Dix-septième colloque GRETSI, Vannes, 13-17 septembre 1999

Fonctionnelle de vraisemblance moyennée et statistiques d'ordre supérieur

Christophe Le Martret

DGA/CELAR
35170 Bruz, France
lemartre@celar.fr

Résumé – Cet article traite de l'approximation de la fonctionnelle de vraisemblance moyennée dans le contexte gaussien. Cette fonction, utilisée dans le cas de la classification ou de l'estimation à hypothèses composées, est obtenue en prenant la moyenne de la vraisemblance par rapport aux paramètres aléatoires dont on connait la densité de probabilité. Nous montrons qu'il est possible d'exprimer cette fonction par un développement faisant intervenir explicitement des statistiques d'ordre supérieur. L'expression obtenue s'interprète comme la somme pondérée d'une intercorrélation entre des «moments intégrés» du signal de référence et des moments estimés de l'observation. Elle permet d'obtenir simplement des tests pratiques à mettre en œuvre et nous montrons ici à titre d'exemple comment obtenir les équations du détecteur multicycle à l'ordre quatre.

Abstract – This paper deals with the approximation of the Average Likelihood Function in the gaussian context. This function used in the case of classification or estimation with composite hypotheses is obtained by averaging the Likelihood Function over the random parameters for which the Probability Density Function is assumed to be known. We show that it is possible to express this function by a development using the Higher-Order Statistics. The obtained expression turns to be a weighted sum of the cross-correlation between some «integrated moments» of the reference signal and estimated moments of the observation. This expression allows to easily obtain practical tests and as an example we derive here the equations of the fourth-order multicycle detector.

1 Introduction

Soit $s(t,\theta,\psi)$ un signal aléatoire complexe où θ est un ensemble de variables aléatoires de densité de probabilité connue $p_\theta(\theta)$ et ψ un ensemble de variables déterministes (connues ou inconnues). Les problèmes de classification ou d'estimation relatifs à ce type de signal sont qualifiés de problèmes à *hypothèses composées* [1]. La solution Bayesienne à ce type de problème conduit à calculer la Vraisemblance Moyennée (VM) (Average Likelihood Function en anglais, [2]) obtenue comme la moyenne de la vraisemblance par rapport à la loi des paramètres aléatoires :

$$V_M(r) = \mathrm{E}_\theta\left[V_\theta(r)\right]$$

où $V_\theta(r) = p_{R|\theta}(r,\theta)$ est la vraisemblance de l'observation r à θ fixé.

Nous supposons disposer, sur un horizon fini de duré T, de l'observation $r(t)$ de $s(t,\theta,\psi)$ (que nous appelerons la référence) noyée dans du bruit blanc gaussien centré de densité spectrale de puissance monolatérale N_0. Sa vraisemblance est alors donnée classiquement (à un facteur près) par :

$$V_\theta(r) = \exp\Big\{-\frac{2}{N_0}\int_T |s(t,\theta,\psi)|^2 - 2\mathrm{Re}\left\{r(t)\cdot\bar{s}(t,\theta,\psi)\right\}dt\Big\} \qquad (1)$$

où $\bar{s}$ est le conjugué de s. Par la suite, pour simplifier l'écriture, on remplacera la notation de l'intégrale $\int_T dt$ par $\int dt$ et $s(t,\theta,\psi)$ par $s(t)$. Ainsi, par exemple, l'estimation d'un paramètre inconnu déterministe de $s(t)$ sera obtenu en résolvant :

$$\tilde{\psi}_e = \arg\max_{\psi_e} \mathrm{E}_\theta\left[V_\theta(r)\right]$$

ou la détection de $s(t)$ dans du bruit blanc gaussien par :

$$\mathrm{E}_\theta\left[V_\theta(r)\right] \gtrless s.$$

Parmi les nombreux problèmes de classification ou d'estimation qui peuvent être résolus en utilisant la VM on peut citer ceux relatifs aux signaux rencontrés dans les télécommunications numériques. En effet, en supposant que les symboles du signal reçu sont inconnus, on peut alors identifier l'ensemble θ aux symboles transmis pendant la durée d'observation. L'approche Bayesienne est alors ici justifiée puisqu'à chaque modulation numérique correspond de manière bi-univoque une distribution de probabilité des symboles. Cette approche constitue ainsi une alternative intéressante à une approche de type maximum de vraisemblance généralisé dont la complexité croît de manière exponentielle avec la longueur de l'observation.

