

# Estimation Aveugle Bayésienne des Modèles Non-linéaires *H-ARMA*

David DECLERCQ, Patrick DUVAUT

ETIS UPRES-A 8051 6, avenue du Ponceau 95014 Cergy-Pontoise  
declercq@ece.umm.edu,

**Résumé** – Dans ce papier, nous proposons une approche Bayésienne pour l'estimation aveugle de paramètres de modèles non linéaires appelés *H-ARMA*. Ces derniers sont obtenus par transformation polynômiale instantanée d'un processus coloré *ARMA*. La non-linéarité est décomposée sur une base de polynômes d'Hermite. Tout d'abord, nous rappelons la structure de ces modèles et décrivons brièvement leurs principales propriétés. Dans une deuxième partie, nous abordons le problème de l'estimation aveugle des paramètres de ces modèles, avec la seule connaissance des observations de sortie. Nous utilisons une modélisation Bayésienne de ce problème et sa résolution par un algorithme stochastique. L'étape importante de cette approche est la simulation des états cachés du système, et nous montrons que la méthode proposée résout efficacement l'estimation des paramètres *H-ARMA*, même lorsque la non-linéarité n'est pas inversible.

**Abstract** – In this paper, we propose a bayesian method for the blind estimation of parameters in nonlinear models. The studied models - called *H-ARMA* processes - are generated by a memoryless polynomial filter of an *ARMA* Gaussian input. The nonlinearity is expanded on the Hermite polynomials basis. First, we recall the structure *H-ARMA* models and briefly present their main properties. Then, we tackle the problem of parameter estimation *blindly*, that is only with the knowledge of the output observations. A bayesian method based on model augmentation and a MCMC algorithm is performed. We show that the key point of the algorithm is the sampling of the Markov state process and that the proposed Bayesian method solves efficiently the estimation problem, even when the model is non-invertible.

## 1 Introduction

Dans cette communication, nous nous intéressons au problème de l'identification aveugle de processus non linéaires colorés. La famille de processus considérée, appelée *H-ARMA* a été introduite dans [4] et est une généralisation directe des modèles étudiés dans [6]. Leur génération consiste en une transformation non linéaire d'un processus Gaussien à coloration *ARMA*, la non-linéarité étant polynômiale instantanée. Les polynômes choisis appartiennent à la famille des polynômes d'Hermite, en raison de leurs propriétés d'orthogonalité par rapport à un poids Gaussien. Le but d'une identification aveugle de ces processus est de construire des estimateurs consistants de leurs paramètres lorsque rien n'est connu dans le modèle (sauf sa structure polynômiale), ni de l'entrée (sauf qu'elle est gaussienne colorée). Nous nous restreindrons, dans le contenu de cette communication, à des modèles dont la dimension est supposée connue.

La section 2 décrit rapidement les processus *H-ARMA*. Dans la section 3, nous abordons l'identification des paramètres *H-ARMA* sous le paradigme Bayésien. Plus précisément, nous utilisons l'augmentation du modèle à l'aide d'un processus d'état caché pour construire des algorithmes d'estimation stochastiques : échantillonneurs MCMC. La description de l'algorithme proposé est faite dans la section 4. Les simulation (section 5) couvrent des non-linéarités bijectives ou non bijectives pour différentes configurations de corrélations. Nous concluons par quelques commentaires sur l'approche proposée ici, et par quelques

idées pour améliorer le comportement des estimateurs Bayésiens obtenus.

## 2 Présentation des modèles *H-ARMA*

Les modèles de processus *H-ARMA*( $P, p, q$ ) sont obtenus par transformation non linéaire instantanée de processus Gaussiens colorés. La coloration est choisie de type *ARMA* et la transformation non linéaire est polynômiale de type Hermite. Leur représentation Markovienne est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}\varepsilon_{t-1} + \mathbf{c}^T\varepsilon_t\mathbf{c} \\ y_t = \mathcal{H}(\mathbf{c}^T\mathbf{x}_t) + \eta_t \end{cases} \quad (1)$$

