

# DeQuant : une méthode flexible de restauration d’images multiéchelles

Ghada JAMMAL<sup>1</sup>, Albert BIJAOU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Technische Universität Darmstadt  
Institut für Nachrichtentechnik  
Merckstr. 25, D-65283 Darmstadt, Allemagne

<sup>2</sup>Observatoire de la Côte d’Azur  
Boite Postale 4229, F-06304 Nice Cedex 4, France  
bijaoui@obs-nice.fr

**Résumé** – Cet article présente une nouvelle méthode de restauration multiéchelles permettant l’estimation du paramètre d’un processus de Poisson à partir d’une seule réalisation du processus dans un contexte de rapport signal sur bruit faible.

**Abstract** – This paper presents a new multiscale restoration method for the estimation of the parameter of a Poisson process from a single realization of the process in low signal to noise ratio situations.

## 1 Introduction

DeQuant est une nouvelle méthode de restauration multiéchelles dont la dénomination provient de l’analogie avec le terme anglais **Denoising** dans un contexte où le bruit est de nature **Quantique**.

Ce type de bruit se rencontre en particulier en médecine nucléaire où le modèle de dégradation de l’image peut être modélisé par un processus Poissonien du type:

$$\text{Prob}(I(k_x, k_y) = n) = \frac{Y^n(k_x, k_y)}{n!} e^{-Y(k_x, k_y)} \quad (1)$$

avec

$$Y = HX \quad (2)$$

$X$  représente l’objet,  $Y$  correspond à l’image obtenue par la convolution de l’objet avec la fonction d’étalement  $H$  du système d’imagerie et  $I$  est l’image bruitée.

DeQuant permet l’estimation de l’intensité  $Y$  du processus de Poisson (débruitage) ainsi que la déconvolution de ce processus (estimation de  $X$ ) si la fonction d’étalement du système d’imagerie est connue. DeQuant est basée sur les six étapes fonctionnelles suivantes :

- Les images en médecine nucléaire peuvent être économiquement représentées par une transformation en ondelettes qui concentre l’essentiel de l’information dans un petit nombre de coefficients [4]. C’est pourquoi la première étape de DeQuant est une **transformation** qui consiste à calculer la transformée en ondelettes de l’image bruitée. Dans le cadre de DeQuant nous utilisons la transformation en ondelettes de Mallat [12] et la transformation redondante et invariante par translation proposée par Coifman et Donoho [3]. Nous avons choisi de travailler avec l’ondelette de Haar non normalisée qui peut être considérée comme l’ondelette canonique d’analyse des processus poissonniens.

- Dans l’étape de **sélection** DeQuant analyse la signification statistique des coefficients en ondelette ainsi obtenus afin de séparer les coefficients significatifs contenant l’information, des coefficients non significatifs pour lesquels l’hypothèse de manque d’information locale n’a pas été rejetée.
- Restaurer l’image en utilisant uniquement les coefficients en ondelettes significatifs et en assignant la valeur zéro aux coefficients non significatifs conduit des artéfacts. Le choix de la règle donnant une nouvelle valeur aux coefficients non significatifs constitue la troisième étape de DeQuant, soit l’étape de **régularisation**. Dans le cadre de DeQuant nous avons envisagé deux opérateurs de régularisation: (1) le Laplacien correspondant à une contrainte de douceur de type Tikhonov [14] et (2) un opérateur introduit par Bijaoui et Froeschlé [1] permettant de conserver les bords.
- Nous appliquons des contraintes secondaires permettant de prendre en compte un autre type d’information a priori comme la positivité des images et la dynamique des coefficients en ondelettes. Cette étape est appelée l’étape de **projection**.
- L’image est reconstruite en utilisant les coefficients significatifs et la nouvelle valeur des coefficients non significatifs après projection. C’est l’étape de **reconstruction**.
- Une étape d’**itération** est nécessaire car la solution obtenue n’est pas directement optimale.