Malheureusement dans la plupart des cas il n'existe pas d'expression exacte de la vraisemblance moyennée et plusieurs auteurs ont proposé des approximations afin d'obtenir des tests calculables. Toutes les solutions étudiées (essentiellement appliquées à la classification de modulation [3]) correspondent à des cas particuliers pour une distribution particulière. La solution consistant alors à calculer l'espérance de (1) (ce qui est simple compte tenu du caractère discret de la densité) puis à effectuer des développements en série du résultat obtenu.

Nous avons récemment proposé une autre approche [4] consistant à réaliser le développement en série de l'exponentielle dans (1) puis de prendre l'espérance. Les premiers résultats ont montré que cette technique (qui fait apparaître des statistiques d'ordre supérieur) permettait de retrouver simplement les équations des classifieurs et a permi de généraliser ceux de [3]. L'expression de la VM obtenue dans [4] négligeait le terme d'énergie dû à la référence $s(t)$ comme cela est fait classiquement (*e.g.* [3]). Mais, mis à part le fait que cela simplifie beaucoup les calculs il n'y a pas de raisons pour négliger ce terme qui dépend des paramètres aléatoires θ.

Nous généralisons ici les résultats précédents suivant deux directions :

1) nous donnons l'expression exacte du développement de la vraisemblance moyennée (en incluant les termes d'énergie) en fonction des statistiques d'ordre supérieur et donnons les expressions analytiques dans le cas où $s(t)$ est stationnaire et cyclostationnaire ;

2) nous donnons une interprétation plus fine des différents termes qui peuvent s'interpréter comme une intercorrélation entre des «moments intégrés» (terme dont on verra la signification au paragraphe suivant) de la référence et des moments estimés de l'observation.

La section 2 est dédiée à l'établissement de l'expression générale de la vraisemblance moyennée en fonction des statistiques d'ordre supérieur. Les sections 3 et 4 donnent les expressions particulières que prend ce développement dans le cas où la référence est respectivement stationnaire et cyclostationnaire. La section 5 donne à titre d'exemple les expressions des détecteurs multicycles à l'ordre deux et à l'ordre quatre obtenus à partir de l'expression de la VM tronquée respectivement à l'ordre deux et quatre.

2 Expression générale de la VM en fonction des statistiques d'ordre supérieur

Posons $E_s = -\int |s(t)|^2\, dt$, $Z = \int r(t)\cdot \bar{s}(t)dt$. En prenant l'espérance du développement en série de l'exponentielle de (1) la vraisemblance moyennée s'écrit :

$$V_M(r) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{N_0}\right)^i \sum_{\substack{k,\ell,m=0\\ k+\ell+m=i}}^{i} \frac{\xi_{k,\ell,m}}{k!\ell!m!} \qquad (2)$$

où

$$\xi_{k,\ell,m} = \mathrm{E}_\theta\left\{Z^k\cdot \bar{Z}^\ell \cdot E_s^m\right\} \qquad (3)$$

sont des fonctions des moments d'ordre supérieur de la référence qui possèdent la propriété de symétrie suivante :

$$\xi_{k,\ell,m} = \overline{\xi_{\ell,k,m}}. \qquad (4)$$

En utilisant la notation suivante pour définir un moment d'ordre n d'un signal complexe :

$$M_{n,n-p}(t_1,t_2,\cdots,t_n) = \mathrm{E}_\theta\{s(t_1)s(t_2)\cdots s(t_p)\cdot \bar{s}(t_{p+1})\bar{s}(t_{p+2})\cdots\bar{s}(t_n)\} \quad (5)$$

et de la même manière le produit

$$R_{n,n-p}(t_1,t_2,\cdots,t_n) = r(t_1)r(t_2)\cdots r(t_p)\cdot \bar{r}(t_{p+1})\bar{r}(t_{p+2})\cdots\bar{r}(t_n) \quad (6)$$

nous pouvons réexprimer les coefficients $\xi_{k,\ell,m}$ par l'expression :

