

Distribution optimale d'un effort de recherche multi-étapes pour des contraintes linéaires généralisées

Frédéric DAMBREVILLE, Jean-Pierre LE CADRE

IRISA/CNRS, Campus de Beaulieu, 32042 Rennes Cedex, France

fdambrev@irisa.fr, lecadre@irisa.fr

Résumé – Cet article traite de la recherche d'une cible suivant un mouvement markovien ou conditionnellement déterministe. Comment affecter les efforts de recherche, lorsque le renouvellement des ressources est soumis à des contraintes linéaires généralisées ? Nous obtenons de nouvelles équations de *de Guenin* et élaborons un algorithme inspiré de l'algorithme F.A.B.

Abstract – This paper deals with search for a target following a markovian movement or a conditionally deterministic motion. How to allocate the search effort, when search resources renew with generalized linear constraints? We obtain new equations of *de Guenin* and build an algorithm inspired by the F.A.B. algorithm.

1 Introduction (Rappels)

1.1 Recherche sur une étape

Nous devons détecter une cible x localisée par une densité de probabilité $\alpha(x)$ dans un espace E . Pour effectuer cette détection, nous avons à notre disposition une quantité de ressources disponibles ϕ , que nous allons répartir sur l'espace de recherche E . Nous noterons $\varphi(x)$ la densité de ressource localement en $x \in E$. La quantité de ressources disponibles ϕ constituant une limite sur l'effort total de recherche, nous obtenons la condition suivante sur la répartition de l'effort de recherche :

$$\int_E \varphi(x) dx \leq \phi \quad (1)$$

Lorsque la cible est localisée en x et pour un effort de recherche local $\varphi(x)$, nous noterons $p(\varphi(x))$ la probabilité de ne pas détecter la cible ; p décroît avec l'effort fourni, et donc $p' < 0$. Nous supposons que la détection suit la loi des rendements décroissants, si bien que p' est strictement croissante. Le problème est alors d'optimiser φ sous la condition (1) de manière à minimiser $P_{nd}(\varphi)$, la probabilité totale de non détection :

$$P_{nd}(\varphi) = \int_E \alpha(x) \cdot p(\varphi(x)) dx \quad (2)$$

Comme la probabilité de non détection décroît avec l'effort de recherche fourni, la condition (1) est remplacée par (3) :

$$\int_E \varphi(x) dx = \phi \quad (3)$$

On déduit [1] de (2), (3) et de la positivité de la densité φ les équations de *de Guenin* (4) qui donnent une condition d'optimalité de paramètre $\mu \leq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(x) \cdot p'(\varphi(x)) &= \mu & \text{si } \alpha(x) > \mu/p'(0) \\ \varphi(x) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned} \quad (4)$$

L'inversion de p' dans (4) donne la fonction φ_μ . Comme p' croît, φ_μ croît uniformément avec μ et $\int_E \alpha(x) \cdot p(\varphi_\mu(x)) dx$

décroît. Donc φ_μ satisfait (3) pour un seul μ et on trouvera simultanément μ et la fonction φ optimale par dichotomie.

Cette méthode très rapide, que l'on doit à J. de Guenin, a été étendue par S.S. Brown à des recherches sur plusieurs étapes d'une cible mouvante markovienne.

1.2 Recherche multi-étapes

Nous devons détecter -au moins une fois- une cible se déplaçant dans un espace E . Cette détection se fait en T étapes et la recherche de la cible s'achève dès la première détection. On note $\vec{x} = (x_1, \dots, x_T)$ la position de la cible aux instants $1, 2, \dots, T$. Le déplacement de la cible est aléatoire markovien et on suppose que la densité de probabilité jointe $\alpha(\vec{x}) = \alpha(x_1, \dots, x_T)$ est connue et s'écrit :

$$\alpha(\vec{x}) = \alpha_1(x_1) \cdot \prod_{k=1}^{T-1} \alpha_{k,k+1}(x_{k+1} - x_k) \quad (5)$$