Cet article est organisé comme suit. La Section 2 présente la méthodologie adoptée par DeQuant pour le débruitage d’un processus de Poisson, c.à.d, l’estimation du paramètre  $Y$  du processus. Cette section insiste sur la flexibilité de la méthode en montrant que les étapes de transformation

et régularisation peuvent être modifiée sans pour autant changer la structure globale de l'algorithme. La Section 3 montre comment DeQuant peut être utilisé pour l'estimation de l'objet  $X$  relié au paramètre du processus de Poisson par la fonction d'étalement du système d'imagerie. Nous concluons en montrant un exemple d'application de DeQuant en médecine nucléaire.

## 2 Débruiter avec DeQuant

La méthodologie utilisée par DeQuant pour estimer l'intensité  $Y$  d'un processus de Poisson à partir d'une seule observation  $I$  du processus est basée sur un test d'inférence statistique. En effet, nous souhaitons montrer que l'intensité du processus de Poisson varie localement. Pour ce faire, nous supposons qu'elle est localement constante et essayons d'invalider notre supposition en nous basant sur l'information livrée par l'observation du processus. Ce raisonnement conduit à la formulation des hypothèses suivantes:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad Y \text{ est localement constant} \\ H_a: & \quad Y \text{ varie localement} \end{aligned}$$

Étant donnée la capacité des coefficients en ondelette à caractériser la localité et la variation, nous les avons choisis comme paramètres de test pour quantifier le degré de concordance entre l'observation et les hypothèses. La formulation des hypothèses en termes des coefficients en ondelette de  $Y$  fournit:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad \mathcal{W}_{a,Y}(2^j, k_x, k_y) = 0 \\ H_a: & \quad \mathcal{W}_{a,Y}(2^j, k_x, k_y) \neq 0 \end{aligned}$$

L'indice  $a$  représente les lettres  $h$  (horizontal),  $v$  (vertical) et  $d$  (diagonal). L'intensité  $Y$  étant inconnue, nous approximons ses coefficients en ondelettes par ceux de l'image  $I$  qui constituent une approximation non biaisée des coefficients en ondelette réels. Cette dernière approximation nous conduit à la formulation finale des hypothèses:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad \mathcal{W}_{a,I}(2^j, k_x, k_y) = 0 \\ H_a: & \quad \mathcal{W}_{a,I}(2^j, k_x, k_y) \neq 0 \end{aligned}$$

Le degré de crédibilité de  $H_0$  dépendra alors de la probabilité  $P$  que le coefficient en ondelette  $\mathcal{W}_{a,I}$  qui serait obtenu sous l'hypothèse  $H_0$  soit supérieur à la valeur observée  $W_{a,I}$ :

$$\begin{aligned} - \text{ si } W_I(2^j, k_x, k_y) > 0 \\ P &= \text{Prob}(\mathcal{W}_{a,I}(2^j, k_x, k_y) > W_{a,I}(2^j, k_x, k_y)) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{ si } W_I(2^j, k_x, k_y) < 0 \\ P &= \text{Prob}(\mathcal{W}_{a,I}(2^j, k_x, k_y) < W_{a,I}(2^j, k_x, k_y)) \quad (4) \end{aligned}$$

Un seuil d'erreur du test,  $\epsilon$ , est choisi. Si la valeur  $P$  est inférieure à  $\epsilon$ , la valeur observée est jugée suffisamment en conflit avec l'hypothèse nulle pour que cette dernière soit rejetée. Ceci signifie que l'image n'est pas considérée comme étant constante sur un voisinage de taille proportionnelle à  $2^j$  centré au point  $(k_x, k_y)$ . On considère alors qu'un coefficient significatif a été détecté au risque  $\epsilon$ . Si la valeur  $P$  calculée est supérieure à  $\epsilon$ , on considère que

la valeur du coefficient en ondelette est uniquement due à une fluctuation statistique et on accepte l'hypothèse  $H_0$ . Ce dernier coefficient est alors dit non significatif.