$$\xi_{k,\ell,m} = (-1)^m \int_{\underline{t}_\ell,\underline{u}_k,\underline{v}_m} M_{k+\ell+2m,k+m}(\underline{t}_\ell,\underline{v}_m,\underline{u}_k,\underline{v}_m)\cdot \bar{R}_{k+\ell,k}(\underline{t}_\ell,\underline{u}_k)d\underline{t}_\ell d\underline{u}_k d\underline{v}_m \quad (7)$$

où $\underline{x}_n = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

Cette équation peut se mettre encore sous la forme :

$$\xi_{k,\ell,m} = (-1)^m \int_{\underline{t}_\ell,\underline{u}_k} \mathcal{M}_{k+\ell,k,m}(\underline{t}_\ell,\underline{u}_k)\cdot \bar{R}_{k+\ell,k}(\underline{t}_\ell,\underline{u}_k)d\underline{t}_k d\underline{u}_\ell \quad (8)$$

avec

$$\mathcal{M}_{k+\ell,k,m}(\underline{u}_\ell,\underline{t}_k) = \int_{\underline{v}_m} M_{k+\ell+2m,k+m}(\underline{t}_\ell,\underline{v}_m,\underline{u}_k,\underline{v}_m)d\underline{v}_m \quad (9)$$

que l'on appellera «moment intégré» de puisque c'est l'intégration de $M_{k+\ell+2m,k+m}(\underline{t}_\ell,\underline{v}_m,\underline{u}_k,\underline{v}_m)$ suivant les variables v_i.

3 Le cas stationnaire

3.1 Expression générale

Si $s(t)$ est stationnaire, le moment d'ordre supérieur

$$M_{k+\ell+2m,k+m}(\underline{t}_\ell,\underline{v}_m,\underline{u}_k,\underline{v}_m)$$

devient la fonction d'autocorrelation

$$C_{k+\ell+2m,k+m}(t_1-\breve{\underline{t}}_\ell, t_1-\underline{v}_m, t_1-\underline{u}_k, t_1-\underline{v}_m)$$

avec $\breve{\underline{x}}_n = [x_2, x_3, \cdots, x_n]$,
et $a - \underline{x}_n = [a-x_1, a-x_2, \cdots, a-x_n]$.

L'expression (8) devient alors (sauf les cas particuliers mentionnés au paragraphe 3.2) :

$$\xi_{k,\ell,m} = (-1)^m \int_{\breve{\underline{t}}_\ell,\underline{u}_k} \mathcal{C}_{k+\ell,k,m}(\breve{\underline{t}}_\ell,\underline{u}_k)\cdot \bar{G}_{k+\ell,k}(\breve{\underline{t}}_\ell,\underline{u}_k)d\breve{\underline{t}}_\ell d\underline{u}_k. \quad (10)$$

où $G_{k+\ell,k}(\breve{\underline{t}}_\ell,\underline{u}_k) = \int_t R_{k+\ell,k}(t, t-\breve{\underline{t}}_\ell, t-\underline{u}_k)dt$ est une estimation temporelle de la corrélation $C_{k+\ell,k}(\breve{\underline{t}}_\ell,\underline{u}_k)$ et $\mathcal{C}_{k+\ell,k,m}(\breve{\underline{t}}_\ell,\underline{u}_k)$ est «l'autocorrélation integrée» de la corrélation d'ordre supérieur $C_{k+\ell+2m,k+m}(\breve{\underline{t}}_\ell,\underline{v}_m,\underline{u}_k,\underline{v}_m)$ suivant les variables v_i comme pour (9).

3.2 Cas particuliers

Pour quelques valeurs du triplet (k,ℓ,m) la formule (10) ne s'applique pas et prend des valeur particulières. On peut considérer trois cas :

- Cas $k \neq 0, \ell = 0, \forall m$**.**

Dans ce cas l'expression (10) ne s'applique plus, les coefficients ξ s'obtiennent en appliquant la propriété (4):

$$\xi_{k,0,m} = \overline{\xi_{0,k,m}} \qquad k \neq 0.$$

- Cas $k=0, \ell=0, m\neq 0$**.**
Dans ce cas le terme $G_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)$ n'existe pas et (10) prend la forme suivante :

$$\xi_{0,0,m} = (-1)^m \int_{\underline{\breve{t}}_m} C_{2m,m}(\underline{\breve{t}}_m, 0, \underline{\breve{t}}_m) d\underline{\breve{t}}_m$$

qui est une constante qui ne dépend pas de l'observation.
- Cas $\forall k, \ell \neq 0, m=0$**.**
L'expression (10) est bonne mais peut être simplifiée car le «moment integré» est alors égal au moment de telle sorte que (10) se réduit à :

$$\xi_{k,\ell,0} = \int_{\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k} C_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)\cdot \bar{G}_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k) d\underline{\breve{t}}_\ell d\underline{u}_k.$$