où l'entrée  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc Gaussien stationnaire (BBGS), de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\varepsilon^2$ .  $\eta_t$  est également un BBGS de variance  $\sigma_\eta^2$ , indépendant de  $\varepsilon_t$ . Ce dernier peut être interprété comme un bruit additif perturbant ou comme une erreur de modélisation lorsque l'on désire appliquer un modèle *H-ARMA* à une série d'observations  $y_{1 \rightarrow N}$ . La première équation de (1) est appelée *équation d'état* et correspond à la représentation Markovienne d'un processus *ARMA*. La seconde partie est *l'équation d'observation* et est simplement une transformation polynômiale instantanée du type Hermite.  $\mathbf{x}_t$  est un vecteur d'état de taille  $p$ .  $\mathcal{H}(\cdot)$  est la transformation non linéaire obtenue à partir de polynômes d'Hermite de degrés maximum  $P$ . Les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  contiennent res-

pectivement les parties  $AR$  et  $MA$  du filtre linéaire, et  $\mathbf{c} = [1 \ 0 \dots 0]^T$ .

Des structures du type  $H-ARMA$  sont présentes en communications numériques et spécialement en transmissions satellitaires [9] ou en contexte xDSL [8].

Une description complète des modèles  $H-ARMA$  a été faite dans [2], ainsi que le calcul de leurs cumulants et des variances d'estimation non asymptotiques de ces cumulants.

La propriété clé, d'une importance cruciale pour l'estimation des paramètres du modèle, est *l'inversibilité forte* des modèles  $H-ARMA$ . Cette propriété est vérifiée lorsque (i) le filtre  $ARMA$  est à phase minimum, et (ii) la non-linéarité  $\mathcal{H}(\cdot)$  est bijective. Lorsque le modèle n'est pas fortement inversible, les méthodes classiques d'identification des paramètres (MLE, cumulants, ...) ne sont plus efficaces et conduisent à des estimateurs inconsistants [3]. Nous présentons, dans la section suivante, une alternative à ces méthodes, conduite sous le paradigme Bayésien.

### 3 Identification Bayésienne

La clé de l'inversion Bayésienne des modèles  $H-ARMA$  est que les équations Markoviennes définissent naturellement une structure *hiérarchique*. Ce type de modèles a été largement étudié [10, 5], et est très intéressant parce que l'introduction de *variables d'état cachées*, qui sont le plus souvent des processus de Markov, change complètement la formulation du problème. Le modèle résultant est appelé *modèle augmenté*, et la densité de vraisemblance devient  $p(y_{1 \rightarrow N}, x_{1 \rightarrow N} | \boldsymbol{\theta})$ , avec  $y_{1 \rightarrow N}$  les observations,  $x_{1 \rightarrow N}$  les variables augmentées, et  $\boldsymbol{\theta}$  un vecteur contenant les différents paramètres du modèle. Les algorithmes développés à partir de cette structure vont également estimer les valeurs du processus d'état caché  $x_{1 \rightarrow N}$ .

Toute approche Bayésienne commence par la description de la densité *a posteriori* totale des paramètres que l'on veut estimer. Son expression est obtenue à l'aide de la règle de Bayes, et est proportionnelle à la vraisemblance modifiée du modèle augmenté et aux densité *a priori* des paramètres.

$$p(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2 | y_{1 \rightarrow N}) \propto p(y_{1 \rightarrow N} | \mathbf{x}_{1 \rightarrow N}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma_\eta^2) p(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N} | \mathbf{a}, \sigma_\varepsilon^2) \times \pi(\boldsymbol{\alpha}, \sigma_\eta^2) \pi(\mathbf{a}, \sigma_\varepsilon^2) \quad (2)$$

Le développement des densités *a priori* étant possible en raison de l'indépendance des paramètres linéaires et non-linéaires mise en évidence par l'équation (1).

La vraisemblance augmentée a l'expression suivante, déduite directement de la Gaussianité des bruits  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$ .

$$p(y_{1 \rightarrow N} | \mathbf{x}_{1 \rightarrow N}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma_\eta^2) p(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N} | \mathbf{a}, \sigma_\varepsilon^2) \propto \frac{1}{\sigma_\varepsilon^N \sigma_\eta^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} \sum_{t=1}^N (y_t - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{H}(x_t))^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^N (x_t - \mathbf{a}^T \mathbf{x}_{t-1})^2\right) \quad (3)$$

Les valeurs initiales du processus d'état caché étant données par  $x_t = 0 \ \forall t \leq 0$ .

