la décomposition du signal et du bruit sur la base propre de $B_0^{-1}A_0$. Le filtre optimal projette le signal à temps discret S(m) dans le sous-espace de dimension 1 (sauf cas particulier de valeur propre multiple) associé à la valeur propre maximale de $B_0^{-1}A_0$[1][3]. Cette valeur est alors le nouveau RSB après filtrage. Ce problème se résume à la maximisation du RSB sous contrainte de projection de S(m) dans un sous-espace de dimension 1.

Cette filtrée peut s'avérer non satisfaisante en terme de reconstruction du signal S(m). Ce problème apparaît comme prédominant en terme de filtrage ou de compression en présence de bruit additif. Il est alors intéressant de recomposer le signal et le bruit dans un sous-espace de dimension p. La recomposition dans un sous-espace de dimension p engendré par p vecteurs propres de $B_0^{-1}A_0$ possède des propriétés intéressantes en termes de détection et séparation [2][4]. Une question se pose cependant. Cette base est-elle adaptée en terme de reconstruction ou de compression ? Le problème est alors formulé en ces nouveaux termes : trouver le sous-espace de dimension p qui optimise le RSB après filtrage.

2 Filtre adapté stochastique sous contrainte

2.1 Préliminaire

Nous traitons ici le cas de signaux aléatoires numériques définis sur n échantillons.

Le résultat d'un filtrage linéaire est caractérisé par la projection d'une réalisation sur un vecteur V_i de dimension n. A la suite de p projections sur une variété linéaire $\{V_i\}$ normée, on crée $S_p(m)$ m∈[1,n], processus aléatoire, tel que

$$S_p(m)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i V_i(m).$$

La puissance associée au processus ainsi défini est

$$P=E[S_p^T S_p]=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}E[\alpha_i\alpha_j]V_i^T V_j$$

que l'on peut simplifier et réduire à une sommation unique sur i (les vecteurs V_i étant de même norme ici fixée à l'unité) dans les deux cas suivants :

- soit la base constituée par $\{V_i\}$ est orthonormée,
- soit les variables aléatoires α_i et $\alpha_j$sont décorrélées.

On a alors :

$$E\left[S_p^T S_p\right]=\sum_{i=1}^{p}E[\alpha_i^2]V_i^T V_i=\sum_{i=1}^{p}E[\alpha_i^2].$$

Nous exprimons les p composantes α_i comme le produit d'une matrice I_p de dimension p×n, caractérisant une restriction, par le vecteur α de dimension n, soit $I_p\alpha$:

$$\sum_{i=1}^{p}E[\alpha_i^2]=\mathrm{trace}(I_p E[\alpha\alpha^T]I_p^T)=\mathrm{trace}(I_p V^{-1}A_0(V^{-1})^T I_p^T)$$

car $\alpha=V^{-1}S$ et $A_0=E[SS^T]$.

Le RSB étant le rapport de la puissance du signal sur celle du bruit c'est à dire un rapport de norme et sachant que la norme est un invariant en fonction de la base, nous décidons de travailler avec une base orthonormée. Nous avons alors $\alpha_i=V_i^T S$.

Les puissances des variables aléatoires α_i peuvent s'exprimer à partir de la matrice de covariance du processus S filtré, $E[\alpha_i^2]=V_i^T A_0 V_i$ d'où l'expression de P :

$$P = \sum_{i=1}^{p} V_i^T A_0 V_i.$$

2.2 Position du problème

Intéressons-nous maintenant à la superposition de deux processus aléatoires décorrélés dont l'un est d'intérêt S(m) et l'autre perturbateur b(m) : Z(m)=S(m)+b(m). Après projection de Z(m) sur une variété linéaire orthonormée $\{X_i\}$, le rapport signal à bruit ρ_f peut s'écrire à partir des matrices de covariance A_0 du signal et B_0 du bruit :

$$\rho_f = \frac{\sum_{i=1}^{p} X_i^T A_0 X_i}{\sum_{i=1}^{p} X_i^T B_0 X_i}.$$

Nous chercherons donc à optimiser ce rapport, c'est-à-dire trouver le sous-espace qui maximise ρ_f pour une valeur de p fixée.

