

Reconstruction de la surface fermée d'un objet compact en tomographie

Charles SOUSSEN¹, Ali MOHAMMAD-DJAFARI¹

¹Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS – SUPÉLEC – UPS)
SUPÉLEC, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France
sossen@lss.supelec.fr, djafari@lss.supelec.fr

Résumé – Notre étude concerne la reconstruction surfacique d'un objet compact dans un fond uniforme à partir de ses projections à rayons X. Nous étudions différents modèles paramétriques de la surface de l'objet et estimons *directement* les paramètres à partir des projections par une approche pénalisée qui ne nécessite pas la représentation par voxels de l'image. Nous développons les modèles par harmonique sphérique et par spline, et en particulier le modèle polyédrique. Pour ce dernier, notre contribution concerne la gestion directe des auto-intersections de la surface et la mise à jour de ses projections, à la base du calcul analytique des dérivées des projections par rapport aux sommets.

Abstract – We study the surface reconstruction of a compact object in a uniform background from its X-ray tomographic projections. We select several parametric surface models and we *directly* estimate their parameters from the projections. We use a penalized approach that does not require a voxel representation of the image. We investigate spherical harmonics and spline representations, and we finally show the advantage of the polyhedral model. In particular, we present original algorithms to avoid self intersection of the polyhedron and to update its projections. Those algorithms yield an analytic calculation of the derivatives of the projections with respect to the vertices.

1 Introduction

Nous étudions la reconstruction 3D de la forme (surface) d'un objet compact totalement inclus dans un fond uniforme. Par « objet compact », nous désignons un objet de densité uniforme et dont le contour \mathcal{C}^* est fermé. L'une des applications concernées est le contrôle non destructif (CND) des matériaux, dans laquelle l'objet \mathcal{C}^* représente un défaut, par exemple un trou d'air, inclus dans une région métallique homogène.

En tomographie à rayons X, les données \mathbf{d} sont les projections bruitées de l'image. Elles correspondent aux intégrales linéiques de la fonction de densité $f(x, y, z)$. En repérant une projection par sa direction \mathbf{w}_θ et son plan détecteur (cf. fig. 1), la valeur projetée en un pixel \mathbf{t} s'écrit

$$\int_{l \geq 0} f(\mathbf{t} - l\mathbf{w}_\theta) dl. \quad (1)$$

Dans notre contexte, f est une fonction binaire, et nous pouvons supposer sans perte de généralité [1] que

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \text{ est intérieur à } \mathcal{C}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

Par conséquent, chaque projection (1) s'exprime comme la longueur de l'intersection de son rayon $\mathcal{L}_{\mathbf{t}, \theta}$ avec l'objet volumique de contour \mathcal{C}^* .

Une approche classique pour la reconstruction d'une image binaire est sa modélisation par un ensemble de voxels, puis l'estimation de leur valeur à partir des données [2]. Dans le contexte énoncé ci-dessus, nous exploitons la compacité de l'objet pour le décrire uniquement par sa

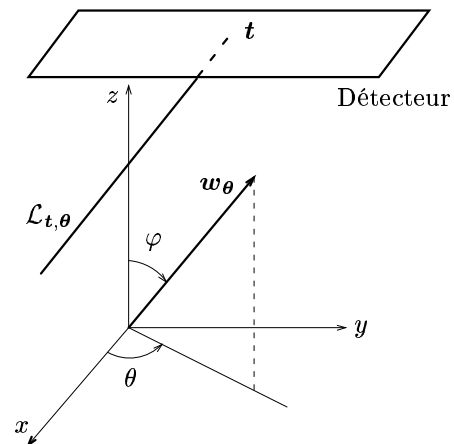


FIG. 1 – Projection linéique d'une image 3D sur un plan horizontal. La projection d'angle sphérique $\theta = (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ est représentée par ses rayons $\mathcal{L}_{\mathbf{t}, \theta}$ dirigés par le vecteur unitaire \mathbf{w}_θ et arrivant en les pixels \mathbf{t} du plan détecteur.

surface fermée. En définissant un modèle surfacique paramétrique $\mathcal{C}_{\mathbf{x}} (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p)$, la reconstruction de \mathcal{C}^* se ramène à l'estimation des paramètres \mathbf{x} à partir des données.