L'avantage de l'approche Bayésienne est claire: la vraisemblance *naturelle* des modèles  $H-ARMA$  n'a pas d'expression analytique et doit être estimée numériquement, alors que l'expression de la vraisemblance *augmentée* est (3). Cette dernière est de plus Gaussienne en les paramètres  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\mathbf{a}$ , et inverse Gamma en les variances  $\sigma_\eta^2$  et  $\sigma_\varepsilon^2$ , ce qui est encourageant dans l'optique d'une implémentation efficace d'algorithmes échantillonneurs. La vraisemblance est néanmoins très compliquée en le processus d'état caché  $x_t$ . La simulation du processus d'état est clairement l'étape importante des algorithmes déduits des équations (2) et (3).

Des densités *a priori* intéressantes dans notre cas sont de la famille des densités conjuguées, qui ne changent pas la loi de probabilité lorsqu'elles sont multipliées par la vraisemblance. Les densités conjuguées les plus courantes sont de la famille des densités exponentielles, ce qui est le cas pour les paramètres  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a})$  et les variances des bruits. La densité conjuguée pour une vraisemblance Gaussienne est Gaussienne, et inverse Gamma pour une vraisemblance inverse Gamma.

### 4 MCMC Algorithm

Puisque les paramètres  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)$  peuvent être directement simulés et que l'échantillonnage du processus d'état requiert une étape de Metropolis-Hastings, nous proposons un algorithme stochastique MCMC hybride pour l'estimation des paramètres d'un modèle  $H-ARMA$ .

Avant de présenter l'algorithme utilisé, discutons de la simulation du processus Markovien caché. La loi de ce processus d'état  $p(\mathbf{x}_{1 \rightarrow N} | \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2, y_{1 \rightarrow N})$  n'est pas standard et ne peut être simulée directement. Nous utilisons donc une étape de Métropolis-Hastings dont nous devons choisir une densité de proposition efficace. Si la simulation de la trajectoire  $\mathbf{x}_{1 \rightarrow N}$  est effectuée un par un, la densité *a posteriori* totale est, pour chaque échantillon:

$$p(x_t | y_{1 \rightarrow N}, x_{-t}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) = p(x_t | y_t, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t+p}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}) \propto p(y_t | x_t, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, (\sigma_\eta^2)^{(i)}) p(x_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t+p}^{(i)}, \mathbf{a}^{(i)}, (\sigma_\varepsilon^2)^{(i)}) \quad (4)$$

$x_{-t}$  représentant l'ensemble de la trajectoire  $x_{1 \rightarrow N}$  sans l'échantillon à l'instant  $t$ ,  $x_{-t} = (x_1 \dots x_{t-1}, x_{t+1} \dots x_N)$ , et les densités qui apparaissent dans (4) sont de la forme:

$$p(y_t | x_t, \boldsymbol{\alpha}, \sigma_\eta^2) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (y_t - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{H}(x_t))^2\right) \quad (5)$$

$$p(x_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_{t+p}, \mathbf{a}, \sigma_\varepsilon^2) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{k=t}^{t+p} (x_k - \mathbf{a}^T \mathbf{x}_{k-1})^2\right) \quad (6)$$

Une densité de proposition intéressante est donc (6), qui est Gaussienne. Dans le cas d'une stratégie "un à la fois", le calcul de la moyenne et de la variance de (6) est direct et est présenté dans la description de l'algorithme MCMC ci-dessous. Si l'on veut simuler le processus de Markov *par blocs*, ce calcul devient fastidieux et inefficace et l'utilisation d'une méthode du type "filtrage avant/simulation arrière" devient nécessaire [7].

