

Les détecteurs localement optimaux sont-ils des résonateurs stochastiques ?

Steeve Zozor, Pierre-Olivier Amblard

Laboratoire des Images et des Signaux, UMR 5083
Groupe Non-linéaire
Domaine Universitaire, B.P. 46 38402 Saint Martin d'Hères, France
Steeve.Zozor@lis.inpg.fr
Bidou.Amblard@lis.inpg.fr

Résumé — Le but de ce papier est de montrer que certains détecteurs utilisent intrinsèquement l'effet de résonance stochastique. Nous commençons par examiner le problème de détection d'une sinusoïde noyée dans un bruit non gaussien en utilisant la théorie des détecteurs localement optimaux. L'examen des performances conduit à regarder une famille de détecteurs de deux points de vue. Dans le premier, on montre que la famille d'où est issu le détecteur localement optimal est une famille de résonateurs stochastiques. Dans un deuxième temps, on montre qu'au sein de cette famille, le détecteur localement optimal est le résonateur optimal.

Abstract — The aim of the paper is to exhibit detectors that intrinsically use stochastic resonance. We begin by studying the problem of detecting a weak sine corrupted by an additive nonGaussian noise. The problem of detection is solved using the theory of locally optimal detectors. In a second step, we examine from two points of view the family of detectors to which the locally optimal detector belongs. We first show that this family is a family of stochastic resonators, and we then prove that in this family the locally optimal detector is the optimal resonator.

1 Introduction

La résonance stochastique est un phénomène qui se produit généralement dans des systèmes dynamiques non linéaires bistables. Soumis à une excitation sinusoïdale bruitée additivement, ils sont capables de faire coopérer bruit et sinusoïde de telle sorte que le bruit amplifie le signal. La résonance stochastique a fait l'objet d'études intensives (voir [3] pour une synthèse complète) et à même été observée dans des systèmes statiques [1].

L'ingrédient fondamental pour observer la résonance stochastique est le non-linéaire. La résonance stochastique peut être définie comme l'amélioration du traitement de l'information par le bruit. Précisément, la résonance se traduit par l'existence d'un maximum d'une grandeur qualifiant le traitement en fonction de la puissance du bruit perturbant les signaux utiles. Par exemple, de la résonance stochastique a été observée à travers la capacité d'un canal non linéaire. Mais la grandeur la plus couramment utilisée reste le rapport signal-à-bruit en sortie du résonateur. Or, il est bien connu que les performances d'un détecteur de sinusoïde dépendent du rapport signal-à-bruit en sortie du détecteur. L'idée d'utiliser de la résonance stochastique pour détecter des sinusoïdes est donc naturelle. Toutefois, le fait que le rapport signal-à-bruit présente un maximum en fonction de la puissance du bruit n'est pas l'élément le plus intéressant. Pour être utile, cette propriété doit être vérifiée quand le rapport signal-à-bruit de sortie est rapporté au signal-à-bruit en entrée du détecteur. On montre que le gain en rapport signal-à-bruit peut dépasser 1 pour des bruits non-gaussiens (uniforme, mélanges de

gaussienne, ...). Pour un bruit gaussien, le gain ne peut dépasser 1, et la résonance stochastique est inutile dans ce cas. Ceci est rassurant puisque les traitements optimaux pour des bruits gaussiens sont en général linéaires.

Une première idée pour utiliser la résonance stochastique en détection de sinusoïde consiste à adjoindre au détecteur classique (module de la transformée de Fourier) une étape préliminaire d'amélioration du rapport signal-à-bruit à l'aide d'un banc de résonateurs stochastiques. Une procédure d'adaptation permet alors de sélectionner le meilleur résonateur. Cette approche permet d'obtenir des résultats très intéressants [8]. Mais au-delà de cette utilisation *ad hoc* de la résonance stochastique, une question plus importante est : existe-t-il des détecteurs utilisant intrinsèquement la résonance stochastique ?

L'objet de ce papier est d'exhiber de tels détecteurs. Pour cela nous considérons le problème simple de détecter un signal déterministe de faible amplitude dans un bruit non gaussien. Le problème est décrit dans le paragraphe suivant, et est résolu en utilisant la théorie des détecteurs localement optimaux. Le paragraphe 3 est dédié à l'interprétation des résultats en termes de résonance stochastique. Après avoir étudié les performances du détecteur et montré que la déflexion est égale au rapport signal-à-bruit, nous examinons sous deux angles la famille de détecteurs dont est issu le détecteur localement optimal, dans le cas où le bruit est un mélange de gaussiennes.

