Le Methode Non Markovian Dans l`analyse Statistique des Problemes de Quelques Systemes Non Lineaires.

Vladimir KAZAKOV

Ecole d'Ingénerie Mecanique et Electrique de
L' Institut Politecnique du Mexique, Departement de Telecomunications
Ave. Institut Politecnique edif 1 Zacatenco.
C.P. 07738, D.F. México.
Tel. (525)729-60-00, ext. 54-904.
Fax (525)75-41-280
e-mail: vkazakov41@hotmail.com

Résumé- L' application des équations cinétiques de l'auteur du procès non Markovian pour quelques problèmes d' analyse statistique non linéaires sont considerés. On a investigué deux types d'effets non-linéaires non simples. Le première est le systeme dynamique non linéaire influencé par le procès binaire Markovian. La deuxième est celle de quelques systèmes qui ont une aire de fonctionament restrictif. Cette aire est determinée par quelques limites specifiques. Le principal avantage de cette méthode c' est la réduction de la dimension du problème dans tous les problèmes d' analyse statistique en comparaison avec la méthode Markovian.

Abstract- The applicaton of the author´s kinetic equations for non-Markovian processes for some non-linear statistical analysis problems are considered. Two types of notrivial non-linear effects are investigated. The first is the non-linear dynamic system driven by the Markovian binary process. The second is the systems having some restricted area of the functioning. This area is determined by some deterministic bounds.the main advantage of this method is the reduction of the problem dimension in all statistical analysis problems with the compareson of the Markovian approach.

I.- Introduction. Formalisme espace-état de la méthode Markovian

La méthode Markovian est toujours asociée avec le formalisme appelé *espace-état* dans la description des systèmes et des procès continus aléatoires [7].

Les idées principales de cette description sont :

a) Aucun proces Markovian continu uni-dimensionnel $x(t)$ est formé par un système dinamique du premier ordre influencé par le bruit blanc $n(t)$. Ce système est décrit par l' equation aléatoire différenciel du premier ordre

$$\dot{x} = f(x) + g(x)n(t) \qquad (1)$$

ou $f(x), g(x)$ sont des fonctions non-aléatoires.

La fonction de densité de probabilité conditionele (pfd) $w(x,t \mid x_0,t_0)$ (ici x_0,t_0 sont des conditions initielles) du procès de sortie $x(t)$ est determinée par l'équation *uni-dimensionnèlle* Fokker-Plank-Kolmogorof (FPK) avec les coéficients cinétiques $K_i(x,t); (i=1,2)$ determiné par l'équation numero (1).

b) Quand le système dinamique est décrit par une équation differentielle de l'ordre *n-th*, a ce moment là le procès de sortie n'est pas Markovian uni-dimensionnel. Cette équation differentielle est representée par un système des *n* équations differentielles du premier ordre. Toutes les variables inconnues de ce systeme forment un procès Markovian vectoriel *n-dimensionnel* $\mathrm{x}(t)$. C'est pour ça qu'au lieu d'avoir une seule variable inconnue on a *n* variables. Celui-ci c'est le plus important dans *le formalisme espace-état.* Le procès de sortie $x(t)$ c'est un des n composants du procès $\mathrm{x}(t)$.

Le procès Markovian vectoriel $\mathrm{x}(t)$ est décrit par l'équation *multidimensionnèlle* FPK par rapport au pdf conditionnel $w(\mathrm{x},t \mid \mathrm{x}_0,t_0)$

$$\frac{\partial w(\mathrm{x},t \mid \mathrm{x}_0,t_0)}{\partial t} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} K_i(\mathrm{x},t) w(\mathrm{x},t \mid \mathrm{x}_0,t_0) + $$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} K_{ij}(\mathrm{x},t) w(\mathrm{x},t \mid \mathrm{x}_0,t_0) \qquad (2)$$

ou les coéficients cinétiques $K_i(\mathrm{x},t)$ et $K_{ij}(\mathrm{x},t)$ sont determinés par les formules :

$$K_i(\mathrm{x},t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)\left\langle \left[x(\hat{t}+\Delta t) - x(t)\right] \,\middle|\, \mathrm{x}(t)\right\rangle \qquad (3)$$

$$K_{ij}(\mathrm{x},t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)\times$$

$$\times\left\langle \left[x_i(\hat{t}+\Delta t) - x_i(t)\right]\left[x_j(\hat{t}+\Delta t) - x_j(t)\right] \,\middle|\, \mathrm{x}(t)\right\rangle \qquad (4)$$

L'accroissement dans les formules (3) et (4) peuvent se trouver en se baisant dans le système mentioné ci-dessus des équations differentièlles du premier ordre.