2.3 Gain

Ce rapport ρ_f peut être exprimé en fonction du rapport signal à bruit initial noté ρ_{ini}. Ainsi on a

$$\rho_f = \rho_{ini} \frac{\sum_{i=1}^{p} X_i^T A X_i}{\sum_{i=1}^{p} X_i^T B X_i},$$

avec $\rho_{ini} = \frac{\mathrm{trace}(A_0)}{\mathrm{trace}(B_0)}$, $A = \frac{A_0}{\mathrm{trace}(A_0)}$, $B = \frac{B_0}{\mathrm{trace}(B_0)}$.

A et B sont donc des matrices de trace égale à un.

Le gain ρ obtenu après filtrage linéaire est donc :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{p} X_i^T A X_i}{\sum_{i=1}^{p} X_i^T B X_i}. \quad (1)$$

La suite de l'étude se focalise sur cette expression, en déterminant le sous-espace qui maximise ce gain.

3 Sous-espace optimal

L'expression de ρ donnée par (1) est établie sous l'hypothèse de normalisation des X_i. Cette contrainte ne perd pas en généralité car l'expression de ρ reste inchangée sous réserve de fixer la même norme à l'ensemble des X_i. Afin d'optimiser ρ sous cette contrainte, nous créons la grandeur $L(X_i,\gamma_i)$:

$$L(X_i, \gamma_i) = \rho + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i (X_i^T X_i - 1).$$

Ajoutons la contrainte de base orthogonale, alors

$$L(X_i,\gamma_i, \gamma_{ij}) = \rho + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i (X_i^T X_i - 1) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j \neq i}^{p} \gamma_{ij} (X_i^T X_j),$$

qui peut être écrit sous forme matricielle avec γ matrice symétrique appartenant à M_p et $X=[X_1 X_2 X_3 ... X_p]$.

$$L(X, \gamma) = \rho + \mathrm{trace}(\gamma(X^T X - I)).$$

En exprimant de même ρ à partir des matrices X, A et B, il vient :

$$L(X, \gamma) = \frac{\mathrm{trace}(X^T A X)}{\mathrm{trace}(X^T B X)} + \mathrm{trace}(\gamma(X^T X - I)). \quad (2)$$

Le problème consiste en la détermination de X qui maximise $L(X,\gamma)$ sachant que la dérivée partielle de $L(X,\gamma)$ par rapport à γ caractérise les contraintes.

L'optimisation est réalisée lorsque $\frac{\partial L}{\partial X} = 0$, soit

$$(AX - \rho BX)/\mathrm{trace}(X^T B X) + X\gamma = 0.$$

L'expression devient, en posant γ_1 =-trace$(X^T BX)\gamma$ sachant que trace$(X^T BX) \neq 0$ car B est définie positive :

$$(A - \rho B)X = X\gamma_1. \quad (3)$$

Ainsi le sous-espace optimal de dimension p recherché, c'est-à-dire qui maximise $L(X,\gamma)$, est engendré par p vecteurs parmi les n vérifiant l'équation (3).

Mais γ_1 est symétrique donc il existe une matrice μ diagonale tel que $\gamma_1 = U^T \mu U$ avec $U^T U = I$.

L'équation s'écrit alors $(A - \rho B)XU^T = XU^T \mu$.

XU^T représente la matrice des vecteurs propres de (A-ρB) notée $M(\rho)$. X est donc déterminé à une matrice unitaire U près. $M(\rho)$ étant symétrique, la matrice des vecteurs propres est unitaire ce qui caractérise une base orthonormée.

La suite de cet article a pour but d'estimer X définissant le sous-espace optimal de dimension p vérifiant

$$(A - \rho B)X = X\mu. \quad (4)$$

3.1 Propriétés

On sait que trace$(A-\rho B)$=1-ρ, de plus (4) équivaut à

$\forall$ i=1,..,n $\quad (A-\rho B)X_i = \mu_i X_i$

avec μ_i i^{eme} élément de la matrice diagonale μ .

Si on range les X_i de telle façon que les p premiers soient les "bons", alors

$$\sum_{i=1}^{p} X_i^T (A - \rho B) X_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i X_i^T X_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{p} X_i^T A X_i}{\sum_{i=1}^{p} X_i^T B X_i} - \rho = \frac{\sum_{i=1}^{p} \mu_i}{\sum_{i=1}^{p} X_i^T B X_i}.$$

Pour le sous-espace optimal, la somme des valeurs propres de $M(\rho)$ associée à ce sous-espace est nulle :

$\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$, soit $\sum_{i=1+p}^{n} \mu_i$= trace(A)$-\rho$ trace(B) = 1 - ρ.

