

# Poursuite d'une phase Brownienne à dérive linéaire. Performances et Algorithmes

Pierre-Olivier AMBLARD<sup>1</sup>, Jean-Marc BROSSIER<sup>2</sup>, Eric MOISAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Images et des Signaux, UMR CNRS 5083  
Groupe Non Linéaire, ENSIEG, BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

<sup>2</sup>ST-Microelectronics  
12, rue Jules Horowitz, BP 217, 38019 Grenoble cedex  
Bidou.Amblard@lis.inpg.fr, Jean-Marc.Brossier@st.com, Eric.Moisan@lis.inpg.fr

**Résumé** – Nous étudions le problème de la poursuite d'une phase brownienne à dérive linéaire en sortie d'un récepteur numérique simplifié. Deux algorithmes adaptatifs classiques, les boucles de Costas et à remodulation, sont considérés et comparés à l'implantation particulière du filtre non linéaire optimal. L'étude des performances asymptotiques des boucles permet de les régler de sorte à minimiser l'erreur quadratique moyenne. On montre alors que la supériorité du filtre particulière réside dans la phase d'accrochage et dans le comportement vis-à-vis des glissements de cycle. Cette analyse nous conduit à proposer une structure ressemblant au filtre particulière mais utilisant les boucles. Cette structure hybride a un comportement équivalent au particulière en convergence, tout en ayant une complexité bien moindre.

**Abstract** – We study the problem of tracking a Brownian phase with linear drift at the output of a simple digital receiver. The classical Costas and Decision feedback loops are compared to the particle implementation of the optimal nonlinear filter. The study of the asymptotic performance of the loops allows to tune the loops in order to minimize the mean square error. We then show that the particle filter outperforms the loops in the acquisition step and in the behavior in front of cycle slips. Analysing this superiority leads us to propose an hybrid structure using the loops and based on the principles of the particle filter. This structure is equivalent to the particle filter in the acquisition step, but has a much lower complexity.

## 1 Poursuite de phase

Le problème étudié dans ce travail est la synchronisation de phase pour les communications numériques [1]. Nous considérons délibérément un cas idéal de réception. En effet, nous nous plaçons au niveau du récepteur après la phase de filtrage adapté; nous supposons que la synchronisation symbole est parfaite et que les interférences intersymboles sont inexistantes. L'unique problème restant à traiter est l'élimination d'une phase résiduelle. La sortie numérique du récepteur se met alors sous la forme

$$y_k = a_k e^{i\xi_k} + n_k \quad (1)$$

où la séquence  $\{n_k\}$  est une suite de variables complexes, indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), de puissance  $\sigma_n^2$ . Ce bruit est de plus supposé gaussien et circulaire (parties réelle et imaginaire indépendantes). La suite des  $a_k$  est également i.i.d. et constitue la suite des symboles codant le message émis. Nous supposons ici que la modulation utilisée est une PSK, sachant que les résultats présentés concerneront uniquement les modulations à 2 états. Dans ce cas, chaque  $a_k$  prend les valeurs  $\pm 1$  avec probabilité 1/2.

La phase  $\xi_k$  est considérée ici comme provenant d'une mauvaise synchronisation entre émetteur et récepteur. On suppose que les oscillateurs à l'émission et en réception diffèrent d'un décalage constant de fréquence et d'une gigue. La phase peut alors être considérée comme un mouvement brownien (à temps discret) à dérive linéaire, soit,

sous forme mathématique

$$\xi_k = \xi_{k-1} + \varepsilon + w_k \quad (2)$$

où  $w_k$  est un bruit blanc gaussien centré de variance  $\sigma_w^2$  et où la pente  $\varepsilon$  est inconnue. On suppose enfin que les séries  $a_k$ ,  $\xi_k$  et  $n_k$  sont mutuellement indépendantes.

Le problème posé est ici l'élimination de la phase résiduelle  $\xi_k$ , que nous devons donc estimer. De plus, nous nous plaçons dans un contexte « en-ligne », et le problème d'estimation est un problème de poursuite. Dans la suite, nous présentons trois algorithmes: deux boucles à verrouillage de phase d'ordre 2 et l'implantation particulière du filtre optimal. Le paragraphe 3 est dédié à l'analyse comparée des performances des trois algorithmes. L'analyse asymptotique des deux boucles est réalisée théoriquement et permet de placer les boucles dans une configuration qui minimise l'erreur quadratique moyenne asymptotique. Cette configuration peut alors être comparée numériquement au filtre particulière. La deuxième étape des comparaisons réside dans l'analyse transitoire qui est réalisée numériquement. L'analyse de la supériorité du filtre particulière en ce domaine nous conduit à proposer une stratégie « multi-agents » dans le paragraphe 3.