Nous disposons à chaque étape k d'une quantité de ressource ϕ_k que l'on répartit sur l'espace de recherche E . Nous noterons $\varphi_k(x_k)$ la densité de ressource localement en $x_k \in E$ à l'étape k . Pour les mêmes raisons que précédemment, on considère la contrainte d'optimisation (6) :

$$\forall k \in \{1, \dots, T\} \int_E \varphi_k(x_k) dx = \phi_k \quad (6)$$

En x_k et à l'étape k , nous noterons $p_k(\varphi_k(x_k))$ la probabilité de ne pas détecter la cible. De même et pour les mêmes raisons que précédemment, $p'_k < 0$ et p'_k est strictement croissante. Le problème est alors d'optimiser sous la condition (6) les fonctions φ_k afin de minimiser $\mathbf{P}_{nd}(\varphi)$, la probabilité totale de non détection :

$$\mathbf{P}_{nd}(\varphi) = \int_{E^T} \alpha(\vec{x}) \cdot \prod_{k=1}^{k=T} p_k(\varphi_k(x_k)) \cdot \prod_{k=1}^{k=T} dx_k \quad (7)$$

Pour κ fixé, $\mathbf{P}_{nd}(\varphi)$ peut se réécrire :

$$\mathbf{P}_{nd}(\varphi) = \int_E \beta_\kappa(\varphi, x_\kappa) \cdot p_\kappa(\varphi_\kappa(x_\kappa)) dx_\kappa \quad (8)$$

$$\text{où } \beta_\kappa(\varphi, x_\kappa) = \int_{E^{T-1}} \alpha(\vec{x}) \cdot \prod_{\substack{k \neq \kappa \\ 1 \leq k \leq T}} (p_k(\varphi_k(x_k)) dx_k) \quad (9)$$

Ceci montre, que si on fixe toutes les étapes sauf une, le problème se ramène à un problème de de Guenin classique. La solution de Brown est d'optimiser successivement chaque étape, en ayant fixé les autres (algorithme **Forward And Backward** [2], [3]). La convergence se fait au bout de plusieurs passages. Cette méthode s'accompagne de l'exploitation optimale de l'écriture markovienne de α , afin de réduire le temps de calcul de l'intégrale (9). Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Dans le problème que nous venons de considérer, les contraintes de ressources ϕ_k étaient fixées. Le but de cet article est de généraliser la recherche multi-étapes afin de flexibiliser ces contraintes. En particulier, cela inclura des cas simples de renouvellement de ressources.

2 Contraintes généralisées

Nous reprenons les notations précédentes. Notre problème reste de minimiser la probabilité $\mathbf{P}_{nd}(\varphi)$ de (7), mais sous la contrainte généralisée (10) :

$$A \left(\int_E \varphi_k(x_k) dx_k \right)_{1 \leq k \leq T} = (\psi_j)_{1 \leq j \leq \Theta} \quad (10)$$

où A est une matrice non nécessairement injective. A est appelée matrice de contrainte. ψ est appelé vecteur de contrainte. Sa dimension est Θ . Nous supposons que $AX = \psi$ admet au moins une solution.

Pour illustrer l'intérêt de telles contraintes, nous présentons deux exemples.

2.1 Exemples

2.1.1 Partage de ressources non renouvelables

Nous disposons de N ressources ne pouvant servir qu'une seule fois. Le problème est de partager N en T ressources d'étape ϕ_k de manière à avoir $\sum_{k=1}^T \phi_k = N$. Ceci revient à choisir pour (10) la matrice de contrainte à T colonnes $A_{NR} = (1 \dots 1)$ et le vecteur de contrainte $\psi_{NR} = (N)$.

2.1.2 Partage de ressources renouvelables

Maintenant, supposons qu'on dispose de N ressources renouvelables au bout d'un certain laps de temps (temps de ravitaillement, de déplacement, etc.). On peut ainsi imaginer qu'une ressource ne puisse être utilisée qu'une fois pour deux étapes de recherche consécutives (temps de renouvellement égal à 1). Cela correspond alors à choisir le vecteur de contrainte $\psi_R = (N \dots N)^t$ à $T-1$ composantes et la matrice pseudo-diagonale $A_R = (a_R(i, j))_{i, j}$ à $T-1$ lignes et T colonnes vérifiant :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, T-1\}, a_R(i, i) = a_R(i, i+1) = 1 \\ a_R(i, j) = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases} \quad (11)$$

2.2 Équations de de Guenin

Nous allons montrer une propriété analogue aux *équations de de Guenin* (4).