Nous remarquons qu'il n'y a pas d'équivalence entre ces deux propositions ; en effet il peut exister des valeurs de ρ que nous notons ρ_s telles qu'il existe un sous-espace dont la somme des valeurs propres associées soit nulle mais ce sous-espace ne fournit pas le rapport défini par l'équation (1) maximal, c'est-à-dire qu'il existe un arrangement de p parmi n noté I_1tel que $\sum\limits_{i \in I_1} \mu_i(\rho_s) = 0$, mais pour le même ρ_s il existe un arrangement différent noté $I_j \neq I_1$ tel que

$$\frac{\sum\limits_{i \in I_j} X_i^T A X_i}{\sum\limits_{i \in I_j} X_i^T B X_i}(\rho_s) > \frac{\sum\limits_{i \in I_1} X_i^T A X_i}{\sum\limits_{i \in I_1} X_i^T B X_i}(\rho_s).$$

<u>conclusion</u>

Le sous-espace optimal est donc décrit par les p vecteurs propres de $M(\rho)$ associés aux p valeurs propres telles que :

-la somme de ces p valeurs propres soit nulle,

-le sous-espace engendré par ces p vecteurs fournit le plus grand rapport signal à bruit.

3.2 Propriétés des valeurs propres

La matrice $M(\rho)$ est paramétrée par ρ ; il en est de même pour ses vecteurs propres et valeurs propres.

L'évolution des valeurs propres est continue en ρ. Les vecteurs propres sont eux définis à une norme près et à une direction près. Mais compte tenu de la contrainte de normalisation, et en imposant le sens aux vecteurs propres on peut suivre ceux-ci par continuité.

Nous allons caractériser l'évolution de ces valeurs propres en fonction de ρ. L'équation (4) conduit à

$$\forall \text{ k}{>}0,\ (A{-}\rho B)^k X{=}X\mu^k \ {=}{>}\ \text{trace}((A{-}\rho B)^k){=}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^k$$

donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^k$ est de degré au plus k en ρ, d'où $\forall$i μ_i est de degré au plus un en ρ.

L'évolution des valeurs propres en fonction de ρ comporte une partie non linéaire caractérisée par une puissance de ρ inférieure à un. On peut écrire dans le cas particulier de dimension 2 (n=2) l'expression analytique des valeurs propres μ :

$$\mu{=}1/2\,(\text{trace}(A){-}\,\rho\,\text{trace}(B)) \pm \sqrt{c_2\rho^2 + c_1\rho + c_0}.$$

On observe une partie non linéaire décrite par l'expression intégrant la racine carrée.

3.3 Relations sur les vecteurs propres et valeurs propres

La base des vecteurs propres de $M(\rho)$ est orthonormée car $M(\rho)$ est symétrique. Nous avons par conséquent

$$\forall \text{i,j} \qquad X_i^T \frac{\partial X_j}{\partial \rho} + X_j^T \frac{\partial X_i}{\partial \rho} = 0. \tag{5}$$

La dérivation en fonction de ρ de (4) conduit à

$$-X^T B X + \mu X^T \frac{\partial X}{\partial \rho} = \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + X^T \frac{\partial X}{\partial \rho}\mu.$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{lrcl} \text{pour} \quad \text{i=j} & \frac{\partial \mu_i}{\partial \rho} & = & -X_i^T B X_i \\ \text{pour} \quad \text{i} \neq \text{j} & (\mu_i - \mu_j)\frac{\partial X_i^T}{\partial \rho} X_j & = & X_i^T B X_j \end{array} \tag{6}$$

L'équation (6) impose que la dérivée de μ_i par rapport à ρ est nécessairement négative. Les fonctions $\mu_i(\rho)$ sont toujours décroissantes en fonction de ρ et on a

$$\forall \rho \quad \text{trace}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right) = -\text{trace}(B) = -1.$$

On peut de même calculer la dérivée seconde de μ_i : $\frac{\partial^2 \mu_i}{\partial \rho^2} = -2X_i^T B \frac{\partial X_i}{\partial \rho}$, soit trace $\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2}\right) = 0$.