## 2 Algorithmes

**Boucles** Les boucles à verrouillage de phase étudiées sont des algorithmes adaptatifs d'ordre 2 ou algorithmes

multipas [2]. Ces boucles sont constituées de deux algorithmes couplés, un délivrant une estimation de la phase, l'autre étant chargé de la dérive. Les boucles ont la structure générique

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1} + \gamma_1 \chi_k \\ \varepsilon_k &= \varepsilon_{k-1} + \gamma_2 \chi_k\end{aligned}$$

dans laquelle on reconnaît la structure classique des algorithmes adaptatifs : correction de l'estimation passée par l'ajout d'un terme proportionnel à l'erreur passée. Dans le cas de BPSK ( $a_k = \pm 1$ ), les termes d'erreurs s'écrivent

$$\begin{aligned}\chi_k^C &= \text{Im}(y_k^2 e^{-2i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \\ \chi_k^r &= \text{Im}(y_k e^{-i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \text{Sign} \left( \text{Re}(y_k e^{-i(\varphi_{k-1} + \varepsilon_{k-1})}) \right)\end{aligned}$$

et correspondent respectivement à la boucle de Costas et à la boucle à remodulation. La non-linéarité présente dans ces termes permet « d'effacer » la modulation numérique ; la phase résiduelle est ensuite compensée par l'estimée passée. Les termes  $\chi$  correspondent donc à peu près au sinus de l'erreur de phase.

Les termes  $\gamma_1, \gamma_2$  sont les pas d'adaptation des algorithmes et gèrent non seulement la dynamique transitoire mais également le comportement asymptotique des boucles. Le choix de ces pas est crucial pour le comportement des algorithmes et est donc lié à l'analyse des performances.

**Implantation particulière du filtre optimal** Rappelons que le problème à traiter est d'estimer la phase à partir des observations étant donné un *a priori* sur la phase. On se trouve dans la problématique du filtrage optimal d'un processus de Markov caché dans une observation. La solution du filtrage optimal dans un cadre bayésien est connue depuis longtemps [3] et consiste en une équation de récursion pour la densité *a posteriori*  $p(\xi_k | \mathbf{y}_{1:k})$  (où  $\mathbf{y}_{1:k} = (y_1, \dots, y_k)$ ). Cette récursion,

$$p(\xi_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{p(y_k | \xi_k) \int p(\xi_k | \xi_{k-1}) p(\xi_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\xi_{k-1}}{p(y_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \quad (3)$$

consiste en une étape de prédiction qui utilise le modèle d'état de la phase, puis en une étape de correction qui prend en compte la nouvelle observation à travers la fonction de vraisemblance. Ce résultat fondamental est malheureusement inutilisable en pratique, car les intégrales intervenant dans (3) sont généralement incalculables, tout comme les estimateurs dérivés de la densité *a posteriori*. Le recours à des techniques numériques est inévitable, et parmi elles, les techniques Monte-Carlo ont connu ces dernières années un regain d'intérêt. Elles conduisent à l'implantation particulière du filtre optimal. Pour une présentation précise du filtrage particulière, nous renvoyons le lecteur à [4, 5, 6, 7]. L'idée sous-jacente est de voir la densité de probabilité *a posteriori* comme la fonction de distribution d'un gaz de particules. On remplace alors la densité par un nombre fini de particules (variables aléatoires) de ce gaz. Les grandeurs moyennes de la densité peuvent alors être approchées par les grandeurs moyennes correspondantes calculées empiriquement à l'aide des particules.

