

Critères convexes et processus auxiliaires interactifs pour la restauration d'images

Jérôme IDIER

Laboratoire des Signaux et Systèmes
Supélec, Plateau de Moulon
91192 Gif-sur-Yvette cedex, France.
idier@lss.supelec.fr

Résumé – Plusieurs éléments originaux sont proposés concernant les critères semi-quadratiques convexes et les algorithmes de minimisation associés, dans le domaine de la restauration d'image. Premièrement, les constructions de Geman & Yang et de Geman & Reynolds [1, 2] sont présentées, et des propriétés de convexité des critères semi-quadratiques résultant sont établies quand le critère de départ est non quadratique mais convexe. Deuxièmement, une méthode de construction d'énergies de Gibbs convexes à processus de ligne interactif est proposée comme extension de la construction de Geman & Reynolds, accompagnée d'un exemple illustratif en déconvolution d'image.

Abstract – Several original elements regarding convex half-quadratic criteria and associated minimization algorithms are brought for the purpose of image restoration. Firstly, Geman & Yang's and Geman & Reynolds's constructions [1, 2] are revisited, with a view to establish convexity properties of the resulting half-quadratic augmented criteria, when the original criterion is non-quadratic but convex. Secondly, a family of convex Gibbsian energies that incorporate interacting auxiliary variables is revealed as an extension of Geman & Reynolds's construction, and an illustrative application to image deblurring is considered.

1 Introduction

Les travaux présentés concernent la construction et la minimisation de critères pénalisés pour la restauration d'une image $\mathbf{x} = (x_s) \in X$ (X un ensemble fermé de \mathbb{R}^N) observée à travers une équation linéaire $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \text{bruit}$ (telle qu'en déconvolution, en débruitage, en reconstruction, en estimation spectrale de signaux et d'images). Nous nous intéressons en particulier au modèle classique d'un champ de Markov à interactions par paires, dont l'énergie de Gibbs *a posteriori* s'écrit

$$J(\mathbf{x}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{r \sim s} \phi(x_r - x_s) \quad (1)$$

où $J_0(\mathbf{x}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$. La notation $r \sim s$ décrit l'ensemble des couples de sites voisins (r, s) . ϕ est une fonction régularisante *convexe* non quadratique permettant de préserver les contours de l'image restaurée $\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in X} J(\mathbf{x})$. Dans l'expression (1), le paramètre de régularisation est pris en compte dans la définition de ϕ .

D'une façon plus générale, on peut considérer

$$J(\mathbf{x}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{c \in \mathcal{C}} \phi(\mathbf{v}_c^t \mathbf{x} - w_c), \quad (2)$$

où J_0 est une fonction quadratique quelconque, \mathcal{C} est un ensemble de cliques, les quantités scalaires w_c sont réelles, et chaque vecteur $\mathbf{v}_c \in \mathbb{R}^N$ a un support restreint à la clique c [3].

Les travaux de D. Geman *et coll.* [1, 2] ont montré l'existence de critères *augmentés* $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ associés à $J(\mathbf{x})$, au sens où

$$\inf_{\mathbf{b} \in B} K(\cdot, \mathbf{b}) = J, \quad (3)$$

pour un ensemble B à préciser. D'après (3), J et K ont même *infimum* : $\inf_{\mathbf{b} \in B, \mathbf{x} \in X} K(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \inf_{\mathbf{x} \in X} J(\mathbf{x})$; et surtout même *minimiseur* $\hat{\mathbf{x}}$, au sens où

$$\hat{\mathbf{x}} \text{ minimise } J \text{ sur } X \Leftrightarrow \exists \hat{\mathbf{b}} / (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{b}}) \text{ minimise } K \text{ sur } X \times \bar{B}.$$

Pour trouver $\hat{\mathbf{x}}$ en pratique, on a donc le choix de s'intéresser à la minimisation de J , ou bien à celle de K .