3.4 Quelques cas particuliers

<u>Etude pour p=1</u>

On décide de reconstruire dans un sous-espace de dimension 1 (cas de la détection). La valeur propre associée à ce sous-espace est donc nulle et $M(\rho)$ X =0 soit encore AX=ρ BX. ρ est la plus grande des valeurs propres de $B^{-1}A$ et X le vecteur propre associé.

<u>Etude pour p=n-1</u>

On décide de déterminer un sous-espace de dimension n-1. Puisque $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \mu_i^k = 0$ on peut exprimer μ_n en fonction de ρ, soit μ_n= trace($M(\rho)$)=trace(A)-ρ trace(B)=1-ρ, d'où

$$\begin{array}{rcl} (A - \rho B)X_n & = & (1-\rho)X_n \\ \text{soit} \quad (A - I)X_n & = & \rho(B{-}I)X_n \end{array}$$

Cette expression précise que ρ est la plus grande valeur propre de $(B\text{-}I)^{-1}(A\text{-}I)$.

La base de reconstruction est constituée des vecteurs propres de (A-ρB) à laquelle on supprime X_n.

4 Présentation d'exemples

<u>Exemple 1</u> : le bruit et le signal sont du premier ordre.

La corrélation décroît exponentiellement en fonction du temps

$$B = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.60 & 0.36 \\ 0.60 & 1.00 & 0.60 \\ 0.36 & 0.60 & 1.00 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.80 & 0.64 \\ 0.80 & 1.00 & 0.80 \\ 0.64 & 0.80 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Soient W matrice des vecteurs propres de $B^{-1}A$ et D matrice des valeurs propres de $B^{-1}A$.

$$W = \begin{bmatrix} 0.6611 & -0.7071 & 0.4170 \\ 0.3549 & 0.0000 & -0.8076 \\ 0.6611 & 0.7071 & 0.4170 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.2303 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.5625 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.4572 \end{bmatrix}.$$

Le Rapport Signal à Bruit obtenu dans le sous-espace associé aux deux valeurs propres les plus élevées est égal à 1.06.

Le résultat de la maximisation du RSB sous contrainte de recomposition dans un sous-espace de dimension 2 conduit à $\rho = 1.1186$.

La matrice des vecteurs propres A-ρB est

$$V = \begin{bmatrix} 0.3370 & -0.7071 & 0.6216 \\ -0.8791 & 0.0000 & 0.4766 \\ 0.3370 & 0.7071 & 0.6216 \end{bmatrix}.$$

Le sous-espace de dimension deux maximisant le RSB égal ici à ρ est engendré par

$$V_s = \begin{bmatrix} 0.3370 & 0.6216 \\ -0.8791 & 0.4766 \\ 0.3370 & 0.6216 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple, ce sous-espace est le même que le sous-espace engendré par les vecteurs propres numéro 1 et 3 de la base propre de $B^{-1}A$, mais il ne correspond pas à ses valeurs propres les plus grandes.

Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 0.0379 & 0.0379 & 0.1514 \\ 0.0379 & 0.0473 & 0.2650 \\ 0.1514 & 0.2650 & 2.9148 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.2872 & 1.4658 & 0.1313 \\ 1.4658 & 1.6865 & 0.1629 \\ 0.1313 & 0.1629 & 0.0263 \end{bmatrix}.$$

Soient W matrice des vecteurs propres de $B^{-1}A$ et D matrice des valeurs propres de $B^{-1}A$.

$$W = \begin{bmatrix} 0.5219 & 0.7555 & -0.3972 \\ -0.5189 & -0.6549 & 0.9156 \\ 0.6770 & 0.0192 & -0.0622 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1051 & 0 & 0 \\ 0 & 0.448 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0124 \end{bmatrix}.$$

Le RSB obtenu dans le sous-espace associé aux deux valeurs propres les plus élevées est égale à 149.64. Le résultat de la maximisation du RSB sous contrainte de recomposition dans un sous-espace de dimension 2 conduit à $\rho = 151.05$. La matrice des vecteurs propres A-ρB est

$$V = \begin{bmatrix} 0.7111 & -0.2531 & -0.6559 \\ -0.5845 & 0.3057 & -0.7516 \\ -0.3908 & -0.9179 & -0.0695 \end{bmatrix}.$$

Le sous-espace de dimension deux maximisant le RSB égal ici à ρ, est engendré par

$$V_s = \begin{bmatrix} 0.7111 & -0.2531 \\ -0.5845 & 0.3057 \\ -0.3908 & -0.9179 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple, aucun vecteur propre de $B^{-1}A$ n'appartient à ce sous-espace.