Les particules suivent évidemment une dynamique qui est gérée par la densité *a posteriori*. En particulier, leur mouvement suit les mêmes principes qui gèrent la récursion (3) : mouvement « prédictif » utilisant l'*a priori* – modèle d'état –, puis étape de correction utilisant la vraisemblance des observations. Pour des raisons algorithmiques, ces deux aspects sont codés différemment. L'aspect prédictif est mémorisé dans la trajectoire des particules, qui en définitive sont des réalisations du modèle d'état *a priori* ; la vraisemblance est stockée dans un poids attaché à la particule. Notons que les poids sont normalisés de sorte que la somme des poids sur l'ensemble des particules vaut 1. Les particules suivant un modèle markovien, elles diffusent et leur vraisemblance (poids) ne peut que diminuer. Ainsi, l'algorithme particulière dégénère avec le temps dans le sens où toutes les particules voient leur poids tendre vers zéro, sauf pour une particule qui est la plus vraisemblable. Pour lutter contre cette dégénérescence, il convient de rééchantillonner régulièrement les particules conformément aux poids que les particules portent. Dans cette étape, les particules les moins vraisemblables vont mourir, alors que les particules les plus vraisemblables vont proliférer.

Les particules pour la poursuite de phase ont deux dimensions :  $\mathbf{x}_k(i) = (x_k^1(i), x_k^2(i))$ . La première correspond à la phase à estimer et la deuxième à la pente  $\varepsilon$  également à estimer. L'algorithme particulière utilisé dans le problème de poursuite d'une phase brownienne avec dérive prend alors la forme :

1. **initialisation** :  $N$  particules  $\mathbf{x}_0(i) \sim p(\xi_0, \varepsilon)$   
de poids uniforme  $\tilde{w}_0(i) = \frac{1}{N}$ .
2. Pour  $k \geq 1$  faire  $\forall i = 1, \dots, N$  :
  - (a) **prédiction** :  $\mathbf{x}_{0:k}(i) = (\mathbf{x}_{0:k-1}(i), \mathbf{x}_k(i))$  où  
 $\mathbf{x}_k(i) \sim p(\xi_k | \mathbf{x}_{k-1}(i))$
  - (b) **correction** :  
 $w_k(i) = \tilde{w}_{k-1}(i) p(y_k | \mathbf{x}_k(i))$   
 $\tilde{w}_k(i) = \frac{w_k(i)}{\sum_{j=1}^N w_k(j)}$
  - (c) Si  $-\sum_i \tilde{w}_k(i) \log_2 \tilde{w}_k(i) < \eta$  rééchantillonner selon  $\tilde{w}_k(i)$ , puis  $\tilde{w}_k(i) = 1/N$
  - (d) **estimation** :

$$\hat{\xi}_k = \hat{E}[\xi_k | \mathbf{y}_{1:k}] = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k(i) x_k^1(i)$$

L'algorithme particulière présenté ici est le plus simple possible. D'autres versions plus élaborées existent et ont été testées, sans que le peu d'amélioration apportée pour l'excès de complexité introduit ne justifie leur utilisation. Les raffinements les plus nécessaires concernent le rééchantillonnage. La probabilité discrète définie par les poids des particules peut être vue comme une approximation d'une densité continue suivant laquelle il faut tirer au hasard des particules. L'approximation est donc très pauvre. Pour améliorer le tirage, des estimations à noyau peuvent être utilisées [8]. Ceci peut être réalisé en

ajoutant à la variable générée à partir des poids une perturbation aléatoire suivant la densité définie par le noyau utilisé. Cette approche est particulièrement importante pour le paramètre constant  $\varepsilon$ , puisque le modèle d'état  $\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1}$  est figé dès les conditions initiales, et ne permet pas de scruter tout l'espace. Perturber aléatoirement les trajectoires permet de balayer l'espace d'état. Nous ajoutons donc sur  $\varepsilon$  une perturbation gaussienne de variance  $1/N$  après chaque rééchantillonnage. Notons enfin la présence d'un seuil prédéfini  $\eta$  qui n'a pas grande importance sinon que : si  $\eta$  est trop grand le rééchantillonnage est trop fréquent et provoque une très grande complexité pour un gain en performances non significatif ; si  $\eta$  est trop faible, les performances sont mauvaises. Typiquement, nous choisissons  $\eta = 0.5 \log_2 N$ .