Le calcul de la valeur  $P$  nécessite la détermination de la densité de probabilité des coefficients en ondelette sous l'hypothèse  $H_0$ , c.à.d, pour une distribution de Poisson localement uniforme. Cette loi dépend du choix de l'ondelette analysante. Nous avons choisi de travailler avec l'ondelette de Haar non normalisée correspondant aux filtres:

$$h = [1, 1] \quad g = [1, -1]$$

Le choix de cette ondelette est motivé par les deux raisons suivantes: (1) elle s'accorde parfaitement au processus physique de formation des images en médecine nucléaire [13], et (2) elle permet le calcul analytique de la densité de probabilité [2]. Cette dernière est alors de la forme:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\mathcal{W}_{a,I}(2^j, k_x, k_y) = W_{a,I}(2^j, k_x, k_y)) \\ = e^{-F_Y(2^j, k_x, k_y)} I_{|W_{a,I}(2^j, k_x, k_y)|}(F_Y(2^j, k_x, k_y)) \end{aligned}$$

avec  $I_{|n|}(\alpha)$  la fonction de Bessel modifiée d'ordre entier  $n$  [6] et  $F_Y(2^j, k_x, k_y)$  l'image lissée de  $Y$ . La densité de probabilité calculée dépendant de l'image inconnue  $Y$ , l'algorithme de reconstruction devra être de type itératif.

A chaque échelle, le seuil d'erreur  $\epsilon$  génère un seuil  $t(2^j, k_x, k_y)$  sur les coefficients en ondelettes qui correspond à la plus petite valeur entière telle que l'intégrale de la densité de probabilité entre cette valeur et l'infini soit inférieure à  $\epsilon$ . Le seuil  $t(2^j, k_x, k_y)$  permet de séparer les coefficients en ondelette de l'image bruitée en deux groupes: le groupe des coefficients significatifs  $W_{a,I}^s$  qui correspond aux coefficients en ondelettes supérieurs au seuil  $t(2^j)$  et celui des coefficients non significatifs  $W_{a,I}$  qui correspond aux coefficients en ondelettes inférieurs au seuil  $t(2^j)$ .

L'image  $Y$  est alors reconstruite dans l'espace ondelette en conservant les coefficients significatifs qui représentent la contribution du signal et en calculant une nouvelle valeur pour les coefficients non significatifs. La valeur à donner aux coefficients non significatifs représente un problème mal posé [5]. Nous contraignons l'unicité de la solution en introduisant la contrainte de régularisation de Tikhonov [14]. Cette dernière contrainte sur la douceur de  $Y$  peut être formulée comme suit :

$$L_2 F_Y(2^j) = 0 \quad (5)$$

où  $L_2$  correspond au Laplacien et  $F_Y(2^j)$  aux coefficients de l'image lissée. La résolution de l'équation (5) par l'algorithme de Van Cittert fournit l'itération:

$$F_Y^{(n+1)}(2^j) = F_Y^{(n)}(2^j) - \xi_{L_2} L_2 F_Y^{(n)}(2^j) \quad (6)$$

avec  $\xi_{L_2} = 0.2$ . Soient  $H_2$ ,  $G_h$ ,  $G_v$  et  $G_d$  les opérateurs d'analyse en ondelettes tels que les équations de l'analyse multirésolution [12] s'écrivent:

$$\begin{aligned} F_Y(2^{j+1}) &= F_{F_Y(2^j)} &= H_2 F_Y(2^j) \\ W_{h,Y}(2^{j+1}) &= W_{h,F_Y(2^j)} &= G_h F_Y(2^j) \\ W_{v,Y}(2^{j+1}) &= W_{v,F_Y(2^j)} &= G_v F_Y(2^j) \\ W_{d,Y}(2^{j+1}) &= W_{d,F_Y(2^j)} &= G_d F_Y(2^j) \end{aligned} \quad (7)$$

En multipliant  $j$  fois l'égalité (6) respectivement par les opérateurs  $G_h$ ,  $G_v$  et  $G_d$ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} W_{h,F_Y^{(n+1)}}(2^j) &= W_{h,F_Y^{(n)}}(2^j) - \xi_{L_2} W_{h,L_2 F_Y^{(n)}}(2^j) \\ W_{v,F_Y^{(n+1)}}(2^j) &= W_{v,F_Y^{(n)}}(2^j) - \xi_{L_2} W_{v,L_2 F_Y^{(n)}}(2^j) \\ W_{d,F_Y^{(n+1)}}(2^j) &= W_{d,F_Y^{(n)}}(2^j) - \xi_{L_2} W_{d,L_2 F_Y^{(n)}}(2^j) \end{aligned} \quad (8)$$

Donc si les coefficients non significatifs de  $Y$  sont calculés par l'équation (8), la solution  $Y$  satisfait la contrainte de douceur définie par (5).