[1] et [2] construisent des critères augmentés différents :

$$K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{r \sim s} (b_{rs}(x_r - x_s)^2 + \psi(b_{rs})), \quad (4)$$

$$K_{\text{GY}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{r \sim s} ((x_r - x_s - b_{rs})^2/2 + \zeta(b_{rs})) \quad (5)$$

Dans les deux cas, on peut montrer (3) en déduisant les fonctions ψ et ζ de ϕ par dualité convexe (voir respectivement les Sections 3 et 2). Les critères augmentés K_{GR} et K_{GY} sont dits *semi-quadratiques* (SQ), comme fonctions quadratiques de \mathbf{x} lorsque les variables auxiliaires $\mathbf{b} = (b_{rs})$ sont fixées.

L'origine des critères SQ en imagerie remonte à la conception de modèles gaussiens par morceaux dans les années 80. Dans ce cadre, les variables auxiliaires sont exclusivement binaires. Elles sont interactives dans les processus de ligne [4, 5], ou découplées dans les cas plus simples [6, 7]. Dans cette dernière situation, il s'agit de critères SQ de type (4) qui peuvent s'écrire

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{r \sim s} (\lambda b_{rs}(x_r - x_s)^2 - \alpha b_{rs})$$

dans le cas discret. Ici, $b_{rs} = 0$ indique une rupture entre x_r et x_s , et chaque rupture « coûte » α . Blake & Zisserman [7] montrent alors qu'il existe un critère J de type (1),

où ϕ est une fonction quadratique tronquée, dont le critère K est une version augmentée, au sens de (3) avec $B = \{0, 1\}$. Puis Blake & Zisserman abordent le problème de la minimisation du critère non convexe J par *non convexité graduelle*, plutôt que le problème combinatoire équivalent posé par la minimisation de K .

Plus tard, D. Geman et ses collaborateurs [1, 2] généralisent la construction de Blake & Zisserman à des variables auxiliaires découplées non binaires. Ce faisant, ils renversent l'ordre de construction : ils montrent qu'il existe des critères augmentés SQ de type (4) ou (5) pour de larges classes de critères gibbsiens de type (2). De plus, [1, 2] mettent en avant les avantages structurels liés à la semi-quadraticité pour minimiser ces critères plutôt que J . Plus précisément, il s'agit de procéder par *relaxation*, c'est-à-dire en considérant le sous-problème à \mathbf{x} fixé, puis à \mathbf{b} fixé, alternativement jusqu'à convergence. Ces deux sous-problèmes sont simples, car l'un est quadratique, et l'autre est séparable. [1, 2] s'intéressent au cas où ϕ est non convexe, et développent des versions SQ du recuit simulé fondées sur le principe de l'échantillonnage alterné.

De nombreux travaux récents tels que [8–11] s'intéressent au pendant déterministe, bien adapté au cas où ϕ est convexe. En particulier, [11] baptise ARTUR une méthode de descente par relaxation appliquée à (4) et montre qu'elle converge sous certaines hypothèses techniques.

De même, l'objectif des travaux présentés ici est tout d'abord de montrer la convergence d'un schéma voisin, proposé indépendamment dans [9] dans le cas de la déconvolution 2D à noyau séparable. Mais la façon d'aborder le problème diffère de la méthode directe de [11] ; elle consiste à examiner les questions suivantes :

La convexité de ϕ entraînant celle de J , entraîne-t-elle aussi (a) celle de K_{GR} ? (b) celle de K_{GY} ? (6)

En effet, la convexité d'un critère fait partie des conditions classiques permettant d'assurer la convergence vers son minimum d'algorithmes de descente telle que la relaxation, scalaire ou par bloc, contrainte ou non, surrelaxée ou non [12]. Donc, si la réponse aux questions (6a) et (6b) est affirmative, alors la convergence est assurée pour une très grande classe d'algorithmes, sans nécessiter une nouvelle étude de type [11] pour chaque cas. La convexité du critère K_{GY} est établie en Section 2. Celle de K_{GR} , plus délicate, est étudiée en Section 3. Par manque de place, les résultats sont énoncés sans démonstration ; se reporter à [3] pour un document plus complet.