### 3 Analyse des performances

**EQM asymptotique** Les performances asymptotiques des boucles sont difficiles à obtenir étant donné le caractère non linéaire des algorithmes. Elles sont connues dans le cas des boucles d'ordre 1 [11] mais à notre connaissance, elles n'ont pas été étudiées à l'ordre 2. En considérant l'approximation des petites erreurs, valable après convergence et en supposant les bruits de dynamique et d'observation pas trop puissants, une linéarisation peut être effectuée et permet de mener des calculs. Les détails de ce calcul fastidieux sont présentés dans [9], et nous résumons ici les principales conclusions.

On montre facilement que les deux boucles convergent en moyenne, et ce pour un large domaine des pas d'adaptation  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . L'évaluation de l'erreur quadratique moyenne (EQM) asymptotique en fonction de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est fastidieuse et nécessite l'utilisation du calcul symbolique. La première conclusion obtenue est qu'à  $\gamma_1$  fixé, l'EQM est minimale lorsque  $\gamma_2$  tend vers zéro. Ce résultat est logique puisque  $\gamma_2$  est le pas d'un algorithme qui estime un paramètre constant. Deuxièmement, à  $\gamma_2$  fixé, on montre que l'EQM est minimale pour une valeur  $\gamma_1^*$  non nulle du pas  $\gamma_1$ . En particulier, on montre pour  $\gamma_2 \rightarrow 0$  que

$$\gamma_{1,remod}^* = \frac{-\sigma_w^2 + \sigma_w \sqrt{\sigma_w^2(1-2\phi)^2 + 2\phi^2\sigma_n^2}}{2\sigma_w^2(\phi-1) + \phi\sigma_n^2}$$

$$\gamma_{1,costas}^* = \frac{-\sigma_w^2 + \sigma_w \sqrt{\sigma_w^2 + 2\sigma_n^2 + \sigma_n^4}}{2\sigma_n^2 + \sigma_n^4}$$

où  $\phi = 2 \int_0^{1/\sigma_n} \exp(-u^2) du / \sqrt{\pi}$ . Dans la suite, les boucles sont utilisées avec ces valeurs de paramètres, de sorte que les EQM asymptotiques sont minimales.

La figure 1 montre l'EQM minimale asymptotique évaluée théoriquement (lignes hachées), numériquement (cercles et carrés) des boucles en fonction de la puissance du bruit d'observation. Nous montrons également sur cette figure la borne de Cramér-Rao du problème d'estimation (en utilisant les résultats de [10]). Outre le très bon comportement des boucles, on remarque que les hypothèses de petites erreurs donnent des calculs précis pour une plage large de puissance de bruit d'observation, essentiellement dans le cas de la boucle à remodulation. Dans le cas de

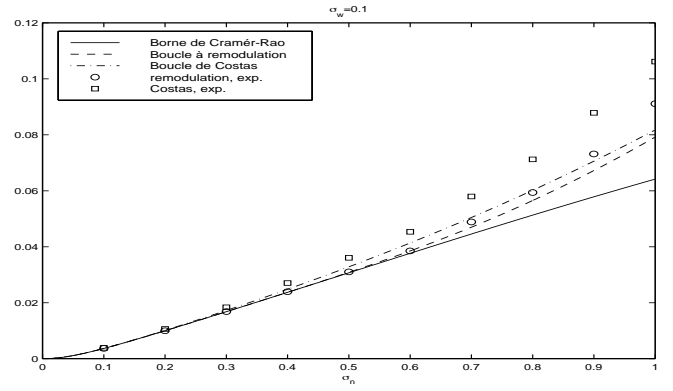


FIG. 1: Erreur quadratique moyenne asymptotique des boucles et borne de Cramér-Rao pour la phase. Les ronds et carrés correspondent à une évaluation expérimentale des performances.

la boucle de Costas, les linéarisations effectuées deviennent mauvaises dès  $\sigma_n = 0.4$  ou  $0.5$ . Le dernier point à noter est la supériorité de la boucle à remodulation qui sera la seule considérée dans la suite. La figure 2 montre l'erreur quadratique moyenne asymptotique calculée expérimentalement pour la boucle à remodulation et pour le filtre particulière (100 et 500 particules). Cette figure montre que les configurations « optimales » des boucles sont équivalentes asymptotiquement au filtre optimal.

**Accrochage** La deuxième étape dans l'étude des performances des algorithmes consiste en l'analyse de la période transitoire ou phase d'accrochage. L'étude théorique de la convergence des boucles est difficile car l'ODE associée [2] est bi-dimensionnelle et non linéaire. Nous avons donc eu recours aux simulations pour analyser la phase de convergence.

