

SYNTHESE DE SIGNAUX EN 1/f AVEC CONTROLE DE LA PRECISION SPECTRALE

Michel GUGLIELMI
Membre du GDR ISIS

Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de NANTES UMR 6597
1 Rue de la Noë 44321 NANTES Cedex 03,
Téléphone : 02 40 37 69 32 , Fax : 02 40 37 69 30

Mel : Michel.Guglielmi@ircsyn.ec-nantes.fr

Résumé : L'article proposé ici concerne la modélisation et la synthèse de signaux de densité spectrale en $1/f$ à partir d'une cascade de cellules élémentaires passives. L'obtention d'une densité parfaite nécessite une infinité de cellules RC identiques. La limitation à un nombre fini conduit à une synthèse imparfaite. On propose ici une solution qui permet de contrôler la précision du résultat de la synthèse. Le passage de la représentation fréquentielle à la représentation temporelle permet la synthèse récurrente du signal.

Abstract : This paper deals with the modeling of $1/f$ signals. It is well-known that a linear infinite line of identical RC cells can generate such signals. For a finite number of cells, the spectrum is not perfect. Here, we propose a solution which approaches the exact solution with a fixed precision. From the transfer function, it is possible to get the synthesised signal.

1. Introduction :

Une des voies de recherche en traitement du signal consiste à élaborer des modèles aptes à représenter les signaux observés. En ce sens, les modèles MA, AR, ARMA à coefficients constants ont connu un grand succès du fait de leur capacité à caractériser une assez grande variété de comportements dynamiques de signaux. Leurs propriétés ont fait l'objet de nombreuses études et leur applications sont extrêmement variées. Pourtant ces modèles sont quelques fois inadaptés car ils ne rendent compte, par exemple, que de signaux à corrélation exponentiellement décroissante. Or, dans des domaines aussi variés que l'hydrologie [HUR 65], l'électronique [VAN 88], la musique [VOS 75] [VOS 78], le trafic routier [ROY 97], la mécanique des fluides [SCO 95] [ABR 97], les réseaux de télécommunication [WIL 95] [RIE 97], ... il existe de nombreuses situations qui engendrent des comportements n'obéissant pas à ces modèles aussi simples. Cette liste n'est pas exhaustive, et la littérature sur le sujet est très vaste.

Il existe, entre autres, une classe de signaux exhibant un comportement « longue mémoire » dont l'étude justifie de nouveaux modèles. La recherche de modèles dynamiques aptes à engendrer ces signaux a suivi plusieurs voies. Certains de ces modèles sont à dimension finie, d'autres à dimension infinie, à coefficients constants ou non. Parmi eux, on peut noter plus particulièrement celui issu de l'équation différentielle de Langevin [KOY 93], dans lequel le signal à mémoire longue est obtenu par sommation d'un nombre infini de grandeurs correspondantes à des sorties de systèmes linéaires du premier ordre dont les coefficients obéissent à une loi de récursivité. Dans [CAR] et [MAG 97] il s'agit de construire un modèle différentiel correspondant au signal de Barnes et Allan défini, au départ, par sa forme

intégrale. D'autres modèles [YAS 97] [GUG 01] utilisent un système linéaire non stationnaire (coefficients en puissance de t). Enfin, les modèles dynamiques d'état utilisant l'algèbre $(Max,+)$ sont aptes à engendrer des signaux en $1/f$ [CHA 99]. Tous ces modèles ont en commun d'être le résultat d'agrégation de cellules élémentaires du 1^{er} ordre du type AR (Barnes Allan, Langevin) ou ARMA (Euler-Cauchy généralisée), les paramètres des cellules de base étant constants (Langevin) ou variables (Barnes Allan, Euler-Cauchy généralisée).

Pour [KES 82] et [OUS 93], la mise en cascade d'une infinité de cellules du premier ordre à coefficients constants produit un signal ayant cette propriété. Cependant, en pratique, la réduction à un nombre fini de cellules ne conduit plus qu'à un comportement « approximativement » en $1/f$. En outre, la bande de fréquences pour laquelle cette approximation est valable, est elle-même limitée. Si ce procédé de synthèse est simple et utilisé dans certains contextes, il présente plusieurs inconvénients dont le principal réside dans l'absence de contrôle de la précision obtenue sur la densité spectrale (par rapport à la valeur théorique). En effet, la précision du comportement spectral du circuit qu'il implique, en pratique, le nombre forcément fini de cellules ne peut être pré-déterminé.