2 Principe des détecteurs localement optimaux

Considérons le problème classique de détection d'un signal déterministe dans du bruit : N échantillons d'un signal r_n , $n = 0, \dots, N-1$ sont observés et on cherche à savoir si le signal est présent (hypothèse H_1) ou si on n'observe que du bruit (hypothèse H_0), soit

$$\begin{cases} H_0 & : r_n = b_n \\ H_1 & : r_n = b_n + s_n \end{cases} \quad n = 0, \dots, N-1$$

où b_n est le bruit de densité conjointe f_b et s_n le signal à détecter. La stratégie de détection de Neyman-Pearson consiste à fixer une probabilité de fausse alarme P_{fa} (probabilité de choisir l'hypothèse H_1 sachant qu'on est sous l'hypothèse H_0) et de maximiser la probabilité de détection P_d (probabilité de choisir l'hypothèse H_1 sachant qu'on est sous l'hypothèse H_1). Il est bien connu que la solution optimale consiste à écrire le rapport de vraisemblance et à le comparer à un seuil (fixé par la probabilité de fausse alarme) :

$$\Lambda(\underline{r}) = \frac{f_{\underline{r}|H_1}(\underline{r})}{f_{\underline{r}|H_0}(\underline{r})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$$

où $f_{\underline{r}|H_i}(\underline{r})$ est la densité de l'observation sous l'hypothèse H_i . Lorsque le bruit est blanc et gaussien, le test du rapport de vraisemblance consiste à réaliser le filtre adapté au signal à détecter $\sum_{n=0}^{N-1} s_n r_n$ et à le comparer à un seuil.

Toutefois, lorsque le bruit n'est plus gaussien, le problème devient difficile à résoudre, et cela même si on arrive à écrire formellement le rapport de vraisemblance. Dans le cas particulier où le bruit est blanc, a une densité de probabilité strictement positive, on peut écrire la densité de probabilité sous la forme

$$f_b(x) = \exp(-K(x))$$

où $K(x) = -\ln(f_b(x))$. Dans ce cas on peut réécrire aisément le test du rapport de vraisemblance sous la forme

$$-\sum_{n=0}^{N-1} K(r_n - s_n) - K(r_n) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta'$$

Lorsque le signal à détecter est de très faible amplitude et sous réserve de dérivabilité de K (*i.e.* de f_b), en effectuant un développement limité à l'ordre 1 autour de r_n on obtient le test

$$\sum_{n=0}^{N-1} s_n K'(r_n) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta'$$

où K' est la dérivée de K . Ce détecteur, connu sous le nom de détecteur localement optimal [6] (ou LOD pour "locally optimum detector") n'est rien d'autre que le filtre adapté au signal à détecter non pas sur les observations r_n mais sur une filtrée non linéaire et sans mémoire des observations $K'(r_n) = -\frac{f'_b(r_n)}{f_b(r_n)}$ où f_b et f'_b sont la densité de probabilité du bruit b_n et sa dérivée. De plus, dans tout

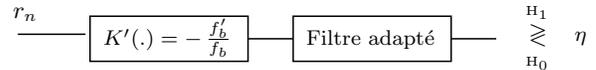


FIG. 1: Principe des détecteurs localement optimaux (LOD)

ce qui suit, nous supposons par soucis de simplicité que la densité est paire.

Par ailleurs, il est connu depuis plusieurs années à présent que certains systèmes statiques (ou sans mémoire) sont capables d'exhiber des phénomènes de type résonance stochastique [1]. Partant d'une telle propriété de certains systèmes statiques non linéaires, en se focalisant sur la non linéarité apparaissant dans les LOD, il est donc légitime de se demander si dans un cadre de détection d'une faible sinusoïde dans du bruit ces détecteurs ne s'appuient pas implicitement sur des phénomènes de résonance stochastique.