La grandeur étudiée est le temps d'accrochage, défini comme étant l'instant auquel l'algorithme entre dans un intervalle autour de la solution et y reste. La largeur de l'intervalle choisi dans les simulations est de 5%. Nous calculons ce temps d'accrochage pour 2000 réalisations et effectuons un histogramme. Ce calcul est fait pour  $\sigma_w = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.5$  et pour deux valeurs de la puissance du bruit d'observation :  $\sigma_n = 0.5$  et  $\sigma_n = 1$ . Les résultats apparaissent figure (3) et montrent la très nette supériorité du

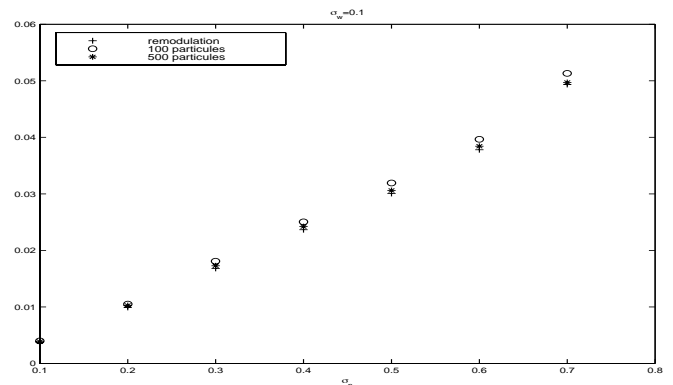


FIG. 2: Erreur quadratique moyenne asymptotique de la boucle à remodulation et du filtre particulière.

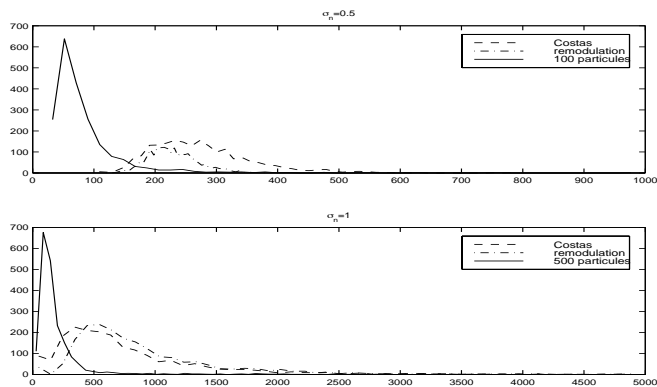


FIG. 3: Histogramme des temps d'accrochage, pour deux valeurs de la puissance du bruit d'observation.

filtre particulaire sur les boucles. Les temps de convergence sont beaucoup plus faibles dans le cas du filtre particulaire. Ceci n'est pas surprenant. En effet, les boucles sont optimisées de sorte à minimiser l'erreur quadratique moyenne asymptotique. Or, les algorithmes adaptatifs à pas constants souffrent tous de l'antagonisme entre vitesse de convergence et puissance de l'erreur à convergence. Cet antagonisme n'existe pas pour le filtre optimal, qui lui optimise conjointement le transitoire et l'asymptotique.

**Des boucles en parallèle . . .** Une autre façon de voir la supériorité du filtre optimal est de considérer chaque particule de l'implantation particulaire comme un algorithme adaptatif issu de conditions initiales différentes. Les particules scrutent l'espace d'état (prédiction et correction) et communiquent entre elles (rééchantillonnage). Initialement très dispersées, les particules se regroupent très rapidement autour de la trajectoire cherchée. Cet effet coopératif est absent dans les boucles. On peut toutefois utiliser l'analyse précédente pour définir une stratégie « multi-agents » utilisant des boucles en parallèle issues de conditions initiales différentes.

Chacune des boucles porte également sa vraisemblance de sorte qu'à chaque instant, la boucle la plus vraisemblable est sélectionnée. Cette stratégie proche du particulaire conduit à des temps d'accrochage comparables à ceux du filtre optimal pour des nombres de boucles assez faibles. Ceci est illustré figure 4, où 10 boucles en parallèle avec sélection de la plus vraisemblable font aussi bien que le particulaire et bien mieux qu'une seule boucle : accrochage plus rapide et moins de changement de détermination.