Conservant le principe de la modélisation par un réseau de cellules passives, la méthode décrite ici permet de définir le nombre de cellules et la valeur de leurs paramètres du réseau en fonction de la précision fréquentielle demandée et de la bande de fréquence considérée, ces deux grandeurs étant fournies par l'utilisateur.

L'article est décomposé de la façon suivante : après avoir rappelé les notions de base, les paramètres

caractéristiques de la synthèse (le nombre de cellules ainsi que leur paramètres) sont calculés. En utilisant l'approximation asymptotique de la réponse fréquentielle, le problème est résolu simplement. Le passage de la représentation fréquentielle à une représentation temporelle à temps continu est triviale. La discrétisation de ce dernier permet d'aboutir à une synthèse récurrente du signal.

2. Position du problème :

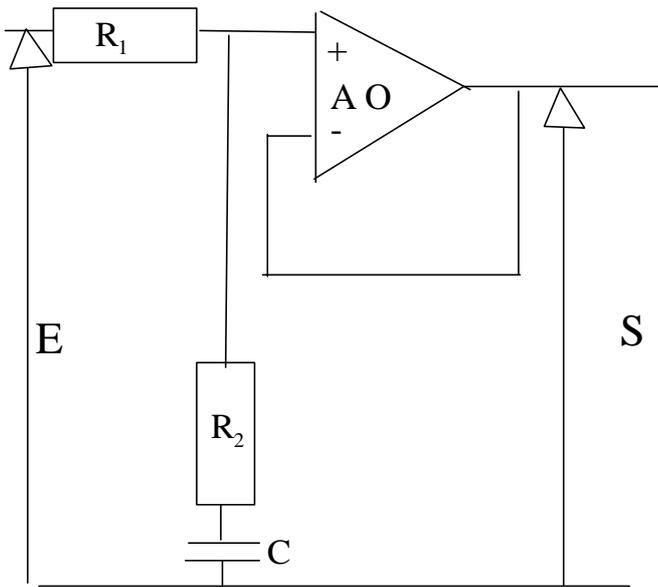
La densité spectrale de la sortie $y(t)$, excitée par une entrée $u(t)$ d'un filtre linéaire défini par sa fonction de transfert $H(j\mathbf{v})$ est donnée par :

$$Q_{yy}(\mathbf{v}) = |H(j\mathbf{v})|^2 Q_{uu}(\mathbf{v})$$

Si $u(t)$ est un bruit blanc de variance unité, on a :

$$Q_{yy}(\mathbf{v}) = |H(j\mathbf{v})|^2.$$

Considérons une cascade de cellules du premier ordre :



Il vient :

$$S = \frac{1 + jR_2C\omega}{1 + j(R_1 + R_2)C\omega} E$$

Soit une transmittance élémentaire $H_i(j\mathbf{v})$ de la forme :

$$H_i(j\mathbf{v}) = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_{i2}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{i1}}} \quad (1)$$

Pour N cellules découplées mises en série, on a :

$$H_N(j\mathbf{v}) = \prod_{i \in [1, N]} H_i(j\mathbf{v}) \quad (2)$$

On cherche donc une transmittance d'ordre N (non fixé *a priori*) qui satisfait :

$$\left| H_N(j\mathbf{v}) \right| - \left| \frac{1}{(j\mathbf{v})^g} \right| < e\sqrt{(1+g)^2} \quad \text{pour} \\ \mathbf{v} \in [\mathbf{v}_{\min}, \mathbf{v}_{\max}]$$

sous la contrainte structurelle (1).

N.B. : ceci conduit à une densité spectrale approchée de la forme $1/(j\mathbf{v})^{2g}$.

3. Résolution :

Le problème revient donc, en pratique, à rechercher N ainsi que l'ensemble couples $[\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}]$.

