

Détection bayésienne d'un signal de canal via la perte de Baddeley

Belkheir ESSEBBAR, Mohammed Ali HSAINA

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences de Rabat, Maroc
essebbar@fsr.ac.ma

Résumé – Dans ce travail, on s'intéresse à la restauration bayésienne d'un signal de canal en utilisant la perte de Baddeley. Ainsi, on donne les conditions suffisantes pour une restauration locale bayésienne. Une étude numérique par simulation est donnée avec comparaison du MPM à notre solution.

Abstract – This study deals with the problem of bayesian detection of a binary Markov signal under channel noise using the loss function of Baddeley. Thus, sufficient conditions for local detection are given. A numerical experiment is given in order to compare the MPM and our bayesian solution.

1. Introduction

En théorie de communication, le problème inverse connu sous le nom du bruit de canal, avec entrée markovienne, est défini par

$$Y_t = \varepsilon_t X_t + \xi_t(1 - X_t), \quad t \geq 1, \quad (1)$$

où $(X_t)_{t \geq 1}$ est une chaîne de Markov binaire (processus d'entrée non observable) et $(\varepsilon_t)_{t \geq 1}$ (resp. $(\xi_t)_{t \geq 1}$) est une suite de variables aléatoires iid de loi Bernoulli de paramètre α (resp. β). En plus ces suites sont indépendantes entre elles. Le cas symétrique de ce modèle est donné par $\beta = 1 - \alpha$.

Dans un cadre bayésien on veut restaurer $X = (X_1, \dots, X_n)$ à partir de $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ étant donnée une fonction de perte $L(X, \hat{X})$. La solution bayésienne est donnée par

$$\text{Arg} \left[\min_{\hat{X}} E(L(X, \hat{X})/Y) \right].$$

Le choix de la fonction de perte appropriée est alors un problème spécifique. Deux exemples de fonctions de perte familières

$$\begin{aligned} L(X, \hat{X}) &= \mathbf{1}_{\{X \neq \hat{X}\}}, \\ L(X, \hat{X}) &= \sum \mathbf{1}_{\{x_s \neq \hat{x}_s\}}, \end{aligned}$$

qui sont respectivement la perte 0-1 et le taux de points mals classés. Leurs solutions bayésiennes sont le MAP et le MPM. Le MAP a été utilisé dans le cadre de détection d'un signal de canal [6]. En imagerie, on démontre que le MPM est plus performant que le MAP [5]. Un algorithme récursif permettant le calcul exact du MPM dans le cas d'une entrée markovienne est donné dans [1].

La distance dite de Baddeley [2] est définie sur les ensembles. Elle s'inspire de la distance dans L^p . Cette distance

a été utilisée pour la première fois comme une fonction de perte en imagerie dont la solution bayésienne associée est approchée par les techniques MCMC [3].

Dans ce travail, on s'intéresse à étudier, dans le cadre de détection d'un signal de canal, le modèle bayésien basé sur la fonction de perte de Baddeley. Ainsi on donnera la solution bayésienne exacte du problème inverse donné par (1). Une étude numérique par simulation permettra de juger les performances de cette solution.

2. Le Modèle

Notons par $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ et $\Omega = \{0, 1\}^n$. Pour $j \in \Lambda$ et $A \subseteq \Lambda$, on définit la distance de j à A par $d(j, A) = \min\{l(j, a); a \in A\}$ où $l(i, j) = |j - i|$ est la longueur du plus court chemin entre i et j . La perte de Baddeley s'inspire de la distance sur L^p ($p \geq 1$), elle est donnée par

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^n (|\omega\{d(i, B(x))\} - \omega\{d(i, B(y))\}|)^p, \quad x, y \in \Omega,$$

où $B(x) = \{i \in \Lambda : x_i = 1\}$ et ω une fonction de poids définie sur $[0, +\infty[$, croissante et concave telle que : $\omega(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. Dans la suite, on considère la fonction de perte donnée par $p = 2$ et $\omega(t) = \min\{t, c\}$, avec $c \in \mathbb{N}^*$, i.e.