Une fois les coefficients en ondelette de  $F_Y^{(n)}$  à l'échelle  $2^j$  calculés, l'approximation de  $Y$  à une échelle inférieure peut être calculée en utilisant l'équation de synthèse de la transformation en ondelette de Mallat [12]:

$$\begin{aligned} F_Y^{(n)}(2^{j-1}) &= [ \widetilde{H}_2 F_Y^{(n)}(2^j) + \widetilde{G}_h W_{h,F_Y^{(n)}}(2^{j-1}) \\ &\quad + \widetilde{G}_v W_{v,F_Y^{(n)}}(2^{j-1}) + \widetilde{G}_d W_{d,F_Y^{(n)}}(2^{j-1}) ] / 4 \end{aligned} \quad (9)$$

Après avoir remonté toutes les échelles jusqu'à l'échelle  $2^0$ . Nous obtenons l'image reconstruite à l'itération (n):  $Y = F_Y^{(n)}(2^0)$

## 2.1 Modification de l'étape de transformation pour introduire l'invariance par translation

L'ondelette de Haar n'étant pas adaptée à l'analyse des images régulières, nous observons des artéfacts de type bloc dans l'image reconstruite. Un moyen simple de pallier cet inconvénient serait de changer d'ondelette, mais cette solution rend la détermination de la densité de probabilité beaucoup plus ardue. C'est pourquoi nous avons introduit la transformation en ondelette invariante par translation proposée par Coifman et Dohoho [3]. Cette transformation permet d'éliminer les effets de blocs tout en gardant l'ondelette de Haar. Elle peut être vue comme un cas particulier de la transformation à Trous de Holschneider et al. [11] car (1) elle utilise trois filtres directionnels au lieu d'un seul pour l'analyse et (2) la synthèse est faite en moyennant quatre reconstructions.

En effet soient  $F_Y^T(2^{j+1}, k_x, k_y)$  les coefficients de l'image lissée et  $W_{a,Y}^T(2^{j+1}, k_x, k_y)$  avec  $a=h, v$  ou  $d$ , les coefficients en ondelette. L'exposant  $T$  désigne la transformation de type à Trous. Nous introduisons les opérateurs d'analyse  $H_2(2^j)$ ,  $G_h(2^j)$ ,  $G_v(2^j)$  et  $G_d(2^j)$  qui sont obtenus en insérant  $2^j - 1$  colonnes et  $2^j - 1$  lignes de zéros entre les colonnes et les lignes des matrices de convolution correspondant aux opérateurs  $H_2$ ,  $G_h$ ,  $G_v$  and  $G_d$  définis pour la transformation de Mallat. Les équations d'analyse en ondelettes peuvent alors s'écrire:

$$\begin{aligned} F_Y^T(2^{j+1}) &= F_{h,F_Y^T}^T(2^j) = H_2(2^j) F_Y^T(2^j) \\ W_{h,Y}^T(2^{j+1}) &= W_{h,F_Y^T}^T(2^j) = G_h(2^j) F_Y^T(2^j) \\ W_{v,Y}^T(2^{j+1}) &= W_{v,F_Y^T}^T(2^j) = G_v(2^j) F_Y^T(2^j) \\ W_{d,Y}^T(2^{j+1}) &= W_{d,F_Y^T}^T(2^j) = G_d(2^j) F_Y^T(2^j) \end{aligned} \quad (10)$$

L'équation de synthèse exploite la redondance de l'analyse en moyennant les quatre reconstructions possibles d'un pixel. On introduit les opérateurs de synthèse  $\widetilde{H}_2(2^j)$  et  $\widetilde{G}_a(2^j)$  avec  $a=h, v$  et  $d$  qui sont définis en "dilatant" les opérateurs de synthèse correspondants à la transformation de Mallat d'une manière équivalente à celle décrite pour les opérateurs d'analyse. L'équation de synthèse s'écrit alors:

$$\begin{aligned} F_Y^T(2^j) &= [ \widetilde{H}_2(2^j) F_Y^T(2^{j+1}) + \widetilde{G}_h(2^j) W_{h,Y}^T(2^j) \\ &\quad + \widetilde{G}_v(2^j) W_{v,Y}^T(2^j) + \widetilde{G}_d(2^j) W_{d,Y}^T(2^j) ] / 16 \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.2 Modification de l'étape de régularisation pour conserver les bords