Notre étude s'organise comme suit. Après avoir défini l'estimation des paramètres dans un cadre bayésien, nous sélectionnons des modèles surfaciques adéquats. Cette discussion mène au choix du modèle polyédrique, guidé par des aspects algorithmiques liés au calcul de ses projections. L'efficacité de la reconstruction est illustrée sur un jeu de données simulées dans un contexte caractéristique du CND.

2 Modèles géométriques

Durant la dernière décennie, les modèles de type contour déformable ont été essentiellement utilisés en segmentation d'images, avec l'avènement des contours actifs. En reconstruction d'images, la plupart des modèles par contours utilisés sont paramétriques [3, 4, 5]. Il s'agit alors de trouver un bon compromis entre le nombre de paramètres et la diversité des formes engendrées.

D'une façon générale, nous menons l'estimation de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ à partir des données \mathbf{d} par une approche régularisée [6, 1]. L'estimateur $\hat{\mathbf{x}}$ est défini au sens du maximum *a posteriori* (MAP) par le minimiseur du critère composite

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{d} - \mathcal{A}(\mathcal{C}_{\mathbf{x}})\|^2 + \lambda \mathcal{R}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

où \mathcal{A} est l'opérateur de projection et $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ est un terme de régularisation qui préserve la douceur de la surface. Ce dernier est alors lié aux courbures locales de la surface. La difficulté de la reconstruction est due au fait que le critère \mathcal{J} est généralement multimodal. Deux stratégies sont alors envisageables : utiliser une méthode stochastique de type recuit simulé, ou utiliser une méthode déterministe d'optimisation locale, avec une initialisation adéquate [6]. Nous optons pour la seconde, à la fois pour limiter le temps de calcul et par simplicité algorithmique.

Nous évoquons à présent le choix du modèle de surface active paramétrique. Nous distinguons les modèles *locaux* des modèles *globaux*, au sens où chacun des paramètres contrôle ou non une portion limitée du contour $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$.

2.1 Modèles globaux

Les modèles globaux les plus simples pour la description d'une surface fermée sont les ellipsoïdes et les superquadriques, décrits par au plus 12 paramètres. Toutefois, ces formes sont très singulières, car elles possèdent des plans de symétrie. Des modèles plus généraux décrivent une surface fermée par un couple d'abscisses curvilignes. En particulier, la modélisation harmonique est définie à partir d'une paramétrisation en coordonnées sphériques. Avec les notations de la figure 1, une surface fermée étoilée autour d'un point G s'exprime sous la forme $M(\boldsymbol{\theta}) = G + \rho(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{w}_{\boldsymbol{\theta}}$, où $\rho : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive. La troncature à l'ordre L du développement en série harmonique de la fonction ρ s'écrit :

$$\rho(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=0}^L \sum_{|k| \leq l} x_l^k \rho_l^k(\boldsymbol{\theta}), \quad (4)$$

où les fonctions ρ_l^k sont les harmoniques sphériques, dérivant du polynôme de Legendre de degré l [7, 1].

Ce modèle, décrit par les paramètres $\mathbf{x} = \{x_l^k, |k| \leq l \leq L\}$, définit une surface étoilée par rapport à G par les contraintes $\forall \boldsymbol{\theta}, \rho(\boldsymbol{\theta}) > 0$ (contraintes linéaires en \mathbf{x}). Il présente donc l'avantage de générer des surfaces qui ne s'auto-intersectent pas.