$$\begin{aligned} L_c(x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c [(2k-1) \cdot \mathbf{1}_{\{d(i, B(x)) \geq k\}}] \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c [(2k-1) \\ &- 2 \sum_{k'=1}^c \mathbf{1}_{\{d(i, B(x)) \geq k'\}}] \cdot \mathbf{1}_{\{d(i, B(y)) \geq k\}}]. \quad (2) \end{aligned}$$

La solution bayésienne associée à la perte de Baddeley est donnée par

$$X^* = \text{Arg} \min_{\hat{X} \in \Omega} L_c^y(\hat{X}).$$

avec

$$L_c^y(\hat{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^c [(2k-1-2\mu_i) \cdot \mathbf{1}_{\{\hat{X}_{\max\{1, i-k+1\}}=0, \dots, \hat{X}_{\min\{i+k-1, n\}}=0\}}],$$

où

$$\mu_i = \sum_{k'=1}^c P(X_{\max\{1, i-k'+1\}} = 0, \dots, X_{\min\{n, i+k'-1\}} = 0/Y).$$

Dans la suite, on pose $c = 2$ et on convient que $x_i = 0$ et $\mu_i = \frac{3}{2}$ lorsque i est en dehors de Λ . On a alors à minimiser

$$L_2^y(\hat{X}) = \sum_{i=1}^n [(1-2\mu_i) \cdot \mathbf{1}_{\{\hat{x}_i=0\}} + (3-2\mu_i) \cdot \mathbf{1}_{\{\hat{x}_{i-1}=0, \hat{x}_i=0, \hat{x}_{i+1}=0\}}], \quad (3)$$

avec

$$\mu_i = P(X_i = 0/Y) + P(X_{i-1} = 0, X_i = 0, X_{i+1} = 0/Y). \quad (4)$$

On a la proposition suivante qui donne les conditions locales suffisantes pour une restauration bayésienne [4].

Proposition : Pour $i = 1, \dots, n$, on a les conditions locales suffisantes : Si $1-2\mu_i + \sum_{s \in A} (3-2\mu_s) \geq 0, \forall A \subseteq \{i-1, i+1\}$ alors $X_i^* = 1$. Si $4-4\mu_i + \sum_{s \in A} (3-2\mu_s) \leq 0, \forall A \subseteq \{i-1, i+1\}$ alors $X_i^* = 0$.

Remarque : Lorsque $c = 1$, la solution bayésienne coïncide avec le MPM : si $\mu_i < \frac{1}{2}$ alors $X^* = 1$ et si $\mu_i > \frac{1}{2}$ alors $X^* = 0$.

La solution bayésienne, c'est à dire celle qui minimise (3), passe par le calcul des μ_i données par (4). Ces probabilités sont calculées d'une manière exacte par un algorithme récursif [4].

3. Etude numérique par simulation

Dans le cadre du problème inverse donné par (1), on simule 10000 trajectoires associées à une chaîne de Markov, à deux états 0 et 1, homogène et stationnaire $(X_k)_{k=1}^{16}$ définie par $\pi = P(X_t = 1) = 0.5$ et $p = P(X_t = 1 | X_{t-1} = 1) = 0.9$. De même on construit 10000 trajectoires pour le processus $(Y_k)_{k=1}^{16}$ avec $\alpha = 0.7$ et $\beta = 0.3$.

Considérons les erreurs suivantes :

$$A(X, X^*) = \sum_{i=1}^{16} \mathbf{1}_{\{X_i \neq X_i^*\}},$$

$$B(X, X^*) = \sum_{i=1}^{15} \mathbf{1}_{\{X_i \neq X_i^*, X_{i+1} \neq X_{i+1}^*\}},$$

$$C(X, X^*) = \sum_{i=1}^{14} \mathbf{1}_{\{X_i \neq X_i^*, X_{i+1} \neq X_{i+1}^*, X_{i+2} \neq X_{i+2}^*\}},$$

qui représentent respectivement le nombre de points mal classés, le nombre de paires de points voisins mal classés et le nombre de triplets de points voisins mal classés.

Le tableau 1 et la figure 1 montrent que le MPM performe dans l'erreur A, ce qui est normal car il est la solution bayésienne qui lui est associé. Par contre pour les erreurs B et C c'est

le BDD (solution bayésienne associée à la perte de Baddeley) qui est le plus performant. Le BDD présente aussi l'avantage au niveau de la précision (variances plus petites). Le nombre de points de BDD restaurés (ou préjugés) par les conditions locales suffisantes, données par la proposition ci dessus, est en moyenne égale à 52%. On note qu'un point préjugé permet de diminuer, d'au moins de moitié, le coût de calcul de la solution.