**Pour terminer** Le dernier point concernant l'analyse des performances est l'étude des glissements de cycles. Le paramètre à estimer est une phase définie *modulo*  $2\pi/k$ ,  $k$  étant le nombre d'états de la modulation numérique utilisée. Un glissement de cycle correspond à un saut de l'algorithme d'une détermination de la phase à une autre. Ces glissements ont des conséquences désastreuses sur les récepteurs (à 2 états, un glissement de  $\pi$  transforme  $\pm 1$  en  $\mp 1$ ). Nous n'avons pas étudié numériquement les probabilités d'occurrence de glissement de cycle, ces probabilités demandant des temps de calcul prohibitifs pour être correctement estimées. Toutefois, l'expérience montre que le filtre particulaire est beaucoup plus robuste que les boucles en ce qui concerne les glissements de cycle.

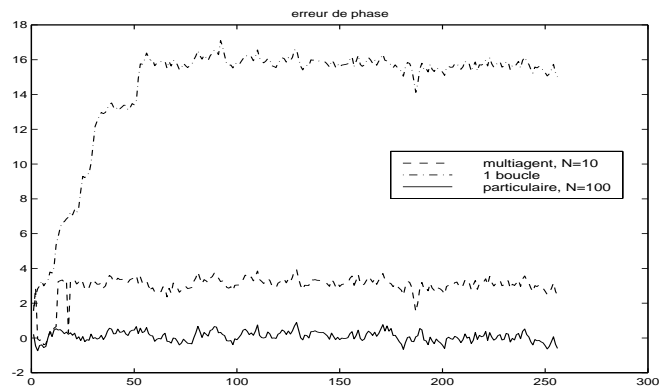


FIG. 4: Erreur de phase du particulaire, de l'algorithme multi-agents et de la boucle à remodulation ( $\sigma_n = 0.5$ ,  $\sigma_w = 0.2$  et  $\varepsilon = 0.5$ ).

Pour terminer, mentionnons les pistes futures qui concernent l'introduction de ruptures dans le modèle. L'apparition de rupture peut être facilement prise en compte dans l'algorithme particulaire en utilisant des processus ponctuels de Poisson par exemple. Cette prise en compte est plus difficile en ce qui concerne les algorithmes adaptatifs et nécessite le couplage avec des algorithmes de détection séquentielle de rupture sur les termes d'erreur par exemple.

## Références

- [1] J.M. BROSSIER, Signal et communications numériques. Egalisation et synchronisation, Hermès, 1997.
- [2] A. BENVENISTE, M. METIVIER, R. PRIOURET, Adaptive algorithms and stochastic approximations, Springer Verlag, 1990.
- [3] A. JAZWINSKI, Stochastic processes and filtering theory, Academic Press, 1970.
- [4] N. GORDON, D. SALMOND, A. SMITH, Novel approach to nonlinear/nonGaussian Bayesian state estimation, IEE-proceedings F 140 (2) (1993) 107–113.
- [5] P. D. MORAL, J. NOYER, G. RIGAL, G. SALUT, Résolution particulaire et traitement non-linéaire du signal: Applications radar/sonar, Traitement du Signal 12 (4) (1995) 287–301.
- [6] A. DOUCET, S. GODSILL, C. ANDRIEU, On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering, Statist. Comp. (10) (2000) 197–208.
- [7] A. DOUCET, N. D. FREITAS, N. GORDON, Sequential Monte-Carlo methods in practice, Springer, 2001.
- [8] C. MUSSO, N. OUDJANE, F. L. GLAND, Improving regularised particle filters, in [7], Ch. 12.
- [9] P. O. AMBLARD, J.M. BROSSIER, E. MOISAN, Phase tracking: what do we gain from optimality. Particle filtering *versus* phase-locked loops, submitted to Signal Processing, March 2001.
- [10] P. TICHAVSKY, C. MURAVCHIK, A. NEHORAI, Posterior Cramér-Rao bounds for discrete time nonlinear filtering, IEEE Trans. on SP 46 (5) (1998) 1386–1396.
- [11] A. BENVENISTE, M. JOINDOT, P. VANDAMME, Analyse théorique des boucles de phase numériques en présence de canaux dispersifs, Tech. rep., NT/MER/TSF/1, CNET Lannion (1980).