L'équation de régularisation (5) peut être vue comme une équation de définition des bords dans l'image  $F_Y(2^j)$ . Mais les bords définis par cette équation ne correspondent pas à la perception humaine, car l'œil associe les limites d'un objet aux zéros de la dérivée seconde le long de la direction du gradient. Ceci nous a conduit à utiliser un nouvel opérateur de définition des bords associé aux points d'inflexions le long de la ligne de plus grande pente. Cet opérateur introduit par Bijaoui et Froeschlé dans [1] est défini par:

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta & 1 + 3 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta & -2 & \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \\ 1 + 3 \sin \theta \cos \theta & -2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta & 1 - 3 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

où l'angle  $\theta$  correspond à la direction normale à celle du gradient. La contrainte de régularisation (5) peut alors être remplacée par :

$$M F_Y(2^j) = 0 \quad (13)$$

en utilisant l'équation de Van Cittert [15] pour résoudre l'équation (13), nous obtenons à la place de l'équation (6) la nouvelle itération :

$$F_Y^{(n+1)}(2^j) = F_Y^{(n)}(2^j) - \xi_M M F_Y^{(n)}(2^j) \quad (14)$$

où le paramètre  $\xi_M$  est égal à 0.001.

## 3 Restaurer avec DeQuant

La méthode de débruitage présentée dans la section 2 peut être améliorée en intégrant la fonction d'étalement  $H$  du système d'imagerie comme contrainte supplémentaire dans le processus de restauration des coefficients en ondelette non significatifs [8]. Ceci va nous permettre d'obtenir une estimation de l'objet  $X$ . La méthode de restauration diffère de celle de débruitage par les étapes de régularisation et de projection.

En effet, la condition de régularisation porte maintenant sur l'objet  $X$  :

$$L_2 X = 0 \quad (15)$$

En utilisant l'algorithme de Van-Cittert [15] pour résoudre l'équation (15), et en multipliant les deux membres de

l'équation obtenue par l'opérateur correspondant à la fonction d'étalement  $H$  nous obtenons :

$$Y^{(n+1)} = Y^{(n)} - \xi_{L_2} HL_2 X^{(n)} \quad (16)$$

En multipliant l'équation précédente  $j$  fois par les opérateurs d'analyse multirésolution définis par l'équation (7) nous obtenons :

$$\begin{aligned} W_{h,Z^{(n+1)}}(2^j) &= W_{h,Y^{(n)}}(2^j) - \xi_{L_2} W_{h,HL_2 X^{(n)}}(2^j) \\ W_{v,Z^{(n+1)}}(2^j) &= W_{v,Y^{(n)}}(2^j) - \xi_{L_2} W_{v,HL_2 X^{(n)}}(2^j) \\ W_{d,Z^{(n+1)}}(2^j) &= W_{d,Y^{(n)}}(2^j) - \xi_{L_2} W_{d,HL_2 X^{(n)}}(2^j) \end{aligned} \quad (17)$$

Nous avons introduit  $Z^{(n+1)}$  dans la partie gauche de l'équation (17) afin de mettre l'accent sur la différence entre le résultat de la convolution de  $H$  avec  $X^{(n+1)}$  quand  $X^{(n+1)}$  est connu, que nous notons  $Y^{(n+1)}$  et l'image qui est calculée en utilisant les coefficients en ondelette de  $HX^{(n)}$  et  $HL_2 X^{(n)}$ . Cette dernière est notée  $Z^{(n+1)}$ .