Propriété 1 Soit une solution optimale $\varphi = (\varphi_k)_{1 \leq k \leq T}$.

1. Il existe $\mu = (\mu_k)_{1 \leq k \leq \Theta}$ tel que, pour tout élément \vec{a} de E^T vérifiant $\forall k, \varphi_k(a_k) > 0$, on ait :

$$\left(p'_k(\varphi_k(a_k)) \cdot \beta_k(\varphi, a_k) \right)_{1 \leq k \leq T} = A^t \mu \quad (12)$$

2. Soit $\eta = A^t \mu$. Soit $\kappa \in \{1, \dots, T\}$ et $a_\kappa \in E$. Alors :

$$\beta_\kappa(\varphi, a_\kappa) \leq \frac{\eta_\kappa}{p'_\kappa(0)} \iff \varphi_\kappa(a_\kappa) = 0 \quad (13)$$

Nous ne démontrerons que le premier point. Pour les conditions (13) de nullité de φ , tout à fait similaires aux résultats de de Guenin (4), se référer à [1].

Démonstration. Soit φ une solution optimale. Nous allons considérer des perturbations *horizontales* et *verticales* de φ , satisfaisant les contraintes du problème. Chacune de ces perturbations donnera une propriété différentielle que doit satisfaire la solution optimale φ . La propriété (12) sera démontrée comme conjonction de ces propriétés.

Soit $\kappa \in \{1, \dots, T\}$. Soit a_κ et b_κ deux éléments distincts de E vérifiant $\varphi_\kappa(a_\kappa) > 0$ et $\varphi_\kappa(b_\kappa) > 0$. On se donne $d\varphi$ une variation infinitésimale, et on construit $\tilde{\varphi}$ une perturbation de φ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_\kappa(a_\kappa) = \varphi_\kappa(a_\kappa) + d\varphi \\ \tilde{\varphi}_\kappa(b_\kappa) = \varphi_\kappa(b_\kappa) - d\varphi \\ \tilde{\varphi}_k(x_k) = \varphi_k(x_k) \text{ dans tout autre cas} \end{cases} \quad (14)$$

Sachant que φ satisfait la contrainte (10), on vérifie facilement que $\tilde{\varphi}$ la satisfait aussi. Comme $\varphi_\kappa(a_\kappa) > 0$ et $\varphi_\kappa(b_\kappa) > 0$, $\tilde{\varphi}$ vérifie aussi la contrainte de densité $\tilde{\varphi} \geq 0$. Comme $\tilde{\varphi}$ satisfait les contraintes d'optimisation et que φ est optimale, on doit avoir $\mathbf{P}_{nd}(\varphi) \leq \mathbf{P}_{nd}(\tilde{\varphi})$. En utilisant l'écriture (8), on fait le développement limité d'ordre 1 de $\mathbf{P}_{nd}(\tilde{\varphi})$ en $d\varphi$ et on simplifie les membres de l'inégalité. On trouve :

$$0 \leq (p'_\kappa(\varphi_\kappa(a_\kappa)) \cdot \beta_\kappa(\varphi, a_\kappa) - p'_\kappa(\varphi_\kappa(b_\kappa)) \cdot \beta_\kappa(\varphi, b_\kappa)) \cdot d\varphi \quad (15)$$

Le signe de $d\varphi$ peut être choisi quelconque. On en déduit :

$$0 = (p'_\kappa(\varphi_\kappa(a_\kappa)) \cdot \beta_\kappa(\varphi, a_\kappa) - p'_\kappa(\varphi_\kappa(b_\kappa)) \cdot \beta_\kappa(\varphi, b_\kappa)) \quad (16)$$

La seule contrainte sur le choix de a_κ et de b_κ est la stricte positivité de φ en ces points. D'où le lemme suivant :

Lemme 1 Soit φ une solution optimale. Alors pour tout $\kappa \in \{1, \dots, T\}$, il existe une constante C_κ telle que :

$$\forall x_\kappa \in E, \varphi_\kappa(x_\kappa) > 0 \Rightarrow p'_\kappa(\varphi_\kappa(x_\kappa)) \cdot \beta_\kappa(\varphi, x_\kappa) = C_\kappa$$