3 Détecteur localement optimaux et résonance stochastique

Considérons un système statique H impair attaqué par une sinusoïde de faible amplitude $\varepsilon_n = \varepsilon \cos(2\pi n\lambda_0 + \varphi_0)$ bruitée par du bruit blanc au sens strict b_n . Le signal de sortie du système est donc $s_n = H(b_n + \varepsilon_n)$. En utilisant l'hypothèse de faible amplitude de la sinusoïde devant l'amplitude du bruit¹, sa fonction de corrélation à la fréquence cyclique nulle est $\Gamma_s(q) = \langle E[s_n s_{n+q}] \rangle_n$,

$$\begin{aligned} \Gamma_s(q) &\approx E[H(b_n)H(b_{n+q})] \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} E[H'(b_n)H'(b_{n+q})] \cos(2\pi q\lambda_0) \end{aligned}$$

En utilisant ensuite le fait que deux échantillons différents de la sortie sont indépendants on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_s(q) &\approx \left(E[H(b_n)^2] + \frac{\varepsilon^2}{2} (E[H'(b_n)^2] - E[H'(b_n)]^2) \right) \delta_{q,0} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} (E[H'(b_n)] E[H'(b_{n+q})]) \cos(2\pi q\lambda_0) \end{aligned}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de kronecker (vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon). En négligeant le terme en ε^2 dans le premier terme du second membre, et par transformée de Fourier on obtient le spectre $\gamma_s(\lambda)$ et par suite le rapport signal sur bruit

$$RSB \approx \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{(\int_{\mathbb{R}} H'(x) f_b(x) dx)^2}{\int_{\mathbb{R}} H(x)^2 f_b(x) dx}$$

où f_b est la densité de probabilité du bruit.

Il est alors intéressant de constater que par une simple intégration par partie on peut réécrire le RSB sous la forme

$$RSB \approx \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{(\int_{\mathbb{R}} H(x) K'(x) f_b(x) dx)^2}{\int_{\mathbb{R}} H(x)^2 f_b(x) dx}$$

où $K'(x) = -\frac{f'_b(x)}{f_b(x)}$ est la non linéarité apparaissant dans les LOD. En remarquant alors que l'intégrale du

1. on effectue un développement limité de H ; c'est également l'esprit des LOD

numérateur n'est rien d'autre qu'un produit scalaire de noyau f_b entre H et K' et en utilisant l'inégalité de Schwartz nous aboutissons à

$$RSB \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}} K'(x)^2 f_b(x) dx \quad (1)$$

et l'égalité est atteinte pour $H \propto K'$. Ce résultat nous indique donc très clairement que la non linéarité qui maximise le RSB est très précisément celle qui apparaît dans le détecteur localement optimal correspondant à f_b . En conclusion, les LOD mettent clairement en jeu un effet de type de résonance stochastique : le RSB exhibe un maximum pour une non linéarité donnée.

Une autre interprétation réside dans l'analyse de la déflexion d'un détecteur. Pour un détecteur $d(r_n)$, la déflexion s'écrit

$$D(d) = \frac{(E[d(r_n)|_{H_1}] - E[d(r_n)|_{H_0}])^2}{\text{Var}[d(r_n)|_{H_0}]}$$

Si l'on étudie la classe de détecteur $d(r_n) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n H(r_n)$, où H est une non-linéarité instantanée supposée impaire, on montre que

$$\begin{aligned} D(d) &= \frac{\left(E[H'(b_n)] \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 \right)^2}{E[H(b_n)^2] \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2} \\ &= \frac{\varepsilon^2 E[H'(b_n)]^2}{2 E[H(b_n)^2]} \end{aligned}$$

la dernière égalité supposant que les N échantillons représentent une période exactement de la sinusoïde. Cette forme est précisément la forme du RSB développée plus haut. Or, on sait que la déflexion est directement liée aux performances du détecteur. En effet, si l'on considère un grand nombre d'échantillons, le détecteur suit une variable gaussienne centrée sous H_0 , de moyenne $E_1[d]$ sous H_1 , et de variance $\sigma_0^2 = \text{Var}[d(r_n)|_{H_0}] = \text{Var}[d(r_n)|_{H_1}]$ sous les deux hypothèses. On montre alors facilement que les courbes Caractéristiques Opérationnelles de Réception (COR) satisfont

$$P_d = \text{erfc}(\text{erfc}^{-1}(P_{fa}) - \sqrt{D(d)})$$

où $\text{erfc}(u) = \int_u^{+\infty} \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi} dx$. Comme la fonction erreur complémentaire erfc est une fonction décroissante de son argument, on conclut qu'à probabilité de fausse alarme fixée, la probabilité de détection varie comme la déflexion, et donc dans le problème considéré, comme le rapport signal-à-bruit de sortie.