Quand l'ordre du système dinamique *n* augmente, a ce moment là l'ordre de l'équation classique cinétique (2) change aussi. Géneralement, il est très difficile d'avoir une solution analytique pour l'équation multidimensionnèlle FPK (2), par example, pour trouver $w(\mathsf{x},t\,|\,\mathsf{x}_0,t_0)$ pour une $n \geq 3$ arbitraire. Si on obtient pdf $w(\mathsf{x},t\,|\,\mathsf{x}_0,t_0)$, alors on peut trouver le pdf $w(x,t\,|\,x_0,t_0)$ uni-dimensionnel ou $w(x,t)$ du procès de sortie, en utilisant l'équation de concordance. Dans le cas ou l'on considère les problèmes de limite, il faut formuler quelques conditions de limite pour chaque composant du procès Markovian multidimensionnel $\mathsf{x}(t)$. La solution a ce type de problèmes se tourne plus difficile chaque fois.

2. Equations cinètiques pour le proces non-Markovian.

Les coeficients cinétiques considerés dans l'équation classique FPK peuvent etre representés par une méthode nouvelle (1). Le nouveau group d'équations cinétiques pour le procès aléatoire *non-Markovian* a eté trouvé dans [2]. Cettes équations ont les nouveaux coéficients cinétiques et ils donnent nouvelles possibilitées d'investigation des problèmes d'analyse statistique. Cettes équations cinétiques decrivent l'evolution de quelques pdf et quelques moments et fonctions cumulantes des procès non-Markovian. La principale équation cinétique du [2] a une estructure comme celle de l'équation classique FPK, mais il y a deux differences importantes: i) A gauche se trouve la deuxième derivée par rapport au temps; ii) les coeficients cinétiques sont determinés *par d'autres expressions*. Ici se trouve la variante multidimensionelle de cette équation cinétique en relation au pdf conditionel $w(\mathsf{x},t\,|\,\mathrm{X,T})$:

$$\frac{\partial^2 w(\mathsf{x},t\,|\,\mathrm{X,T})}{\partial t^2} = \sum_{n_1}\cdots\sum_{n_M} \frac{(-1)^{n_1+\ldots+n_M}}{n_1!\ldots n_M!} \times$$
$$\times \frac{\partial^{n_1+\ldots n_M}}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_M^{n_M}} B^{(1\ldots M)}_{n_1\ldots n_M}(\mathsf{x},t,\mathrm{X,T})\,w(\mathsf{x},t\,|\,\mathrm{X,T}) \qquad (5)$$

ou les coéficients cinétiques sont determinés par l'expression suivante:

$$B^{(1\ldots M)}_{n_1\ldots n_M}(\mathsf{x},t,\mathrm{X,T}) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2}\,\tilde{\alpha}^{(1\ldots M)}_{n_1+\ldots+n_M}(\hat{t}\,|\,\mathsf{x},t;\mathrm{X,T})\Big|_{\hat{t}=t} \qquad (6)$$

ou $\mathrm{X,T}$ c'est un ensemble arbitraire de variables fixées du procès $\mathsf{x}(t)$ et ses temps ou ils ont lieu ; $\tilde{\alpha}^{(1\ldots M)}_{n_1+\ldots+n_M}(\hat{t}\,|\,\mathsf{x},t;\mathrm{X,T})$ est la fonction du moment conditionel de l'ordre $(n_1+\ldots+n_M)-th$ de l'augmentation du procès aléatoire $\mathsf{x}(t)$ pendent le temps, $\hat{t}-t$ ou les variables $\mathsf{x},t,\mathrm{X,T}$ se fixent. La présence de l'ensemble $\mathrm{X,T}$ dans les formules (5) et (6) signifie que le procès $\mathsf{x}(t)$ est non-Markovian. Quelques nouvelles applications de l'équation (5) pour le problème lineal d'analyse statistique sont donnés en [4]-[7].