Soit maintenant $\vec{a} \in E^T$ tel que $\forall k, \varphi_k(a_k) > 0$. Donnons nous également une variation infinitésimale scalaire dt et λ un élément quelconque de $\ker A$. On note $d\varphi = dt \cdot \lambda$. On note $d\varphi_k$ la k -ième composante de $d\varphi$. On construit $\tilde{\varphi}$ une perturbation de φ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, T\}, \tilde{\varphi}_k(a_k) = \varphi_k(a_k) + d\varphi_k \\ \tilde{\varphi}_k(x) = \varphi_k(x) \text{ dans tout autre cas} \end{cases} \quad (17)$$

Pareillement, $\tilde{\varphi}$ vérifie la contrainte $\tilde{\varphi} \geq 0$. Par ailleurs :

$$A \left(\int_E \tilde{\varphi}_k(x_k) dx_k \right)_k = A \left(\int_E \varphi_k(x_k) dx_k \right)_k + A \cdot d\varphi \quad (18)$$

Comme $A \cdot d\varphi = dt(A \cdot \lambda) = 0$ et que φ vérifie la condition (10), $\tilde{\varphi}$ vérifie également cette condition. L'optimalité de φ nous donne donc $\mathbf{P}_{nd}(\varphi) \leq \mathbf{P}_{nd}(\tilde{\varphi})$. En utilisant l'écriture (8), on effectue le développement limité d'ordre 1 de $\mathbf{P}_{nd}(\tilde{\varphi})$ en dt et on simplifie. On trouve alors :

$$0 \leq (dt \cdot \lambda)^t \cdot \left(p'_k(\varphi_k(a_k)) \cdot \beta_k(\varphi, a_k) \right)_{1 \leq k \leq T} \quad (19)$$

Le signe de dt peut être choisi quelconque. On en déduit :

$$\lambda^t \cdot \left(p'_k(\varphi_k(a_k)) \cdot \beta_k(\varphi, a_k) \right)_{1 \leq k \leq T} = 0 \quad (20)$$

Cela est vrai pour tout $\lambda \in \ker A$. Il en résulte :

$$\left(p'_k(\varphi_k(a_k)) \cdot \beta_k(\varphi, a_k) \right)_{1 \leq k \leq T} \in (\ker A)^\perp \quad (21)$$

Considérons maintenant les constantes C_k définies dans le lemme 1. On déduit de (21) que $(C_k)_{1 \leq k \leq T} \in (\ker A)^\perp$. Comme $(\ker A)^\perp = \text{Im}(A^t)$, on en déduit l'existence de μ tel que $(C_k)_{1 \leq k \leq T} = A^t \mu$. La propriété (12) s'obtient alors comme la réécriture du lemme 1 en fonction de μ .

3 Résolution numérique

3.1 Algorithme

La méthode de résolution employée part de considérations complémentaires de la partie précédente. Nous pouvons réécrire (10) sous la forme de deux équations :

$$\left(\int_E \varphi_k(x_k) dx_k \right)_{1 \leq k \leq T} = (\phi_j)_{1 \leq k \leq T} \quad (22)$$

$$A(\phi_j)_{1 \leq k \leq T} = (\psi_j)_{1 \leq j \leq \Theta} \quad (23)$$

Nous notons $\phi = (\phi_j)_{1 \leq k \leq T}$ et $\psi = (\psi_j)_{1 \leq j \leq \Theta}$. Considérons A^\sim une matrice telle que $\ker A = \text{Im}(A^\sim)$ et un vecteur ϕ_0 tel que $A\phi_0 = \psi$. Nous désignons par p le nombre de colonnes de A^\sim . Alors pour tout vecteur ϕ vérifiant (23), il existe $\nu \in \mathbb{R}^p$ tel que $\phi = \phi_0 + A^\sim \nu$. De même, tout vecteur de la forme précédente vérifie (23). Le principe de l'algorithme sera de faire varier le paramètre ν vers une valeur optimale pour la minimisation de $\mathbf{P}_{nd}(\varphi)$. Dans ce but, nous exprimerons le comportement différentiel de $\min_\varphi \mathbf{P}_{nd}(\varphi)$ en fonction de ν . Il faudra d'autre part tenir compte de la contrainte de positivité des ressources.