Pour comprendre comment intervient la résonance stochastique, nous allons pousser plus loin l'exemple, et considérer que la densité de probabilité du bruit est le mélange de deux gaussiennes

$$\begin{aligned} f_b(x) &= \frac{1}{2Z} \left(\exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\kappa^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\theta)^2}{2\kappa^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{Z} \exp(-K_\theta(x)) \\ K_\theta(x) &= \frac{x^2 + \theta^2}{2\kappa^2} - \ln \left(\cosh \left(\frac{\theta x}{\kappa^2} \right) \right) \end{aligned}$$

On s'intéresse alors à la famille de détecteurs

$$\begin{aligned} d_c(\mathcal{L}) &= \sum_{n=0}^{N-1} s_n K'_c(r_n) \\ K'_\theta(x) &= \frac{x}{\kappa^2} - \frac{\theta}{\kappa^2} \tanh \left(\frac{\theta x}{\kappa^2} \right) \end{aligned}$$

et nous allons étudier les performances, donc le rapport signal-à-bruit de sortie, dans deux situations :

- c fixé, θ variant : dans ce cas, on étudie le RSB pour une non-linéarité en fonction de la puissance du bruit d'entrée.
- c variant, θ fixé : dans ce cas, on étudie les RSB des sorties d'un banc de détecteurs.

3.1 Résonance stochastique "naturelle"

Considérons une non linéarité de la famille $K'_c(\cdot)$, c'est-à-dire fixons le paramètre c . Le RSB de sortie du système $K'_c(\cdot)$ en fonction de l'amplitude σ_b du bruit d'entrée est représenté sur la figure 2 (à un coefficient de proportionnalité près). On peut constater que le système $K'_c(\cdot)$ en-

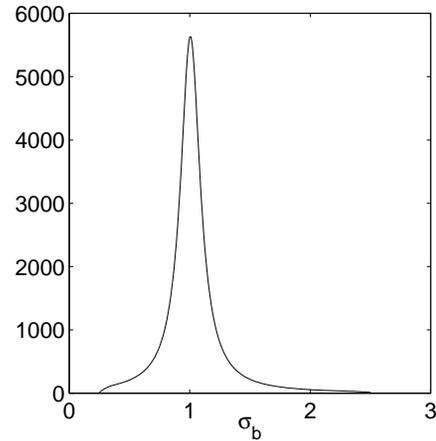


FIG. 2: RSB de sortie (à un coefficient de proportionnalité près) du système $K'_c(\cdot)$ pour un mélange de gaussiennes ; $c = 1$, $\kappa = 0.1$

gendre bien de la résonance stochastique au sens classique : il existe un niveau de bruit optimal $\sigma_b = \sqrt{c^2 + \kappa^2} \approx 1$ pour lequel le RSB de sortie est maximum.

Dans cet exemple, la famille des $K'_c(\cdot)$ est une famille de résonateurs stochastiques.

3.2 Résonance stochastique vis-à-vis du paramètre

Considérons cette fois le niveau de bruit fixé et la famille de résonateurs stochastiques $K'_c(\cdot)$. D'après l'inégalité (1) il est évident que le paramètre c optimal en terme de RSB de sortie est $c = \theta = \sqrt{\sigma_b^2 - \kappa^2}$. Ceci est illustré sur la figure 3 où nous voyons cette fois un effet de type résonance stochastique, mais vis-à-vis du paramètre.

Pour avoir une autre vision de cet effet, la figure 4 représente les courbes COR du construit à partir de $K'_c(r_n)$ pour différentes valeurs du paramètre c . On voit

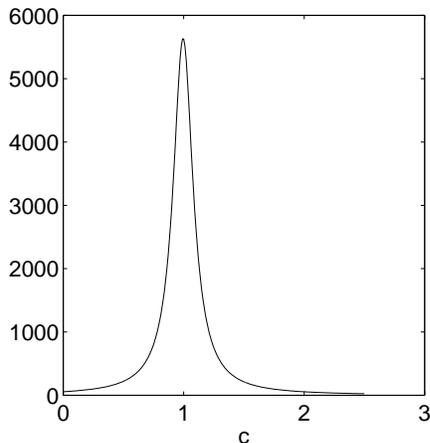


FIG. 3: RSB de sortie (à un coefficient de proportionnalité près) du système $H(.,c)$ pour une mixture de gaussiennes; $\sigma_b = 1$, $\kappa = 0.1$

bien l'amélioration des performances lorsque c tend vers 1 et la dégradation lorsque c continue de croître.