X^*	A	B	C	s_A^2	s_B^2	s_C^2
MPM	3.414	2.086	1.275	8.791	6.257	4.338
BDD	4.335	1.633	0.594	6.521	3.268	1.167

Tableau 1. Moyennes et variances de A, B et C.

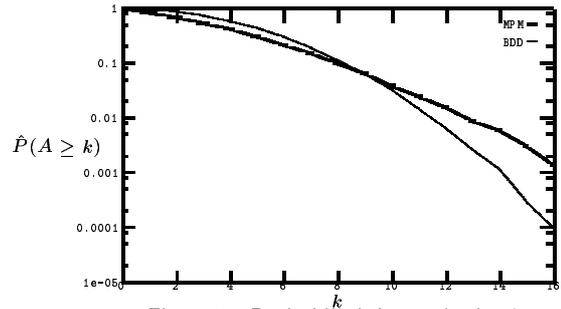


Figure 1. Probabilité de survie de A.

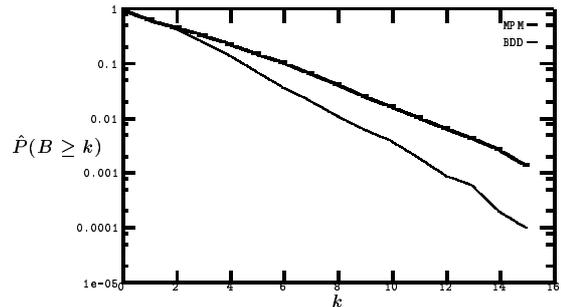


Figure 2. Probabilité de survie de B.

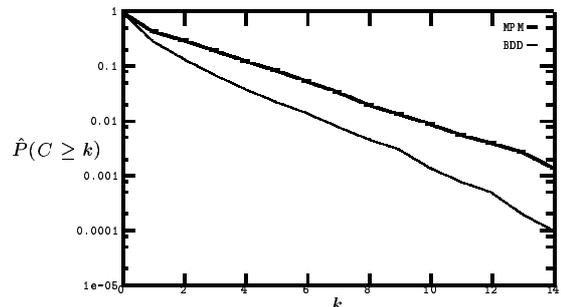


Figure 3. Probabilité de survie de C.

4. Conclusion

Dans ce travail on a proposé, dans le cadre d'une entrée markovienne à travers d'un bruit de canal, la solution bayésienne exacte associée à la perte de Baddeley. Ainsi, on a donné des conditions locales suffisantes pour la restauration du signal d'entrée, qui sont faciles à vérifier et qui permettent une économie dans

le temps de calcul.

Le problème de recherche de la solution bayésienne exacte associée à la perte de Baddeley lorsque $p > 2$ n'est par encore traité.

Remerciements: Les auteurs tiennent à remercier le CNR marocain (PROTARS P3T1/06) pour leur soutien matériel.

Références

- [1] M. Askar and H. Derin, "A recursive algorithm for the Bayes solution of the smothing problem", *IEEE trans. Automa. Contr.*, vol. Ac 26, 1981, pp 558-561.
- [2] A.J.Baddeley, "Errors in binary images and a L^p version of the Hausdorff metric", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 10, 1992, pp 157-183.
- [3] A. Frigessi and H. Rue, "Bayesian image classification with Baddeley's delta loss", *Journal of Computer Graphics and Statistics*, 01, 1997, pp 55-73.
- [4] M.A. Hsaina and B. Essebbar, "Bayesian detection of binary Markov signal using Baddeley's delta loss". Prépublication, Département de mathématiques et informatique, Faculté des sciences de Rabat: Maroc, 2000.
- [5] J. Marroquin, S. Mitter, and T.Poggio, "Probabilistic solutions of ill-posed problems in computational vision", *JASA*, 82, 1987, pp 76-89.
- [6] N. Phamdo, and N. Farvardin, "Optimal detection of discrete Markov source over discrete memoryless channel coding", *IEEE Trans. Informat. Theory*, Vol 40. No 1, jan 1994, pp 186-193.