Lorsque qu'une trajectoire candidate  $\mathbf{x}_{1 \rightarrow N}^*$  a été générée, et connaissant les estimées à l'itération précédente  $\mathbf{x}_{1 \rightarrow N}^{(i)}$ , on accepte alors  $\mathbf{x}_{1 \rightarrow N}^*$  comme nouvelles valeurs de la trajectoire à l'itération  $(i+1)$  avec la probabilité pour chaque  $t$ :

$$Prob\left(\mathbf{x}_t^{(i)} \hookrightarrow \mathbf{x}_t^*\right) = \min\left\{\frac{p\left(y_t|\mathbf{x}_t^*, \boldsymbol{\theta}^{(i)}\right)}{p\left(y_t|\mathbf{x}_t^{(i)}, \boldsymbol{\theta}^{(i)}\right)}, 1\right\} \quad (7)$$

L'algorithme complet se présente de la façon suivante:  
Algorithme MCMC hybride pour l'estimation des paramètres  $H$ -ARMA

1. soit  $\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \left(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}, \mathbf{a}^{(i)}, (\sigma_\eta^2)^{(i)}, (\sigma_\varepsilon^2)^{(i)}\right)$  et  $x_{1 \rightarrow N}^{(i)}$  les valeurs des estimées à l'itération  $(i)$ .
2. étape de Metropolis-Hastings :  $\forall t = 1 \rightarrow N$   
-- simuler  $u_t \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$  et un candidat

$$x_t^* \sim p\left(x_t|\mathbf{x}_{t-1}^{(i+1)}, \mathbf{x}_{t+p}^{(i)}, (\sigma_\eta^2)^{(i)}\right) \propto \mathcal{N}\left(m_x, \sigma_x^2\right)$$

avec

$$m_x = \frac{\mathbf{a}_x^T \mathbf{T} \mathbf{O}_x \mathbf{a}_x}{\mathbf{a}_x^T \mathbf{a}_x} \quad \sigma_x^2 = \frac{(\sigma_\eta^2)^{(i)}}{\mathbf{a}_x^T \mathbf{a}_x} \quad \mathbf{a}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} \mathbf{O}_x = \begin{bmatrix} 0 & x_{t-1}^{(i+1)} & \cdots & x_{t-p}^{(i+1)} \\ x_{t+1}^{(i)} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & x_{t-1}^{(i+1)} \\ x_{t+p}^{(i)} & \cdots & x_{t+1}^{(i)} & 0 \end{bmatrix}$$

-- calculer (cf. eq. (5))

$$Prob\left(x_t^{(i+1)} \hookrightarrow x_t^*\right) = \min\left\{\frac{p\left(y_t|x_t^*, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, (\sigma_\eta^2)^{(i)}\right)}{p\left(y_t|x_t^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}^{(i)}, (\sigma_\eta^2)^{(i)}\right)}, 1\right\}$$

-- si  $u_t \leq Prob\left(x_t^{(i+1)} \hookrightarrow x_t^*\right)$  alors  $x_t^{(i+1)} = x_t^*$   
sinon  $x_t^{(i+1)} = x_t^{(i)}$

3. étapes de Gibbs

-- simuler  $\boldsymbol{\alpha}^{(i+1)} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{m}_\alpha, \boldsymbol{\Delta}_\alpha\right)$

$$\boldsymbol{\Delta}_\alpha^{-1} = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{t=1}^N \mathbf{H}(x_t) \mathbf{H}(x_t)^T + \frac{\mathbf{Id}_P}{\sigma_{prior}^2} \quad (8)$$

$$\mathbf{m}_\alpha = \frac{\boldsymbol{\Delta}_\alpha}{\sigma_\eta^2} \sum_{t=1}^N y_t \mathbf{H}(x_t) \quad (9)$$

-- simuler  $\mathbf{a}^{(i+1)} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{m}_a, \boldsymbol{\Delta}_a\right)$

$$\boldsymbol{\Delta}_a^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=p+1}^N \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1}^T + \frac{\mathbf{Id}_P}{\sigma_{prior}^2} \quad (10)$$

$$\mathbf{m}_a = \frac{\boldsymbol{\Delta}_a}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=p+1}^N x_t \mathbf{x}_{t-1} \quad (11)$$

-- simuler  $(\sigma_\varepsilon^2)^{(i+1)}$  suivant

$$\mathcal{IG}\left(\frac{N-p}{2} - 1 + \lambda_\varepsilon, \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (x_t - \mathbf{a}^T \mathbf{x}_{t-1})^2 + \tau_\varepsilon\right)$$

-- simuler  $(\sigma_\eta^2)^{(i+1)}$  suivant

$$\mathcal{IG}\left(\frac{N}{2} - 1 + \lambda_\eta, \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (y_t - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{H}(x_t))^2 + \tau_\eta\right)$$

Dans les expressions des densités *a posteriori*, il est entendu que le conditionnement s'effectue par rapport aux valeurs des chaînes obtenues à l'itération précédente.