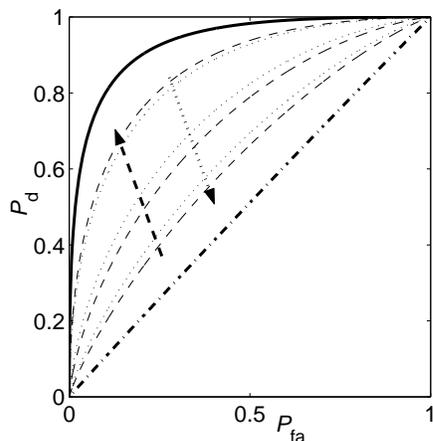


FIG. 4: Courbes COR pour les détecteurs $D(c)$ en fonction du paramètre c . $\varepsilon = 0.02$ et $\sigma = 1$ (RSB de -37 dB). La courbe en trait plein correspond à $c = 1$ (optimal), les courbes en tirets correspondent à $c = 0.5, 0.75, 0.9$ (ordre croissant suivant la flèche en tirets) et les courbes en pointillés correspondent à $c = 1.1, 1.2, 1.4$ (ordre croissant suivant la flèche en pointillés). La courbe en traits mixtes correspond aux performances du filtre adapté sur les observations.

En conclusion, non seulement la famille des $K'_c(.)$ est une famille de résonateurs stochastiques, mais dans cette famille, le LOD est le résonateur stochastique optimal.

4 Conclusion

L'effet curieux de résonance stochastique a conduit certains chercheurs à essayer de l'utiliser explicitement dans des schémas de détection, en général à travers des bancs de résonateurs [4, 7]. Dans ce papier nous montrons que certains détecteurs localement optimaux mettent en jeu des effets de type résonance stochastique, sans pour autant avoir été fabriqués explicitement comme résonateurs stochastiques. Qui plus est, ce sont des résonateurs adaptés

au type de bruit considéré. Néanmoins utiliser un LOD nécessite de connaître le bruit considéré (densité, variance). Une manière de palier à ce problème serait d'utiliser un banc de résonateurs... Enfin une troisième approche dans les problèmes de détection d'un signal dans du bruit est d'utiliser encore de la résonance stochastique, mais cette fois par ajout extérieur de bruit [2, 5].

En terme d'investigations future pour détecter un signal dans du bruit, sans connaissance *a priori* sur le bruit, il semble intéressant de pouvoir soit chercher de manière adaptative le système optimal au sens de Neyman-Pearson, soit de pouvoir déterminer un type de bruit et niveau de bruit optimum à ajouter aux observations avant détection.

Références

- [1] F. Chapeau-Blondeau and X. Godivier, *Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear systems*, Phys. Rev. E, vol. 55, no. 2, pp. 1478-1495, Feb. 1997
- [2] F. Chapeau-Blondeau, *Nonlinear Test Statistic to Improve Signal Detection in Non-Gaussian Noise*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 7, no. 7, pp. 205-207, July 2000
- [3] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Stochastic Resonance*, Review of Modern Physics, vol. 70, no. 1, pp. 223-287, January 1998
- [4] M.E. Inchiosa and A.R. Bulsara, *Signal detection statistics of stochastic resonators*, Physical Review E, vol. 53, no. 3, pp. R2021-R2024, March 1996
- [5] S. Kay, *Can Detectability Be Improved by Adding Noise?*, IEEE Signal Processing Letters, vol. 7, no. 1, pp. 8-10, January 2000
- [6] N. H. Lu and B. A. Einstein, *Detection of Weak Signal in non-Gaussian Noise*, IEEE trans. on IT, vol. 27, no. 6, pp. 755-771, Nov. 1981
- [7] S. Zozor and P.-O. Amblard, *Qu'en est-il de la résonance stochastique comme outils potentiel en traitement du signal?*, colloque GRETI, pp. 451-454, Vannes, Sept. 1999
- [8] S. Zozor and P.-O. Amblard, *On the use of stochastic resonance in the detection of sine*, soumis à Signal Processing, Dec 2000.