3.1.1 Comportement différentiel de $\min_\varphi \mathbf{P}_{nd}(\varphi)$

Soit $\nu \in \mathbb{R}^p$ et $\phi = \phi_0 + A^\sim \nu$. Supposons d'autre part que ν vérifie la contrainte de positivité des ressources, c'est à dire que $\phi \geq 0$. On notera :

$$I(\nu) = \{k \in \mathbb{N}/1 \leq k \leq T \text{ et } \phi_k > 0\}$$

Soit $d\nu$ une variation infinitésimale de ν . On déduit pour ϕ la variation $d\phi = A^\sim d\nu$. On notera :

$$J(d\nu) = \{k \in \mathbb{N}/1 \leq k \leq T \text{ et } d\phi_k > 0\}$$

$$K(d\nu) = \{k \in \mathbb{N}/1 \leq k \leq T \text{ et } d\phi_k < 0\}$$

La contrainte de positivité de ϕ nous impose la condition :
C 1 $\forall k \in \{1, \dots, T\} \setminus I(\nu), d\phi_k \geq 0$

Supposons la condition vérifiée. Soit φ minimisant \mathbf{P}_{nd} pour le vecteur de contrainte ϕ . Partant de cet optimal, nous cherchons à minimiser \mathbf{P}_{nd} pour $\phi + d\phi$ par simple perturbation ponctuelle de φ . Ainsi nous en déduirons $d \min_\varphi \mathbf{P}_{nd}(\varphi)$ en ν . On se donne donc $\vec{a} \in E^T$ et on construit une fonction $\hat{\varphi}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, T\}, \hat{\varphi}_k(a_k) = \varphi_k(a_k) + d\phi_k \\ \hat{\varphi}_k(x_k) = \varphi_k(x_k) \text{ dans tout autre cas} \end{cases} \quad (24)$$

Après développement limité d'ordre 1 et simplification, la variation $dP = \mathbf{P}_{nd}(\hat{\varphi}) - \mathbf{P}_{nd}(\varphi)$ s'écrit :

$$dP = \sum_{k=1}^T p'_k(\varphi_k(a_k)) \cdot \beta_k(\varphi, a_k) \cdot d\phi_k \quad (25)$$

Notre problème se ramène au choix de \vec{a} de manière à rendre dP le plus négatif possible. La contrainte de positivité de $\hat{\varphi}$ impose de plus la condition :

C 2 $\forall k \in K(d\nu), \varphi_k(a_k) > 0$

Si on note $E(k, \varphi) = \{x \in E/\varphi_k(x) > 0\}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} d \min_\varphi \mathbf{P}_{nd}(\varphi) &= \sum_{k \in J(d\nu)} \min_{x \in E} \{p'_k(\varphi_k(x)) \cdot \beta_k(\varphi, x)\} \cdot d\phi_k \\ &+ \sum_{k \in K(d\nu)} \max_{x \in E(k, \varphi)} \{p'_k(\varphi_k(x)) \cdot \beta_k(\varphi, x)\} \cdot d\phi_k \end{aligned} \quad (26)$$

3.1.2 Grandes lignes de l'algorithme

Soit dt un infinitésimal scalaire. On définit $d\nu^{\kappa, \epsilon}$ par $d\nu^{\kappa, \epsilon} = \epsilon \cdot dt$ et $d\nu_k^{\kappa, \epsilon} = 0$ pour $k \neq \kappa$. L'algorithme procède de la façon suivante :

1. Initialisation de ν, ϕ, φ ; Calcul de A^\sim et ϕ_0 ;
2. Pour $\kappa \in \{1, \dots, T\}$ et $\epsilon \in \{-1, +1\}$ poser $d\nu = d\nu^{\kappa, \epsilon}$ et calculer, lorsque la condition (C 1) est satisfaite, la variation $d \min_\varphi \mathbf{P}_{nd}(\varphi)$ par la formule(26) ; Sélectionner la variation $d\nu$ optimale ;
3. Recalculer ν et ϕ ;
4. Appliquer successivement pour $\kappa \in \{1, \dots, T\}$ la méthode de Guenin à l'étape κ pour optimiser φ_κ seul ;
5. Revenir à 2 jusqu'à convergence.