L'équation de reconstruction peut maintenant s'écrire :

$$\begin{aligned} F_{Z^{(n)}}(2^{j-1}) &= \left[ \widetilde{H}_2 F_{Z^{(n)}}(2^j) + \widetilde{G}_h W_{h,Z^{(n)}}(2^j) \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{G}_v W_{v,Z^{(n)}}(2^j) + \widetilde{G}_d W_{d,Z^{(n)}}(2^j) \right] / 4 \end{aligned} \quad (18)$$

Après avoir remonté toutes les échelles jusqu'à l'échelle  $2^0$ . Nous obtenons l'image reconstruite à l'itération (n) :  $Z^{(n)} = F_{Z^{(n)}}(2^0)$ . L'estimation de l'objet  $X$  à l'itération (n) est alors obtenue en utilisant la méthode de Richardson-Lucy [10] qui est une méthode de déconvolution itérative dérivée du théorème de Bayes sur les probabilités conditionnelles

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \left[ H^t \frac{Z^{(n)}}{HX^{(n-1)}} \right]$$

$H^t$  représente la transposée de la fonction d'étalement.

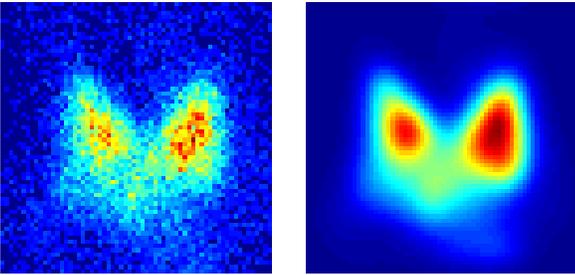


FIG. 1: Estimation de l'objet  $X$  associé à l'image clinique bruitée  $I$  avec DeQuant.

## 4 Conclusion

DeQuant est une méthode flexible car les étapes de déformation, sélection, régularisation et projection peuvent être choisies de telle manière que la méthode s'adapte aux caractéristiques des images à traiter sans pour autant modifier la structure globale de l'algorithme. DeQuant permet aisément la déconvolution de l'image, si la fonction d'étalement de la caméra est connue. La validation

de DeQuant s'est faite en utilisant des images simulées et des images réelles de médecine nucléaire, voir exemple Fig. 1. La qualité de la restauration a été mesurée en introduisant des critères de performance locaux et globaux [9], [7]. DeQuant apporte un gain significatif en qualité par rapport aux méthodes déjà publiées.

## Références

- [1] A. Bijaoui and M. Froeschlé. A new algorithm to determine image edges. *Astron. Astrophys.*, 87:250–251, 1980.
- [2] A. Bijaoui and G. Jammal. On the distribution of the wavelet coefficient for a poisson noise. *accepté par la revue Signal Processing*, Decembre 2000.
- [3] R.R. Coifman and D. Donoho. Translation invariant denoising. *Technical Report 475, Dept. of Statistics, Stanford University*, May 1995.
- [4] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [5] G. Demoment. Image reconstruction and restoration: overview of common estimation structures and problems. *IEEE transactions on acoustics, speech and signal processing*, 37(12):2024–2036, Dec 1989.
- [6] A. Gray and G.B. Mathews. *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*. Macmillan and co. London, 1952.
- [7] G. Jammal. *Multiscale Image Restoration in Nuclear Medicine*. PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2000.
- [8] G. Jammal and A. Bijaoui. Restauration et débruitage d'images en médecine nucléaire: l'approche multirésolution. *Proceedings du 17ème colloque GRETSI sur le traitement du signal et de l'image*, Septembre 1999.
- [9] G. Jammal and A. Bijaoui. Dequant: a flexible multiresolution restoration framework. *soumis à la revue Signal Processing*, Octobre 2000.
- [10] L.B Lucy. An iteration technique for the rectification of observed distributions. *Astronomical journal*, 79:745–754, 1974.
- [11] J. Morlet M. Holschneider, R. Kroland-Martinet and P. Tchamitchian. A real time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform. *Wavelets, Time-Frequency methods and Phase Space*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [12] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1997.
- [13] J.A. Sorenson and M.E. Phelps. *Physics in nuclear medicine*. W.B. Saunders Company, 1987.
- [14] A.N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl.*, 4:1624–1627, 1963.
- [15] P.H. Van-Cittert. Zum Einfluß der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien II. *Zeitschrift für Physik*, 69:298–308, 1931.