3. Probleme non-lineal du premier type.

Laissez-nous considérer le système dinamique décrit par l'equation (1). Mais au lieu du bruit blanc, nous avons le procès Markovian binaire asymétrique $z(t)$ avec les états $z_1 = 1, z_2 = -1$ et avec deux intensitées des fluxes de Poisson λ_1,λ_2. Dans la méthode Markovian classique, le procès de sortie $x(t)$ sera representée par le procès Markovian bi-dimensionnel $\mathsf{x}(t) = \{z(t),x(t)\}$. On peut voir qu'un composant de ce procès est discret et l'autre composant est continu. Alors, pour avoir la (pdf) de sortie $w(x,t)$, il faut résoudre l'équation FPK *bi-dimensionnelle discrete continue* type (2). Comme résultat nous aurons le pdf bi-dimensionnel $w(\mathsf{x},t)$. Après ça, en utilisant la condition de concordance, on peut avoir la pdf uni-dimensionnelle $w(x,t)$ nécessaire pour le procès de sortie. Il est possible d'avoir ce procès dans le cas stationnaire [8] L'application de l'équation cinétique (5), donne la possibilité d'avoir le même résultat sans considerer le procès de deux dimensions. Il suffit d'utiliser une variante dimensionnelle de l'équation cinétique (5) :

$$\frac{\partial^2 w(x,t\,|\,\mathbf{X,T})}{\partial t^2} = \frac{-\partial}{\partial x} B_1(x,t,\mathbf{X,T})\,w(x,t\,|\,\mathbf{X,T}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_2(x,t,\mathbf{X,T})\,w(x,t\,|\,\mathbf{X,T}), \qquad (7)$$

ou $B_n(x,t,\mathbf{X,T}), n = 1,2$ sont les coéficients cinétiques determinés par la formule

$$B_n(x,t,\mathbf{X,T}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\alpha}_n(\hat{t}\,|\,x,t;\mathrm{X,T})\Big|_{\hat{t}=t} \quad n=1,2 \qquad (8)$$

et $\mathrm{X,T}$ est un ensemble arbitraire de variables fixes du procès $x(t)$ et de ses temps quand ils se presentent; $\tilde{\alpha}_n(\hat{t}\,|\,x,t;\mathrm{X,T})$ c'est la fonction du moment de l'ordre *n-th* de l'augmentation du procès aléatoire pendant le temps $\hat{t}-t$ quand les variables $x,t,\mathrm{X,T}$ se fixent. Dans le cas d'ètat permanent, les expressions (7) et (8) seront simplifiées:

$$0 = \frac{-\partial}{\partial x} B_1(x)w(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_2(x)w(x), \qquad (9)$$

$$B_n(x) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\tilde{\alpha}_n(\tau\,|\,x)\Big|_{\tau=0} \;;\; n=1,2 \qquad (10)$$

La solution de l'équation (9) est connue:

$$w(x) = \frac{const}{B_2(x)} exp\left\{2\int_{x_1}^{x} \frac{B_1(x')dx'}{B_2(x')}\right\}. \qquad (11)$$

Les coéficients cinétiques pour l'équation

$$\dot{x} = f(x) + gz(t) \qquad (12)$$

se trouvent a [5] :

$$B_1(x) = -\gamma\left[f(x) + m_x g\right] \qquad (13)$$

$$B_2(x) = 2\left[g^2 - f^2(x)\right] \tag{14}$$

En remplaçant (13) et (14) dans (11), trouverons le résultat final

$$w(x) = \frac{const}{g2 - f2(x)} \times$$

$$\times exp\left\{ -\lambda_1 \int_{x_1}^{x} \frac{dx'}{f(x') - g} - \lambda_2 \int_{x_1}^{x} \frac{dx'}{f(x') + g} \right\}. \tag{15}$$

Cette consideration montre la réduction de la dimension dans l’analyse statistique des systèmes non-linéaires.

4. Probleme non - linéaire du deuxième type

Maintenant nous allons considerer un autre aspect des problèmes non - lineaires. Celui-ci c’est le problème de l’atteinte de frontières par les procès continus non-Markovian.

En effet, normalement ces problèmes *non-lineaires* ont été résolus par l’équation multidimensionnèlle classique FPK (2) baisé dans le formalisme espace-état (voyez par example [9]). Dans ce cas là, il est nécessaire de considérer tous les composants du procès Markovian multidimensionnel et de formuler des conditions de limite pour chaque un d’eux. On trouve des difficultés quand on utilise l’équation FPK pour resoudre des problemes pour atteindre les frontières au moins pour deux raisons :

1) La complexité d’une solution numérique augmente dramatiquement quand le numero de dimensions du model de Markov augmente ; 2) Il y a des procès dans lesquels il est difficile de choisir des models de Markov (par example; procès avec un spectrum limité abruptement).