2.2 Modèles locaux

Les modèles locaux décrivent efficacement des surfaces complexes comportant des zones inhomogènes, car chaque

paramètre ne contrôle pas la totalité de la surface. Les splines fermées, décrites par leurs points de contrôle V_1, \dots, V_n , entrent dans cette catégorie de surfaces [4, 5]. Le vecteur \mathbf{x} des paramètres est alors de taille $3n$ et formé des coordonnées des sommets V_i . L'ordre de la spline est crucial, car il contrôle le degré de localité des points de contrôle et la douceur de la surface.

Bien qu'une spline d'ordre un, c'est-à-dire un polyèdre, produise une surface non différentiable en ses arêtes, ce modèle présente l'avantage de générer des formes variées, et s'avère également simple à manipuler. En effet, il est paramétré par ses sommets, et le calcul d'une de ses projections (1), c'est-à-dire de la longueur de $\mathcal{L}_{t,\boldsymbol{\theta}} \cap \mathcal{C}_{\mathbf{x}}$, se ramène à la recherche des intersections entre une droite et les facettes de $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$. Le modèle polyédrique a déjà été utilisé avec efficacité en reconstruction tomographique [8], mais notre approche diffère au sens où elle ne nécessite pas une approximation par voxels de l'image, que ce soit au niveau du calcul des projections (voir la figure 2 dans le cas 2D), de leur dérivées par rapport à \mathbf{x} , et de la modélisation d'informations *a priori*.

2.3 Modèles retenus

Le modèle retenu *in fine* est une surface maillée, c'est-à-dire un polyèdre. Son choix est guidé à la fois par l'aspect local de sa paramétrisation et par ses propriétés géométriques (calcul de ses projections). Le paramètre \mathbf{x} représente les sommets du polyèdre, et son estimation au sens du MAP est menée par un algorithme déterministe local. Compte tenu de la sensibilité de l'estimé $\hat{\mathbf{x}}$ à la solution initiale $\mathbf{x}^{(0)}$, nous avons recours au préalable à la reconstruction d'une surface harmonique à faible nombre de paramètres pour fournir $\mathbf{x}^{(0)}$. Les paramètres de l'harmonique sont estimés directement à partir des données au sens des moindres carrés contraints.

3 Reconstruction polyédrique

3.1 Estimation des sommets

Nous fixons la composition des facettes du polyèdre, choisies triangulaires. La topologie de la surface est donc inchangée lorsque les sommets sont déplacés. Le terme de régularisation favorise la douceur locale de la surface. Pour cela, nous pénalisons les valeurs extrêmes des angles solides $A_i(\mathbf{x}) \in [0, 4\pi]$ en les sommets V_i [1] :

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (1 + \cos(A_i(\mathbf{x})/2))^2. \quad (5)$$

Pour optimiser le critère $\mathcal{J}(\mathbf{x})$, nous envisageons deux algorithmes locaux :

- Un algorithme de descente sur \mathbf{x} ;
- Un algorithme de descente par blocs de type Gauss Seidel, où les blocs correspondent aux sommets V_i .

L'algorithme par blocs mène à une procédure de test du caractère « régulier » du polyèdre, au sens où deux de ses facettes ne s'intersectent pas. Ce test repose sur la mise à jour exacte des projections suite au déplacement d'un

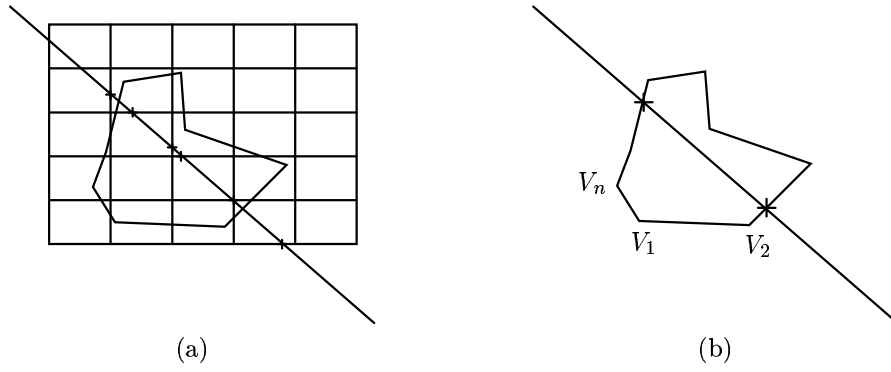


FIG. 2 – Cas 2D : calcul des projections d’un polygone. (a) Calcul approché par une discrétisation de l’image en pixels. (b) Calcul *analytique* exact, basé sur la recherche des intersections du rayon de projection et des arêtes.