4 Le cas cyclostationnaire

4.1 Expression générale

Quand $s(t)$ est cyclostationnaire le moment d'ordre supérieur

$$M_{k+\ell+2m,k+m}(\underline{t}_\ell,\underline{v}_m,\underline{u}_k,\underline{v}_m)$$

peut se développer en série de Fourier

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} C^{\alpha}_{k+\ell+2m,k+m}(t_1-\underline{\breve{t}}_\ell, t_1-\underline{v}_m, t_1-\underline{u}_k, t_1-\underline{v}_m)\cdot e^{2i\pi\alpha t_1}$$

où $C^{\alpha}_{k+\ell+2m,k+m}(t_1-\underline{\breve{t}}_\ell, t_1-\underline{v}_m, t_1-\underline{u}_k, t_1-\underline{v}_m)$ est la fonction d'autocorrélation cyclique d'ordre supérieur et $\mathcal{A}$ l'ensemble des fréquences cycliques. L'expression (8) devient alors (sauf les cas particuliers mentionnés au paragraphe 4.2) :

$$\xi_{k,\ell,m} = (-1)^m \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_{\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k} \mathcal{C}^{\alpha}_{k+\ell,k,m}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)\cdot \bar{G}^{-\alpha}_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k) d\underline{\breve{t}}_\ell d\underline{u}_k. \quad (11)$$

où $G^{\alpha}_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k) = \int_t R_{k+\ell,k}(t, t-\underline{\breve{t}}_\ell, t-\underline{u}_k) e^{2i\pi\alpha t} dt$ est l'estimation temporelle de l'autocorrélation cyclique d'ordre supérieur $C^{\alpha}_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)$ et $\mathcal{C}^{\alpha}_{k+\ell,k,m}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)$ est «l'autocorrelation cyclique intégrée» de la corrélation cyclique d'ordre supérieur $C^{\alpha}_{k+\ell+2m,k+m}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{v}_m,\underline{u}_k,\underline{v}_m)$ suivant les variables v_i comme dans (9).

4.2 Cas particuliers

Comme pour le cas stationnaire l'expression générale (11) ne s'applique pas pour tous les triplets (k,ℓ,m). Nous pouvons considérer de même trois cas particuliers :
- Cas $k\neq 0, \ell=0, \forall m$**.**
Dans ce cas l'expression (11) n'est plus valide mais les coefficients ξ peuvent être calculés en utilisant la symétrie (4):

$$\xi_{k,0,m} = \overline{\xi_{0,k,m}} \qquad k\neq 0.$$

- Cas $k=0, \ell=0, m\neq 0$**.**
Dans ce cas le terme $G^{\alpha}_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)$ n'existe plus et (11) prend alors la forme suivante :

$$\xi_{0,0,m} = (-1)^m \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_{\underline{\breve{t}}_m} C^{\alpha}_{2m,m}(\underline{\breve{t}}_m, 0, \underline{\breve{t}}_m) d\underline{\breve{t}}_m$$

qui est une constante qui ne dépend pas de l'observation.
- Cas $\forall k, \ell\neq 0, m=0$**.**
L'expression (11) est toujours valide mais peut être simplifiée car le «moment intégré» est alors est égal au moment de telle sorte que (11) se ramène à :

$$\xi_{k,\ell,0} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_{\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k} C^{\alpha}_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)\cdot \bar{G}^{-\alpha}_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k) d\underline{\breve{t}}_\ell d\underline{u}_k.$$

5 Interprétation

Dans les deux précédentes sections nous avons donné les expressions particulières des termes $\xi_{k,\ell,m}$ suivant que $s(t)$ est stationnaire ou cyclostationnaire. D'après les expressions obtenues on constate que ces termes peuvent s'interpréter comme une intercorrélation (de retard zéro) entre «l'autocorrélation intégrée» $\mathcal{C}_{k+\ell,k,m}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)$ (resp. «l'autocorrélation cyclique intégrée» $\mathcal{C}^{\alpha}_{k+\ell,k,m}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)$) de la référence $s(t)$ et l'autocorrélation estimée $G_{k+\ell,k}(\underline{\breve{t}}_\ell,\underline{u}_k)$ (resp. «l'autocorrélation cyclique intégrée» de l'observation $r(t)$.