3.1.3 implémentation à la Brown

Le problème avec notre algorithme vient du temps nécessaire pour calculer la fonction $\beta_\kappa(\varphi, \cdot) : x \mapsto \beta_\kappa(\varphi, x)$. Cette fonction est en effet déterminée par une intégrale sur E^{T-1} pour chaque élément de E . Si on se donne comme unité de temps u le calcul d'une intégrale sur E ou, ce qui revient au même, le parcours de l'ensemble E , alors le temps de calcul de $\beta_\kappa(\varphi, \cdot)$ est de l'ordre de u^T . Ensembles, les étapes 2 et 4 conduisent à des temps de calcul de l'ordre de $2T \cdot u^T$. Quand on sait que u est en général très grand, ces calculs sont tout à fait irréalisables.

Nous reprenons l'idée de Brown d'exploiter l'aspect markovien de α pour accélérer ces calculs. Pour $x \in E$, définissons $U^\varphi(x)$ et $D^\varphi(x)$ par les récurrences :

$$\begin{aligned} U_1^\varphi(x) &= \alpha_1(x) \text{ et } D_T^\varphi(x) = 1 \\ U_{k+1}^\varphi(x) &= \int_E \alpha_{k,k+1}(x-y) \cdot p_k(\varphi_k(y)) \cdot U_k^\varphi(y) dy \\ D_{k-1}^\varphi(x) &= \int_E \alpha_{k-1,k}(y-x) \cdot p_k(\varphi_k(y)) \cdot D_k^\varphi(y) dy \end{aligned} \quad (27)$$

Le calcul de U_k^φ sachant U_{k-1}^φ ou de D_k^φ sachant D_{k+1}^φ demande un temps de l'ordre de u^2 . Au total le calcul de toutes les fonctions U^φ et D^φ demande un temps de $2T \cdot u^2$. On calcule alors β à partir de U^φ et D^φ :

$$\beta_\kappa(\varphi, x) = U_\kappa^\varphi(x) \cdot D_\kappa^\varphi(x) \quad (28)$$

Un raffinement permet d'économiser encore du temps de calcul. Normalement, dès que φ est modifié, il faut recalculer les fonctions U^φ et D^φ . Mais on peut remarquer que lorsque seule φ_κ est modifiée, alors U_k^φ et D_l^φ restent inchangés pour $k \leq \kappa$ et $l \geq \kappa$.

On modifie notre algorithme en conséquence :

1. Initialisation de ν , ϕ , φ ; Calcul de A^\sim , ϕ_0 et de U^φ ;
2. Calcul de D^φ ;
3. Trouver $d\nu$ optimisant $d \min_\varphi \mathbf{P}_{nd}(\varphi)$;
4. Recalculer ν et ϕ ;
5. Pour κ variant de 1 à T faire :
 - Calculer U_κ^φ ;
 - Calculer φ_κ par de Guenin;
6. Revenir à 2 jusqu'à convergence.

Le temps de calcul est de l'ordre de $2T \cdot u^2$ pour déterminer la variation $d\nu$ et appliquer de Guenin une fois sur toutes les étapes. Notons que si on supprime les étapes 3 et 4 du programme, on retrouve *grosso modo* l'algorithme F.A.B.

3.2 Résultats

Les tests ont porté sur une recherche en quatre étapes d'une cible markovienne se déplaçant dans un espace de 30×30 cellules. Initialement, la cible est uniformément localisée sur le carré 10×10 positionné en le point $(5, 5)$:

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{100} \text{ si } (5, 5) \leq x \leq (9, 9); \alpha_1(\mathbf{x}) = 0 \text{ sinon}$$