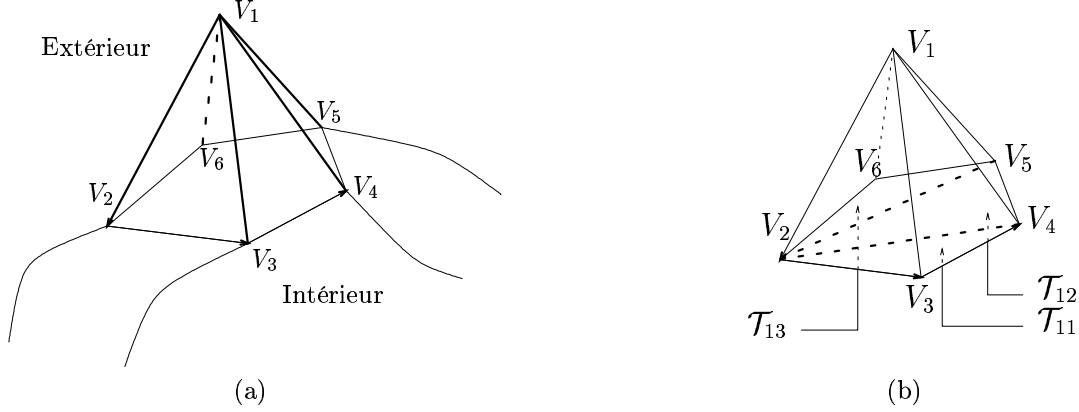


FIG. 3 – Modèle polyédrique. (a) Polyèdre $\{V_1, \dots, V_n\}$, le sommet V_1 est extérieur ($\varepsilon_1 = 1$). (b) Extraction du mini-polyèdre $\mathcal{C}_{\partial i}$ relatif à V_1 . Les tétraèdres \mathcal{T}_{1r} associés sont formés de V_1 et de triplets de sommets adjacents à V_1 .

seul sommet [1]. Néanmoins, un algorithme de descente « directe » sur \mathbf{x} s’avère en pratique nettement plus rapide pour un résultat de qualité comparable. C’est donc la solution que nous préconisons. Le test de la régularité de $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ repose alors sur le calcul exact de $\nabla \mathcal{J}$ et sa comparaison avec son approximation par différence finie.

3.2 Mise à jour exacte des projections

La mise à jour des projections du polyèdre suite au déplacement d’un seul sommet est la base du calcul de $\nabla \mathcal{A}$, et donc de $\nabla \mathcal{J}$. En effet, si $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} = \{V_1, \dots, V_i + \delta V_i, \dots, V_n\}$ représente un polyèdre qui ne diffère de \mathbf{x} que par la position du i -ème sommet, et δV_i est un déplacement infinitésimal, nous montrons que

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}_{\mathbf{x}+\delta \mathbf{x}}) = \mathcal{A}(\mathcal{C}_{\mathbf{x}}) + \varepsilon_i \mathcal{A}(\mathcal{C}'_{\partial i}) - \varepsilon_i \mathcal{A}(\mathcal{C}_{\partial i}), \quad (6)$$

où $\mathcal{C}_{\partial i}$ représente le polyèdre extrait de $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ de sommets V_i et ses sommets voisins, et $\mathcal{C}'_{\partial i}$ est construit de la même façon à partir de $\mathcal{C}_{\mathbf{x}+\delta \mathbf{x}}$. Enfin, le paramètre $\varepsilon_i = \pm 1$ indique le caractère extérieur ou intérieur de V_i dans $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$ (figure 3). Comme le polyèdre $\mathcal{C}_{\partial i}$ se décompose naturellement en une partition de tétraèdres \mathcal{T}_{ir} , le calcul de ses projections et de leurs différentielles par rapport à V_i est analytique, et mène à l’évaluation directe des dérivées partielles de \mathcal{A} par rapport aux coordonnées de V_i . L’évaluation de la i -ème dérivée partielle de \mathcal{A} consiste finalement à :