Finalement, au regard de l'expression (2), que le signal $s(t)$ soit stationnaire ou cyclostationnaire, la fonctionnelle de vraisemblance moyennée s'interprète comme la somme pondérée d'intercorrélations entre des «moments intégrés» de la référence et des moments estimés de l'observation à tous les ordres.

Elle peut encore s'interpréter comme la somme des sorties d'un banc de filtres adaptés dont les réponses impulsionnelles sont constituées des moments d'ordres supérieur de la référence.

6 Détecteurs multicycles

Parmi les nombreuses applications du développement de la vraisemblance moyennée nous regardons ici son application à l'obtention de détecteurs multicycles. L'objet de ces détecteurs est la détection des signaux cyclostationnaires dont les signaux de modulations numériques constituent l'exemple le plus classique. Des nombreux travaux on traité les détecteurs à l'ordre deux [5]. Nous montrons ici l'application de notre développement pour trouver le détecteur optimal. Nous montrons que nous retrouvons très simplement les résultats de Gardner [5] généralisés au cas complexe puis nous donnons les expressions du détecteur à l'ordre quatre en utilisant l'expression (2) tronquée respectivement à l'ordre deux et à l'ordre quatre. Le problème à résoudre est le test d'hypothèse suivant :

$$\begin{cases} H_0: & r(t) = b(t) \\ H_1: & r(t) = s(t) + b(t) \end{cases}$$

où $s(t)$ est le signal cyclostationnaire et $b(t)$ le bruit blanc gaussien. Si θ sont les paramètres aléatoires (les symboles dans le cas des modulations numériques), le problème est alors résolu par :

$$\mathrm{E}_\theta\left[V_\theta(r)\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} s.$$

Nous nous restreignons dans la suite a des processus aléatoires dont les moments d'ordre impairs sont identiquement nuls ce qui est généralement le cas pour les signaux modulés numériquement.

6.1 Détecteur multicycle à l'ordre deux

L'application de (11) à (2) tronquée à l'ordre deux amène l'expression suivante :

$$V_{M,2} = K_2 + \frac{1}{N_0^2}\{2\xi_{1,1,0} + \xi_{2,0,0} + \xi_{0,2,0}\} \qquad (12)$$

où $K_2 = 1 + \frac{2}{N_0}\xi_{0,0,1} + \frac{1}{N_0^2}\xi_{0,0,2}$ est une constante qui ne dépend pas de l'observation. Les expressions des différents termes de (12) sont donnés par :

$$\xi_{1,1,0} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t C_{2,1}^{\alpha}(t) \cdot \int_u \bar{r}(u)r(u-t)e^{2i\pi\alpha u}dudt$$

$$\xi_{0,2,0} = \overline{\xi_{2,0,0}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t C_{2,0}^{\alpha}(t) \cdot \int_u \bar{r}(u)\bar{r}(u-t)e^{2i\pi\alpha u}dudt$$

$$\xi_{0,0,1} = -\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} C_{2,1}^{\alpha}(0)$$

$$\xi_{0,0,2} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t C_{4,2}^{\alpha}(t,0,t)dt$$

Nous trouvons ici des résultats similaires à ceux de Gardner [5] pour le détecteur à l'ordre deux mais avec une généralisation aux signaux complexes. Dans ce cas le détecteur fait intervenir les deux moments à l'ordre deux, l'un sans conjugués, l'autre avec un conjugué. Nous pouvons constater que l'expression utilise des statistiques d'ordre quatre par le biais de la constante $\xi_{0,0,2}$ provenant du terme d'énergie de $s(t)$.