Les fonctions $\alpha_{k,k+1}$ sont toutes égales à la fonction Ω , qui représente une dispersion vers le bas à droite :

$$\begin{cases} \Omega(0, 0) = \Omega(3, 3) = \frac{3}{14} \text{ et } \Omega(2, 3) = \Omega(3, 2) = \frac{2}{14} \\ \Omega(0, 3) = \Omega(3, 0) = \Omega(1, 3) = \Omega(3, 1) = \frac{1}{14} \\ \Omega(\mathbf{x}) = 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Nous présentons trois résultats. Le premier avec $A = A_{NR}$ et $\psi = \psi_{NR}$ pour $N = 200$, les deux suivants en utilisant $A = A_R$ et $\psi = \psi_R$ pour $N = 100$ et $N = 10$. Le tableau 1 présente pour chaque expérience la répartition des efforts de recherche par étape ($\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$) et la probabilité \mathbf{P}_{nd} optimale. Considérant le vecteur η obtenu numériquement (cf. propriété 1), on donne également la distance d_{dual} normalisée par $\|\eta\|$ entre η et $\text{Im}(A^t)$. Les figures associées sont une représentation visuelle de φ .

TAB. 1: Résultats

A	N	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	$\mathbf{P}_{nd}(\varphi)$	d_{dual}	fig.
A_{NR}	200	112	50	25	13	7,7%	$1,8 \cdot 10^{-3}$	1
A_R	100	73	27	73	27	9,1%	$4,2 \cdot 10^{-3}$	2
A_R	10	8,7	1,3	8,7	1,3	71%	$2,1 \cdot 10^{-4}$	3

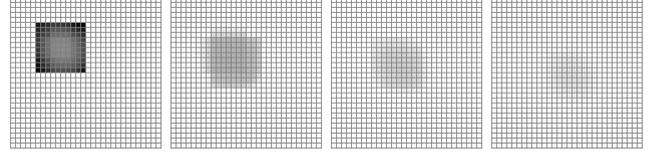


FIG. 1 : $A = A_{NR}$; $N = 200$

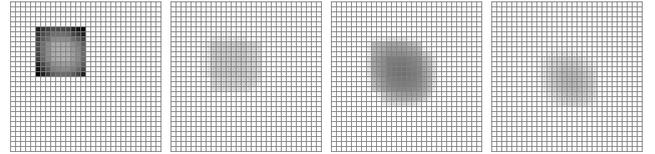


FIG. 2 : $A = A_R$; $N = 100$

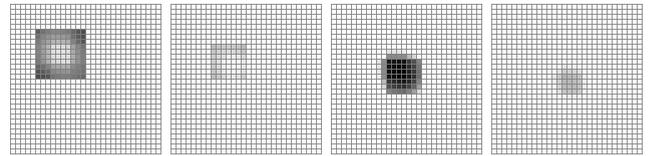


FIG. 3 : $A = A_R$; $N = 10$

D'importantes ressources (parties sombres) sont affectées suivant la probabilité de présence de la cible. On constate néanmoins une *stratégie d'encercllement* pour optimiser la recherche (figures 1, 2 et 3 surtout). De plus, pour cette cible diffusante, les efforts ont tendance à se concentrer vers les premières étapes. Ceci est d'autant plus vrai que les ressources sont faibles (exemple 2 et exemple 3 : ϕ_1 et ϕ_3 passent de 73% des ressources à 87%). Les distances d_{dual} sont faibles, ce qui est conforme à la propriété 1.

4 Perspectives

Il existe des cas où la contrainte égalité (10) ne donne qu'une approximation de la solution plus générale avec contrainte inégalité (remplacer = par \leq dans (10)). Nous envisageons l'extension du problème à de telles contraintes. Enfin, au vue des expérimentations, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la répartition pour des ressources devenant très faibles.

Références

- [1] J. de Guenin. *Optimum Distribution of Effort: an Extension of the Koopman Basic Theory*. Operations Research 9, pp 1-7, 1961.
- [2] S.S. Brown. *Optimal Search for a Moving Target in Discrete Time and Space*. Operations Research 28, pp 1275-1289, 1980.
- [3] A.R. Washburn. *Search for a moving Target: The FAB algorithm*. Operations Research 31, pp 739-751, 1983.
- [4] L.D. Stone et H.R. Richardson. *Search for Targets with Conditionally Deterministic Motion*. SIAM J. of Applied Mathematics, vol. 27, n°2, pp 239-255, 1974.