## 5 Simulations and Monte Carlo study

Afin de mesurer la capacité des algorithmes stochastiques proposés à identifier de façon aveugle les modèles  $H$ -ARMA, nous avons considéré plusieurs types de filtres linéaires et non linéaires. Puisque l'aspect important est l'inversibilité forte des modèles, nous avons choisi trois non-linéarités différentes: la première est bijective, la seconde sera appelée "*faiblement non bijective*", puisqu'elle est pas bi-univoque que sur un intervalle de la droite réelle, la troisième est complètement non bijective, sur l'ensemble  $\mathcal{R}$ .

Trois types de processus  $AR$  ont été choisis pour exhiber des comportements de corrélation différents. Le cas bijectif est accompagné d'une coloration forte, définie par 3 pôles  $AR$ . Le cas "faiblement non bijectif" est considéré avec 2 pôles  $AR$ , et finalement le cas non bijectif avec seulement 1 pôle (faible coloration). Les trois modèles que l'on se propose d'identifier sous l'approche Bayésienne décrite plus haut sont:

$$\begin{aligned} \text{type (1): } & \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = [3 \quad 0 \quad 1] \\ \text{pôles} = [0.9 e^{2i\pi \cdot 0.1} \quad 0.9 e^{-2i\pi \cdot 0.1} \quad 0.7] \\ \mathbf{a} = [2.1562 \quad -1.8294 \quad 0.5670] \end{cases} \\ \text{type (2): } & \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = [-3 \quad -1.4 \quad 1.2] \\ \text{pôles} = [0.9 \quad -0.7] \\ \mathbf{a} = [0.2 \quad 0.63] \end{cases} \\ \text{type (3): } & \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = [5 \quad -1.5 \quad 0 \quad 1] \\ \text{pôles} = [0.8] \quad \mathbf{a} = [0.8] \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque les algorithmes stochastiques sont eux-même des variables aléatoires, leurs performances doivent être analysées à l'aide de moyens probabilistes. Nous avons donc conduit une étude de Monte Carlo, en générant 1000 échantillons de taille  $N = 2000$  de chacun des modèles  $H$ -ARMA ci-dessus. Chaque chaîne de Markov a été conduite jusqu'à convergence et les estimateurs choisis sont la moyenne des 10% derniers échantillons. Nous avons représenté les histogrammes de ces estimateurs, qui approchent les densités *a posteriori* des différents paramètres (linéaires et non linéaires). Ceux-ci sont représentés sur les courbes (1)-(3)

Les simulations montrent les résultats suivants:

- les modèles non-linéaires inversibles sont clairement identifiable, même lorsque l'entrée est fortement corrélée. La figure 1 pour les modèles de type (1) montrent que les estimateurs obtenus sont bons, pour les parties linéaire et non-linéaire.
- quand le polynôme devient non-bijectif, l'estimation des paramètres devient moins précise, spécialement pour les coefficients non linéaires. Cependant, le

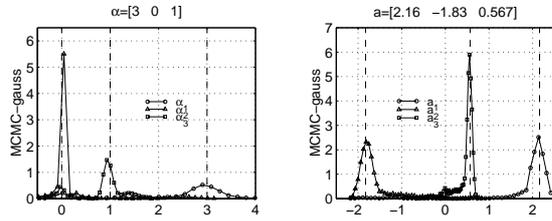


FIG. 1: Histogrammes de la densité a posteriori des paramètres H-ARMA. Résultats pour les processus du type (1).

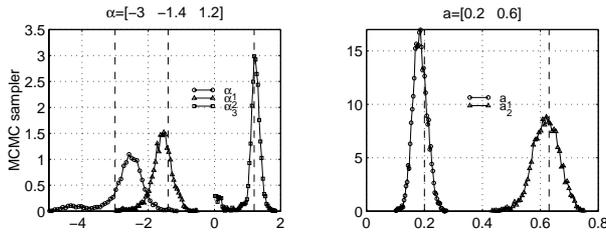


FIG. 2: Histogrammes de la densité a posteriori des paramètres H-ARMA. Résultats pour les processus du type (2).

problème auquel on est confronté est très difficile et les résultats présentés sur les figures 2 et 3 restent de bonne qualité.