Finalement, la convexité des critères augmentés SQ à variables auxiliaires découplées permet, par addition de termes d'interaction convexes, d'engendrer facilement des critères convexes à variables auxiliaires *interactives*. Cette perspective est abordée et illustrée en Section 4.

2 Critères augmentés « à la Geman & Yang »

2.1 Introduction et propriétés générales

Geman & Yang [2] considèrent les fonctions ϕ , non nécessairement convexes, telles que $g(x) = x^2/2 - \phi(x)$ est

convexe. Cette condition écarte, en particulier, les fonctions *non interpolantes* (i.e., paires, concaves et croissantes sur \mathbb{R}_+) mises en avant dans [1], ainsi que les fonctions $l_p, p < 2$. Pour d'autres fonctions, une mise à l'échelle préalable est nécessaire [3, §III.B].

On peut définir la conjuguée convexe de g [13],

$$g^*(b) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (bx - g(x)),$$

puis $\zeta(b) = g^*(b) - b^2/2$, c'est-à-dire

$$\zeta(b) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (\phi(x) - (x - b)^2/2). \quad (7)$$

Par ailleurs

$$g(x) = g^{**}(x) = \sup_{b \in \mathbb{R}} (bx - g^*(b)), \quad (8)$$

d'où

$$\phi(x) = \inf_{b \in \mathbb{R}} ((x - b)^2/2 + \zeta(b)), \quad (9)$$

ce qui assure que (3) est vraie pour $K = K_{\text{GY}}$.

Que le critère K_{GY} soit convexe ou non en (\mathbf{x}, \mathbf{b}) ,

- il est quadratique en \mathbf{x} à \mathbf{b} fixé. Sa minimisation en \mathbf{x} dans le cas non contraint ($X = \mathbb{R}^N$) correspond à la résolution d'un système linéaire. Propriété remarquable, la matrice normale associée ne dépend pas de \mathbf{b} , ce dont on peut tirer parti (en précalculant son inverse ou une factorisation commode) ;
- en \mathbf{b} à \mathbf{x} fixé, il est convexe, car g^* est convexe, et séparable. Résultat classique [13], le *supremum* de (8), i.e., l'*infimum* de (9), est atteint en

$$\tilde{b}_x = g'(x) = x - \phi'(x),$$

ce qui permet de minimiser K_{GY} en \mathbf{b} à \mathbf{x} fixé, même sans expression explicite pour ζ .

2.2 Le cas où ϕ est convexe

Théorème 1 *Soit ϕ une fonction continue, (resp. strictement) convexe, satisfaisant*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x)/x^2 < 1/2,$$

et telle que $g(x) = x^2/2 - \phi(x)$ est convexe. Alors la fonction ζ définie par (7) est (resp. strictement) convexe.

Corollaire 1 *Si ϕ satisfait les conditions du Théorème 1, le critère K_{GY} défini par (5) est convexe en (\mathbf{x}, \mathbf{b}) . De plus, si J_0 est strictement convexe, ou si J et ϕ sont strictement convexes, alors K_{GY} est strictement convexe. D'autre part, si g est strictement convexe, alors K_{GY} est C^1 .*

Les conditions du Corollaire 1 permettent d'assurer la convergence d'algorithmes de relaxation sur K_{GY} tels que LEGEND [8] (voir, par exemple [12, Proposition 2.7.1]).

Parmi les fonctions régularisantes ϕ convexes utilisées en imagerie, seules les fonctions $l_p, 1 \leq p < 2$ sont exclues. En revanche, bien qu'également non C^2 , la fonction de Huber est admissible.

3 Critères augmentés « à la Geman & Reynolds »

3.1 Introduction et propriétés générales

Comme celle de K_{GV} , la construction de K_{GR} proposée ici s'appuie sur l'analyse convexe. Considérons les fonctions ϕ qui satisfont les hypothèses suivantes :

$$\phi \text{ est paire,} \quad (10)$$

$$\phi(\sqrt{\cdot}) \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+, \quad (11)$$

$$\phi \text{ est continue en zéro et } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*. \quad (12)$$

La fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x < 0, & f(x) = +\infty, \\ \forall x \geq 0, & f(x) = -\phi(\sqrt{x}), \end{cases} \quad (13)$$

est convexe sur \mathbb{R} et C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Soit f^* sa conjuguée convexe, et $\psi(b) = f^*(-b)$. Alors

$$\psi(b) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (\phi(x) - bx^2), \quad (14)$$

$$\phi(x) = \inf_{b \in \mathbb{R}} (bx^2 + \psi(b)). \quad (15)$$

De (15), il est facile de déduire (3) pour $K = K_{\text{GR}}$.