Pour simplifier les calculs, la réponse en gain de la transmittance $H_i(j\mathbf{v})$ est évaluée par son approximation asymptotique. Schématiquement, le problème est ramené à un résolution géométrique :

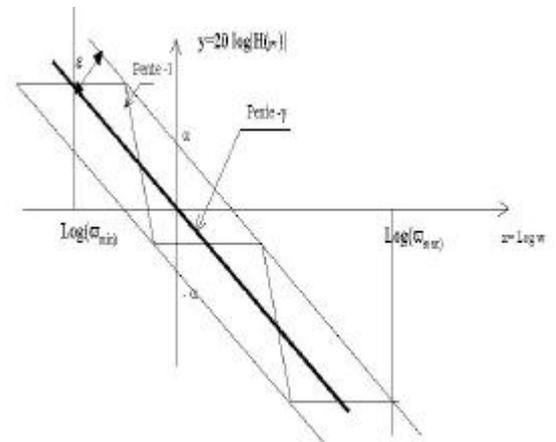


Figure 1 : Représentation géométrique

Il est possible d'obtenir, par récurrence, les coordonnées des points anguleux d'intersection entre le lieu asymptotique du réseau et les droites de pente $-g$ situées à une distance e de la droite de référence.

Soit, dans le plan logarithmique $(x = \log \mathbf{v}, y = 20 \log(|H(j\mathbf{v})|))$:

$$x_1 = x_{\min} \quad y_1 = -g x_{\min}$$

et pour $i \geq 0$

$$y_{2(i+1)} = y_{2i+1}$$

$$x_{2(i+1)} = (\mathbf{a} - y_{2i+1}) / \mathbf{g}$$

$$x_{2(i+1)+1} = (\mathbf{a} + x_{2(i+1)} + y_{2(i+1)}) / (1 - \mathbf{g})$$

$$y_{2(i+1)+1} = -(\mathbf{a} + \mathbf{g}x_{2(i+1)} + \mathbf{g}y_{2(i+1)}) / (1 - \mathbf{g})$$

jusqu'à : $x_{2(N+1)+1} \geq x_{\max}$

Ces expressions mettent en évidence plusieurs points :

- La répartition est linéaire dans le plan log-log
- le nombre de cellules est proportionnel au nombre de décades fixé par l'utilisateur

Exemple : Pour une valeur de $\mathbf{g} = 0.5$, $\mathbf{e} = 0.1$, sur une bande de pulsation de 10^{-2} à 10^{+2} , il faut 5 cellules (cf : figure 2)

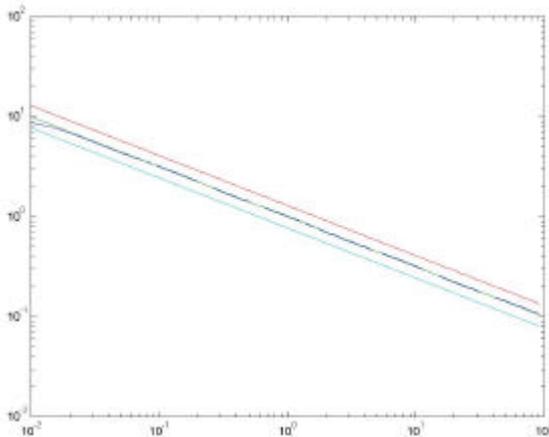


Figure 2 : Comparaison du comportement fréquentiel du réseau par rapport au comportement théorique

Remarque : L'approximation asymptotique (qui a servi au calcul) assure que le résultat réel est toujours « meilleur » : ceci est dû aux positions relatives du lieu réel par rapport au lieu asymptotique.

Le nombre de cellules dépend de la précision \mathbf{e} demandée. Leur nombre est une fonction non linéaire. A titre d'exemple, pour $\mathbf{g} = 0.5$ (qui est le cas le plus défavorable), le nombre de cellules varie de 3 pour $\mathbf{e} = 1$ à 45 pour $\mathbf{e} = 0.05$.