6.2 Détecteur multicycle à l'ordre quatre

De la même manière qu'au paragraphe précédent nous obtenons l'expression du détecteur multicycle à l'ordre quatre en tronquant le développement (2) à l'ordre quatre :

$$\begin{aligned} V_{M,4} = V_{M,2} + K_3 + K_4 &+ \frac{4}{N_0^3}\{\xi_{2,0,1} + \xi_{0,2,1} + 2\xi_{1,1,1}\} \\ &+ \frac{2}{3N_0^4}\{\xi_{4,0,0} + \xi_{0,4,0} + 4(\xi_{3,1,0} + \xi_{1,3,0}) \\ &+ 6(\xi_{2,2,0} + \xi_{2,0,2} + \xi_{0,2,2}) + 12\xi_{1,1,2}\} \end{aligned}$$

où $K_3 = \frac{4}{3N_0^3}\xi_{0,0,3}$ et $K_4 = \frac{2}{3N_0^4}\xi_{0,0,4}$ sont des constantes qui ne dépendent pas de l'observation. Les différents termes sont donnés par :

$$\xi_{0,0,3} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t C_{6,3}^{\alpha}(t,t,0,t,t)dt$$

$$\xi_{0,0,4} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t C_{8,4}^{\alpha}(t,t,t,0,t,t,t)dt$$

$$\xi_{1,1,1} = -\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t \mathcal{C}_{2,1,1}^{\alpha}(t) \cdot \int_u \bar{r}(u)r(u-t)e^{2i\pi\alpha u}dudt$$

$$\xi_{0,2,1} = \overline{\xi_{2,0,1}} = -\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t \mathcal{C}_{2,0,1}^{\alpha}(t) \cdot \int_u \bar{r}(u)\bar{r}(u-t)e^{2i\pi\alpha u}dudt$$

$$\xi_{0,4,0} = \overline{\xi_{4,0,0}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_{t_1,t_2,t_3} C_{4,0}^{\alpha}(t_1,t_2,t_3) \cdot \int_u \bar{r}(u)\bar{r}(u-t_1)\bar{r}(u-t_2)\bar{r}(u-t_3)e^{2i\pi\alpha u}dudt_1dt_2dt_3$$

$$\xi_{3,1,0} = \overline{\xi_{1,3,0}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_{t_1,t_2,t_3} C_{4,3}^{\alpha}(t_1,t_2,t_3) \cdot \int_u \bar{r}(u)r(u-t_1)r(u-t_2)r(u-t_3)e^{2i\pi\alpha u}dudt_1dt_2dt_3$$

$$\xi_{0,2,2} = \overline{\xi_{0,2,2}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t \mathcal{C}_{2,0,2}^{\alpha}(t) \cdot \int_u \bar{r}(u)\bar{r}(u-t)e^{2i\pi\alpha u}dudt$$

$$\xi_{1,1,2} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_t \mathcal{C}_{2,1,2}^{\alpha}(t) \cdot \int_u \bar{r}(u)r(u-t)e^{2i\pi\alpha u}dudt$$

On peut remarquer que les termes $\xi_{2,0,1}$ $\xi_{0,2,1}$ $\xi_{1,1,1}$ proviennent du degré trois du développement de (2). Ceci est dû au terme d'énergie de $s(t)$ qui fait intervenir des statistiques d'ordre quatre ; ils sont nuls lorsque ce terme est négligé.

7 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une nouvelle expression de la vraisemblance moyennée en utilisant les statistiques d'ordre supérieur. Ce développement exact (on ne néglige pas le terme d'énergie de $s(t)$) s'interprète comme la somme pondérée de l'intercorrélation entre des «moments intégrés» de la référence et des moments de l'observation, à tous les ordres. La troncation de cette expression nous permet d'obtenir simplement des tests calculables (à condition de pouvoir calculer les moments théoriques). Nous avons traité à titre d'exemple le cas des détecteurs multicycles à l'ordre deux et à l'ordre quatre.

Références

[1] P.-Y. Arquès, "Décisions en traitement du signal", Masson, 1979.

[2] Carl W. Helstrom, "Statistical Theory of Signal Detection", Pergamon Press, 1968.

[3] C.Y. Huang, A. Polydoros, "Likelihood Methods for MPSK Modulation Classification", IEEE Trans. on Communications, vol. 43, no 2/3/4, 1995.

[4] C. Le Martret, D. Boiteau, "A General Maximum Likelihood Classifier for Modulation Classification", EUSIPCO'98, Ile of Rhodes, September 7-12 1998.

[5] W. A. Gardner, "Signal Interception: A Unifying Theoretical Framework for Feature Detection", IEEE trans. on Communications, vol. 36, no. 8, August 1988.