L’équation cinétique (5) fait possible d’eliminer ces difficultées pour résoudre les problèmes d’atteindre de frontières. La dimension de l’équation cinétique (5) pour n’importe quel procès continu differentiel est *deux*, parce qu’il suffit d’analyser l’équation au respect du pdf du *procès bi-dimensionnel* $\mathrm{X}(t)$ formé par le composant principal $x(t)$ ensemble avec son derivé $\dot{x}(t)$.

Dans le procès $\mathrm{X}(t)$, on y fixe un group de points $\mathrm{X},\mathrm{T} = \left\{ x_o, \dot{x}_o, t; x_1, \dot{x}_1, t; \ldots; x_r, \dot{x}_r, t \right\}$, qui caracterisent les conditions initiels et réflect la presence d’effets posterieurs dans le procès. Alors, d’accord avec (5), la fonction de densité conditionnelle $w(\mathrm{x}, t \mid \mathrm{X},\mathrm{T}) = w\left(x, \dot{x}, t \mid \mathrm{X},\mathrm{T} \right)$ obeit a l’équation cinétique :

$$\frac{\partial^2 w\left(x, \dot{x}, t \mid \mathrm{X},\mathrm{T} \right)}{\partial t^2} = \sum_{n=0} \sum_{M=0} \frac{(-1)^{n+m}}{n!\, m!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial \dot{x}^M} B_{nm}(x, \dot{x}, t, \mathrm{X},\mathrm{T}) w(x, \dot{x}, t \mid \mathrm{X},\mathrm{T}) \tag{16}$$

ou

$$B_{nm}(x, \dot{x}, t, \mathrm{X},\mathrm{T}) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2} \tilde{\alpha}_{nm}(\hat{t} \mid x, \dot{x}, t; \mathrm{X},\mathrm{T}) \Big|_{\hat{t} = t} \right) \tag{17}$$

$$\tilde{\alpha}_{nm}(\hat{t} \mid x, \dot{x}, t; \mathrm{X},\mathrm{T}) =$$

$$= \left\langle \left[x(\hat{t}) - x(t) \right]^n \left[\dot{x}(\hat{t}) - \dot{x}(t) \right]^m \Big| x, \dot{x}, t; \mathrm{X},\mathrm{T} \right\rangle, \tag{18}$$

ici, les parenthèses anguleux signifient la moyenne statistique. Pour résoudre le problème quand on atteint de frontières, il est nécessaire d’especifier les conditions initièlles et de frontière. Les conditions initièlles sont determinées par l’ensemble X,T. Il faut considérer le domaine des realisations du procès $x(t)$ est limité par des curves $g_1(t)$ et $g_2(t)$ pour quiconque t. D’accord avec [10], les conditions de frontière dans ces problèmes ont le signifiant physique d’assurer l’accomplissement du principe suivante: Les chemins du procès peuvent atteindre et échaper les frontières mais on en peut pas y retourner. Dans l’application de notre cas, cette condition s’écrit dans la forme suivante:

$$w\left[x(t) = g_1(t); \dot{x}(t) < \dot{g}_1(t) \mid \mathrm{X},\mathrm{T} \right] =$$

$$= w\left[x(t) = g_2(t); \dot{x}(t) > \dot{g}_2(t) \mid \mathrm{X},\mathrm{T} \right] = 0. \tag{19}$$

Nous proposons réchercher le procès Gaussian non-Markovian avec une espoire mathematique connu $\langle x(t) \rangle$ et la fonction de corrélation $R(t_1, t_2)$. Dans ce cas, il est possible de déterminer les coeficients cinetiques (17) baisés dans (18) et les expressions pour la moyenne mathematique conditionnelle et les fonctions de corrélation [10]. On établi un valeur initiel de la coordinée $\mathrm{X},\mathrm{T} = x_o, t_o$. Et de la distribution initièlle pour la derivée $\dot{x}, t_0$, to avec la variance $-R''(0)$ sont connues. En suivante [8] on peut montrer que les coéficients cinétiques d’ordre supérieur B_{nm} , $n+m > 3$ sont dégenerés pour les procès differentielles Gaussian non-Markovian.