- Nous avons étudié d'autres types d'algorithmes dans [1]: un autre algorithme MCMC utilisant une densité de proposition multimodale, ainsi qu'une version stochastique de l'algorithme EM. Le premier accroît fortement la complexité calculatoire pour un gain de performance négligeable, alors que le second, sous-optimal, possède de nombreux minima locaux et se comporte de façon désastreuse lorsque la non-linéarité devient trop "sévère".

## 6 Discussion and perspectives

Une première remarque est que la stratégie combinant l'augmentation de modèle par variables d'état cachées et l'utilisation d'échantillonneurs Bayésiens répond de façon satisfaisante au problème d'estimation des modèles H-ARMA. La qualité des estimateurs produits est dépendante de la "non bijectivité" plus ou moins forte de la non-linéarité. Ceci est important, puisque les méthodes classiques d'identification (maximum de vraisemblance, méthodes de cumulants, etc) sont déficientes pour cette classe de modèles. C'est donc un point de départ intéressant quant à l'élaboration de stratégies élaborées pour résoudre des problèmes du type: *identification de modèles non inversibles*. Des améliorations possibles de l'algorithme MCMC proposé ici sont: (i) l'introduction d'une méthode de recuit simulé à l'intérieur des étapes de Metropolis-Hastings, ce qui assurerait la convergence des chaînes de Markov générées vers le maximum a posteriori global du processus d'état, (ii) la "Rao-Blackwellisation" des chaînes générées, tirant avantageusement parti de la faible probabilité d'acceptation dans la simulation du processus d'état. Ces aspects sont à l'étude

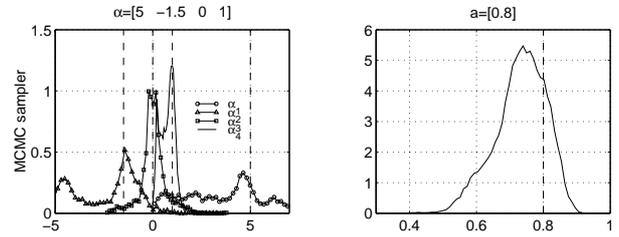


FIG. 3: Histogrammes de la densité a posteriori des paramètres H-ARMA. Résultats pour les processus du type (3).

et ferons l'objet de futures communications.

## Références

- [1] D. Declercq. *Apport des Polynômes d'Hermite à la Modélisation non Gaussienne et Tests Statistiques Associés*. PhD thesis, ETIS CNRS-URA 2235, Cergy France, Oct. 1998.
- [2] D. Declercq and P. Duvaut. Bayesian blind identification of nonlinear h-arma models. *submitted IEEE Trans. Inf. theo.*, Nov. 1998.
- [3] D. Declercq and P. Duvaut. Inversion of h-arma models. In *EUSIPCO-98*, Rhodes, 1998.
- [4] D. Declercq and P. Duvaut. Nonlinear h-arma models. In *ICASSP-98*, Seattle, 1998.
- [5] A. Doucet and P. Duvaut. Bayesian estimation of state space models applied to deconvolution of bernoulli-gaussian processes. *Sig. Proc.*, 57:147–161, 1997.
- [6] P. Duvaut and D. Declercq. Real and complex qarma processes. *J. Frank. Inst.*, 333-B(3):413–424, 1996.
- [7] S. Frühwirth-Schnatter. Data augmentation and dynamic linear models. *J. Time Ser. Anal.*, 15:183–202, 1994.
- [8] Kerpez and al. High bit rate asymmetrical digital communications over telephone loops. *IEEE Trans. On Comm.*, 43(6), 1995.
- [9] V. Castellani S. Benedetto, E. Biglieri. *Digital Transmission Theory*. Prentice-Hall, 1987.
- [10] N. Shephard. Partial non-gaussian state space. *Biometrika*, 81:115–131, 1994.