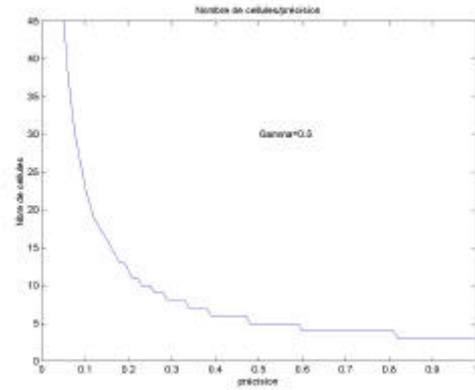


Figure 3 : Evolution du nombre de cellules N en fonction de la précision \mathbf{e} ($\mathbf{g} = 0.5$) (pour 4 décades).

Pour une précision \mathbf{e} donnée, le nombre de cellules nécessaire N varie fortement en fonction de \mathbf{g} (cf : figure 4 par exemple)

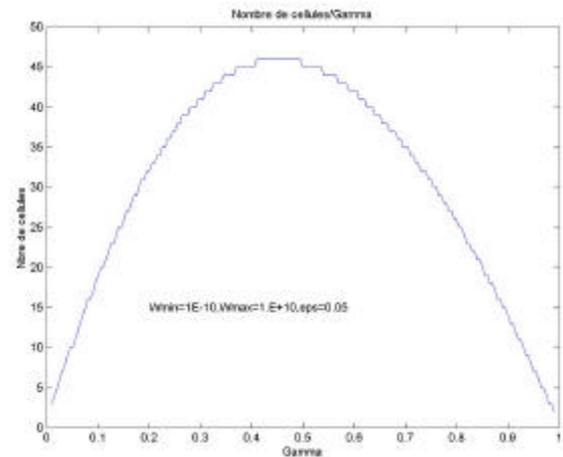


Figure 4 : Evolution du nombre de cellules N en fonction de \mathbf{g} . ($\mathbf{e} = 0.05$)

4. Synthèse :

La fonction de transfert continue étant obtenue, la synthèse d'un signal est obtenue à partir de la discrétisation de la transmittance :

$$H_N(s) \xrightarrow{T_e} \overline{H_N(z)}$$

Concernant l'exemple précédent, on obtient :

$$H_5(s) =$$

$$\frac{0.05031 s^5 + 10.22 s^4 + 234.7 s^3 + 676.3 s^2 + 244.6 s + 10}{0.8664 s^5 + 62.84 s^4 + 515.4 s^3 + 530.4 s^2 + 68.49 s + 1}$$

La période d'échantillonnage est fonction de l'intervalle $[\mathbf{v}_{\min}, \mathbf{v}_{\max}]$, ici $T_e = 0.01$

$$\overline{H_5(z)} =$$

$$\frac{0.09965 z^5 - 0.3921 z^4 + 0.5921 z^3 - 0.4195 z^2 + 0.133 z - 0.01307}{z^5 - 4.442 z^4 + 7.81 z^3 - 6.779 z^2 + 2.895 z - 0.4842}$$

5. Validation :

Enfin, la séquence $y(t)$ est obtenue comme la sortie de $\overline{H_5(z)}$ excitée par une séquence blanche centrée et de variance unité.

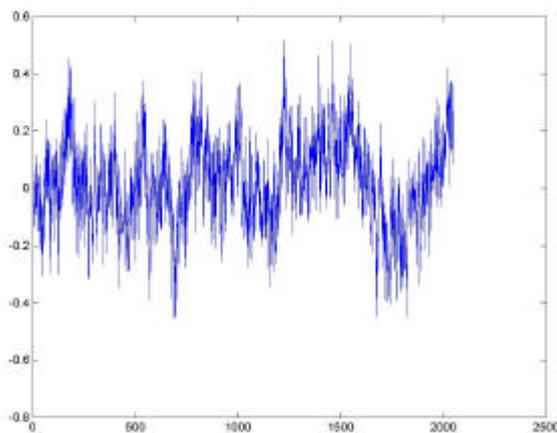


Figure 4 : Signal synthétisé

La DSP de $y(t)$ est calculée et comparée au gabarit initial.