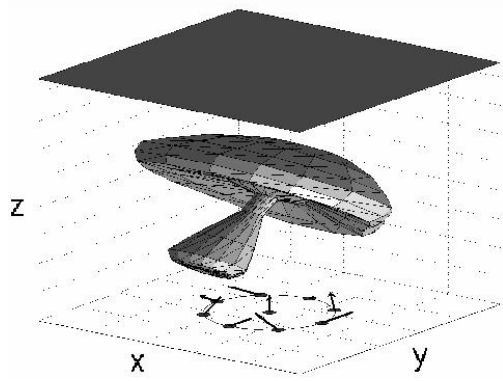
- Évaluer ε_i , le caractère extérieur de V_i dans $\mathcal{C}_{\mathbf{x}}$.

- Extraire le polyèdre local $\mathcal{C}_{\partial i}$, et le décomposer en une partition de tétraèdres $\cup \mathcal{T}_{ir}$.
- Calculer la projection exacte $\mathcal{A}(\mathcal{C}_{\partial i}) = \sum \mathcal{A}(\mathcal{T}_{ir})$ et ses dérivées par rapport aux coordonnées de V_i .

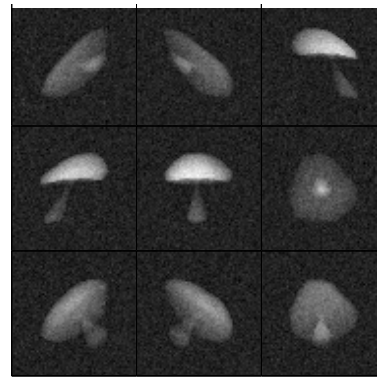
4 Simulations numériques

Nous illustrons brièvement la reconstruction polyédrique sur un jeu de données synthétiques correspondant à 9 projections d’une surface \mathcal{C}^* comportant une grande diversité d’inhomogénéités spatiales (figure 4 (a)). La difficulté est accrue par le fait que les directions de projection sont toutes voisines de l’axe (z), ce qui crée un déficit d’information suivant les directions orthogonales à cet axe. Chaque projection est une image formée de 64×64 pixels, avec un rapport signal sur bruit de 20 dB (b).

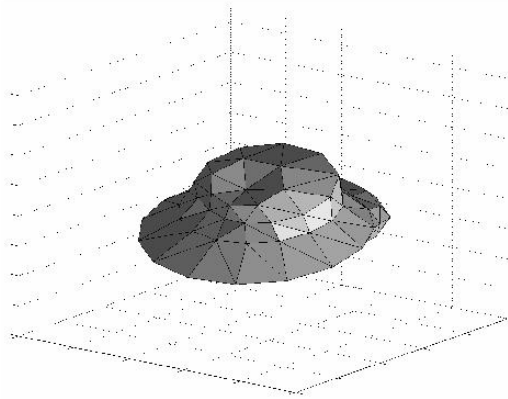
Nous montrons clairement, sur ce cas difficile, les limites du modèle harmonique global pour $L = 3$ (c). En effet, l’objet \mathcal{C}^* étant fortement non convexe, les modèles globaux à très faible nombre de paramètres sont mal adaptés, car ils ne génèrent pas des surfaces suffisamment non convexes. Néanmoins, la reconstruction polyédrique obtenue pour $n = 95$ sommets avec (c) pour initialisation s’avère de très bonne qualité (d), contrairement aux reconstructions obtenues avec des initialisations convexes plus simples, comme les ellipsoïdes ou les super-ellipsoïdes.