5. Example

Maintenant nous allons considerer le procès differentiel Gaussian non-Markovian avec la fonction de corrélation.

$$R(\tau) = \sigma^2 \left[1 + \alpha \mid \tau \mid + (1/3)(\alpha\tau)^2 \right] \times$$

$$\times exp(-\alpha \mid \tau \mid) \tag{20}$$

Tel procès alléatoire est generé dans la sortie des trois circuits integrantes *RC* avec le paramètre α et le bruit blanc dans l'entrée. En utilisant les equations (17), (18) et (20), on peut calculer des coéficients cinétiques B_{10}, B_{01}, B_{20}, B_{02}, et B_{11} qui dependent du temps. Nous n'allons pas donner ici les expressions analytiques pour les coéficients cinétiques. L'équation cinétique (16) a été résolue a l'ordinateur pour les conditions initielles et de frontière $x_0 = -2, t_0 = 0, g_2(t) = 1, g_1(t) = \infty, (\alpha = 1)$. La solution conduit a la fonction de densitée non normalisée $w(x,t \mid x_0, t_0) = \int w(x, \dot{x}, t \mid x_0, t_0) d\dot{x}$, laquelle est utilisée pour determiner la probabilité d'atteindre la frontière

$$P(t) = 1 - \int_{-\infty}^{1} w(x,t \mid x_0, t_0) dx$$

Cette fonction et quelques resultats de la simulation statistique sont donnés dans le tableau 1. (Les calculs ont été faits par S.A. Afrikanov [3]).

Tab. 1

t	2	3	4	5	6
$P_{theor}(t)$	0.007	0.028	0.074	0.148	0.221
$P_{simul}(t)$	0.009	0.031	0.078	0.142	0.215

Dans la description Markovian, le procès avec la fonction de corréelation (20) c'est un composant du procès de Markov *tri-dimensionnel* et dans ce cas, on a besoin de résoudre l'équation FPK tri-dimensionnélle.

6. Conclusions

La consideration donnée aux deux problèmes d'analyse statistique montre que l'application des équations cinetiques pour les procès non-Markovian, réduit la dimension du problème:

References

[1] V:A: Kazakov, Coéficients cinétiques dans les équations directes pour les procès non-differentielles avec un effet posterieur Radiophysique et Quantum Electronics, vol. 29, No. 11, pp. 1012-1020, Novembre, 1986.

[2] V.A. Kazakov, équations cinétiques pour les fonctions de densité probable des procès non-Markovian. Evolution du moment et des fonctions accumulatives. Radio-Physiques et Quantum Electonics, vol. 30, No. 11, pp. 890-968, Novembre, 1987.

[3] V.A. Kazakov, S.A. Afrikanov, " En arrivant aux limites par différents procès non-Markovian", Radio-Physiques et Quantum Electronics, vol. 33, No. 11, pp. 890-893, Novembre, 1990.

[4] V.A. Kazakov, "Analyse statistique des systèmes dynamiques linéaires influencés par le bruit binaire Markovian dans la base des équations cinétiques pour le procès non-Markovian." Procès de Signal . Vol. 76, No. 3. Pp.167-180, 1999.

[5] V.A. Kazakov, "Équations cinétiques uni-dimensionnèlles pour le procès non-Markovian et les problèmes d'analyse statistique influencés par le procès binaire Markovian assimetrique." Proces de Signal. Vol. 79, No. 1, pp. 87-95, 1999.

[6] V.A. Kazakov, Méthode non-Markovian dans les problèmes d'analyse statistique des filtres multidimensionnels. 2000 IEEE Symposium International de Procès de Signal Intelligent et des Systèmes de Communication. Procès ISPACS 2000, Vol. II, pp. 754-759. Honolulu, USA, Nov. , 2000.

[7] V.A. Kazakov, R. Hernandez, Analyse Statistique de filtres multidimensionnels, influencés par des bruits non blancs, non-Gaussians. X Conférence Européen de Proces de Signal. CD-, Procedés EUSIPCO 2000, Tampere, Finland, Sept., 2000.

[8] M.A. Mironov, Conversion non-linéaire d'une signe télégraphique alléatoire, vol. 31, No 7, pp. 95-96, 1980.

[9] H. Risken, L'équation Fokker-Planck, Deuxième Edition, Springer Verlag, 1989.

[10] R.L. Stratanovich, Thèmes dans la théorie du bruit alléatoire, v.1, New York: Gordon et Breach, 1963.