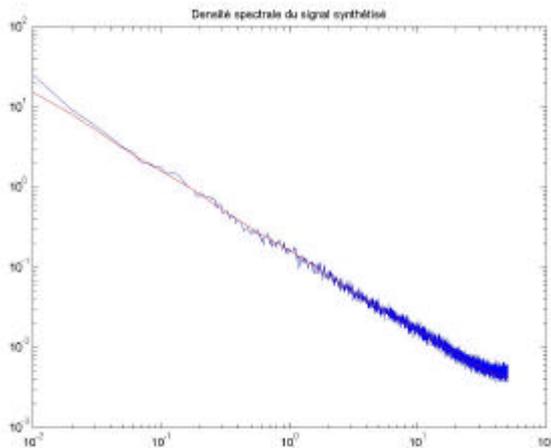


Figure 5: Densité spectrale du signal synthétique (N=10⁶points)

6. Conclusion :

La méthode proposée ici permet de contrôler la précision de la densité spectrale du signal engendré. Elle présente l'avantage d'être simple et permet une synthèse temporelle récurrente, rapide et de complexité limitée. La

difficulté numérique réside essentiellement dans le passage continu-discret pour lequel le choix de la période d'échantillonnage est crucial.

7. Références :

- [HUR 65] HURST H.E., BLACK R.P., SINAIKA Y.M. , « Long term storage in reservoirs. An experimental study », *Constable*, London , 1965.
- [VAN 88] VAN DER ZIEL., « Unified presentation of 1/f noise in electronic devices : fundamental 1/f noise sources », *Proceedings of IEEE*, Vol 76, n°3, 1988, pp 233-258.
- [VOS 75] VOSS R.F., CLARKE J., « 1/f noise in speech and music », *Nature*, Vol 258, 1975, pp 317-318.
- [VOS 78] VOSS R.F., CLARKE J., « 1/f noise in music : Music from 1/f noise », *Journal Acous. Soc. Am.*, Vol 63, 1978, pp 258-263.
- [ROY 97] ROYET I., Estimation du paramètre fractal des signaux de densité de circulation relevés sur le périphérique parisien, Diplôme d'Etudes Approfondies de l'Ecole Centrale de Nantes, 1997.
- [SCO 95] SCOTTI A., MENEVEAU S.G., « Fractal dimension of velocity signals in high-Reynolds-numbers hydrodynamic turbulence », *Physical Review E*, Vol 51, n°6, 1995, pp 5594-5608 .
- [ABR 97] ABRY P., Transformée en ondelettes. Analyses multirésolution et signaux de pression en turbulence, Editions Hermès, Paris.
- [WIL 95] WILINGER W., TAQUU M.S, LELAND W.E., WILSON V., « Self-similarity in high-speed packed traffic : analysis and modelling of Ethernet traffic measurements », *Statistical Science*, Vol 10, 1995, pp 676-85.
- [RIE 97] RIEDI R.H., LEVY-VEHEL J., Multifractal Properties of {TCP} Traffic : a numerical study, rapport interne INRIA,n° 3129, 1997.
- [KOY 93] KOYAMA J., HARA H., « Fractional Brownian Motions Described by Scaled Langevin Equation », *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol 3, n°4, 1993, pp 467-480.
- [CAR] CARMONA P., COUTIN L., MONTSENY G., « A diffusive markovian representation of fractional brownian motion with Hurst parameter less than 1/2 noise », à paraître.
- [YAS 97] YAZICI B., KASHYAP R.L., « A class of second-order stationary self-similar processes for 1/f phenomena », *IEEE Transactions on signal Processing.*, Vol 45, n° 2, 1997, pp 396-410.
- [GUG01] GUGLIELMI M., NORET E., « Une classe de systèmes auto-similaires et à mémoire longue », *TSI*, à paraître.
- [MAG 97] MAGRE O., GUGLIELMI M., « Modelling and Analysis of fractional Brownian motions », *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol 8, n°3, 1993, pp 377-388.
- [CHA 99] CHAPEAU-BLONDEAU F., GAZENGEL E., « Dynamique (max,+) pour la génération en ligne de bruit en 1/f. », *17ème GRETSI*, Vol 1, 1999, pp 7-11.
- [KES 82] KESHNER M.S., « 1/f noise », *Proceedings of IEEE*, Vol 70, n°3, 1982, pp 212-218.
- [OUS 93] OUSTALOUP A., *La commande robuste d'ordre non entier*, Editions Hermès, 1993.