5 Présentation de l'algorithme

Il s'agit de déterminer le sous-espace de dimension p qui maximise le rapport ρ de l'équation (1). Les équations n'étant pas linéaires en ρ, nous présentons un algorithme permettant d'atteindre la valeur maximale de ρ.

Soit ρ_0 une valeur initiale de ce coefficient, alors on définit $M(\rho_0)$ matrice pour laquelle on évalue les valeurs propres $\mu_i(\rho_0)$ et les vecteurs propres associés X_i,

$$(A\text{-}\rho_0 B)X_i = X_i \mu_i(\rho_0).$$

On choisit p vecteurs propres parmi les n tels que le nouveau rapport ρ_1 soit le plus grand parmi les $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ possibles. On note I_1 l'ensemble des p indices qui assurent le plus grand rapport ρ_1 soit,

$$\rho_1 = \frac{\sum\limits_{i\in I_1} X_i^T A X_i}{\sum\limits_{i\in I_1} X_i^T B X_i}(\rho_0).$$

On réinjecte ρ_1 en lieu et place de ρ_0. Ainsi par itérations successives, la convergence s'effectue vers la valeur maximale de ce rapport que nous notons $\rho_{\max}$.

Si nous notons ρ_n le résultat de la n^{eme} itération alors l'incrément $\Delta\rho_n$ est décrit par

$$\Delta\rho_n = \rho_{n+1} - \rho_n = \frac{\sum\limits_{i\in I_1} \mu_i(\rho_n)}{\sum\limits_{i\in I} X_i^T B X_i(\rho_n)} = \frac{\sum\limits_{i\in I_1} \mu_i(\rho_n)}{-\sum\limits_{i\in I_1} \frac{\partial \mu_i}{\partial \rho}(\rho_n)}.$$

Dans l'algorithme proposé, on prend comme valeur initiale de ρ la plus grande valeur propre de $B^{-1}A$.

Par ailleurs les équations (4)(6) permettent de calculer les $\mu_i(\rho)$ et de les suivre par continuité .

Nous pouvons montrer que l'algorithme présenté conduit à une solution c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n$ existe est vaut $\rho_{\max}$.

6 Découplage des coefficients de décomposition

Nous venons de déterminer le sous-espace optimal E_p au sens du rapport signal à bruit. Nous recherchons dans cet espace une base $\{Z_i\}$ qui garantisse le découplage de l'ensemble des coefficients de décompositions.

La recherche de $\{Z_i\}$ conduit à la recherche de la matrice de passage notée W de la base $\{X_i\}$ à la base $\{Z_i\}$.

Si l'on pose $W=Y^{-T}$, A_p et B_p les nouvelles matrices de covariance du signal et du bruit dans E_p, la base $\{Z_i\}$ découple simultanément les coefficients associés au signal et au bruit, ceci conduit au système d'équations $Y^T A_p Y = D_S$ et $Y^T B_p Y = D_B$ où D_S et D_B sont des matrices diagonales.

La diagonalisation conjointe de A_p et B_p conduit à la recherche des vecteurs propres de $B_p^{-1}A_p$.

Références

[1] JF. Cavassilas, B. Xerri. *Extension de la notion de filtre adapté. Contribution à la détection de signaux courts en présence de termes perturbateurs.* TS Volume 10 nř3, p 215-221.

[2] J.F. Cavassilas, B. Xerri and G. Chabriel. *Séparation autodidacte de sources temporellement corrélées (mélange instantané).* in GRETSI Symposium, Vol. 1, pp 107-110, Sept. 1997.

[3] JF. Cavassilas, B. Xerri,B. Borloz. *Filtre adapté stochastique.Contribution à la détection de textures bidimentionnelles.* GRETSI 97 p 491-494

[4] JF. Cavassilas, B. Xerri,B. Borloz. *An iterative algorithm using second order moments applied to blind separation of sources with same spectral densities.* SSAP august 2000 p349-353