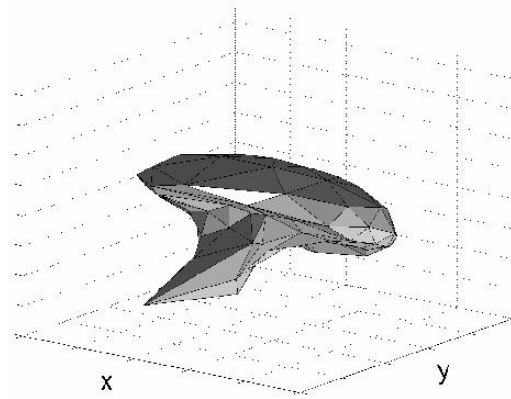
(a) Objet réel C^* et géométrie de projection



(b) Données synthétiques



(c) Reconstruction harmonique ($L = 3, p = 16$)



(d) Reconstruction polyédrique ($n = 95, \lambda = 2$)

FIG. 4 – Traitement des données simulées. Reconstructions par harmonique sphérique et polyédrique, où (c) est utilisée pour fournir la reconstruction initiale.

5 Conclusions

Nous avons étudié la reconstruction d'une surface fermée à partir de ses projections à rayons X. Nous avons montré l'intérêt et l'efficacité des modèles paramétriques locaux, et en particulier du modèle par surface triangulée. La reconstruction surfacique revient alors à estimer directement les sommets du maillage au sens du MAP, sans procéder à une approximation de l'image par un ensemble de voxels. L'originalité de notre contribution ne concerne pas la modélisation polyédrique, mais les aspects algorithmiques liés à l'optimisation de l'énergie *a posteriori*. Nous avons opté pour un algorithme de descente sur l'ensemble des sommets, couplé avec une procédure de test de la régularité du maillage (au sens où il ne s'intersecte pas), qui exploite directement les propriétés du modèle polyédrique. En effet, ce test est directement basé sur la mise à jour des projections du polyèdre après déplacement de sommets.

Nos travaux futurs s'orientent vers deux directions. Tout d'abord, nous validerons la méthode de reconstruction polyédrique par le traitement de données réelles. Puis, nous développerons la méthode multirésolution introduite dans [6], qui consiste à reconstruire successivement des surfaces triangulées à nombre croissant de sommets, en considérant à chaque niveau de résolution une surface à plus faible nombre de sommets pour produire l'initialisation.

Références

- [1] C. Soussen, *Reconstruction 3D d'un objet compact en tomographie*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, décembre 2000.
- [2] J.-M. Dinten, *Tomographie à partir d'un nombre limité de projections : régularisation par champs markoviens*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, janvier 1990.
- [3] P. Cinquin et B. Chalmond, « Hip prosthesis design », *Lecture Notes in Medical Informatics*, vol. 16, pp. 195–200, 1982.
- [4] P. Milanfar, W. C. Karl et A. S. Willsky, « Reconstructing binary polygonal objects from projections : A statistical view », *Comput. Vision Graphics Image Process.*, vol. 56, n° 5, pp. 371–391, septembre 1994.
- [5] K. M. Hanson et G. S. Cunningham, « Exploring the reliability of Bayesian reconstructions », *Medical Imaging : Image Processing, Proc. SPIE*, vol. 2434, pp. 416–423, 1995.
- [6] C. Soussen et A. Mohammad-Djafari, « Approche multirésolution pour la reconstruction 3D de défaut en tomographie X », in *Actes 17^e coll. GRETSI*, Vannes, septembre 1999, pp. 1197–1200.
- [7] A. Matheny et D. B. Goldgof, « The use of three and four-dimensional surface harmonics for rigid and nonrigid shape recovery and representation », *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 17, n° 10, pp. 967–981, octobre 1995.
- [8] X. L. Battle, G. S. Cunningham et K. M. Hanson, « Tomographic reconstruction using 3D deformable models », *Phys. Med. Biol.*, vol. 43, pp. 983–990, 1998.