Une hypothèse très peu restrictive en pratique consiste à supposer en outre que ϕ croît moins vite que x^2 à l'infini. On peut alors résumer les propriétés de la fonction ψ sous la forme du lemme suivant.

Lemme 1 *Soit ϕ satisfaisant (10)-(12) et*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x)/x^2 = 0, \quad (16)$$

et soit $b_\infty = -f'_+(0)$ (on peut avoir $b_\infty = +\infty$). Alors

$$(i) \begin{cases} \forall b \leq 0, & \psi(b) = +\infty, \\ \psi \text{ est strictement décroissante} \\ & \text{et strictement convexe sur }]0, b_\infty[, \\ \psi \text{ est constante sur } [b_\infty, +\infty[. \end{cases}$$

(ii) *Sur \mathbb{R}_+^* , la fonction ψ définie par (14) est convexe. De plus elle est C^1 sur \mathbb{R}_+^* si (11) est remplacée par l'hypothèse stricte :*

$$\phi(\sqrt{\cdot}) \text{ est strictement concave sur } \mathbb{R}_+. \quad (17)$$

(iii) *La relation (15) peut être remplacée par*

$$\phi(x) = \inf_{b \in]0, b_\infty]} (bx^2 + \psi(b)). \quad (18)$$

Le critère augmenté K_{GR} est une fonction quadratique de \mathbf{x} à \mathbf{b} fixé, et une fonction convexe de \mathbf{b} à \mathbf{x} fixé, comme conséquence immédiate du Lemme 1. Sur cette base, ARTUR [8, 11] est un algorithme de descente par blocs sur K_{GR} dans le cas non contraint ($X = \mathbb{R}^N$) :

- le critère K_{GR} est minimisable en \mathbf{x} par résolution d'un système linéaire ;
- Les variables $b_{r,s}$ n'interagissent pas dans K_{GR} , donc la minimisation en \mathbf{b} peut être effectuée en parallèle, variable par variable. De plus l'expression du minimiseur est explicite :

$$\hat{b}_x = \begin{cases} b_\infty & \text{si } x = 0, \\ \phi'(x)/2x & \text{sinon,} \end{cases} \quad (19)$$

sans que le calcul de ψ soit nécessaire.

La variante proposée dans [9] remplace la minimisation en \mathbf{x} par une minimisation pixel par pixel, ce qui permet d'imposer des contraintes « inégalités » séparables, telles que la positivité des pixels ($X = \mathbb{R}_+^N$).

3.2 Le cas où ϕ est convexe

Contrairement à notre attente et à la situation rencontrée dans la construction « à la Geman & Yang », une simple représentation graphique de la fonction $bx^2 + \psi(b)$ infirme la conjecture (6a). En calculant le hessien de $bx^2 + \psi(b)$ dans le cas où ψ est C^2 , on peut même montrer que cette fonction n'est jamais convexe !

En revanche, il existe une transformation monotone de la variable $b \in]0, b_\infty]$ rendant le critère convexe. Ce changement de variable est

$$\begin{aligned}]0, b_\infty] &\longrightarrow I_\phi = [\phi(0), +\infty[, \\ b &\longmapsto d = \psi(b). \end{aligned}$$

Étant bijectif d'après le Lemme 1 (i), il permet d'écrire (18) sous une forme équivalente

$$\phi(x) = \inf_{d \in I_\phi} (\psi^{-1}(d)x^2 + d). \quad (20)$$

Théorème 2 *Si ϕ est une fonction convexe sur \mathbb{R} qui satisfait (10) et (11), alors la fonction $\psi^{-1}(d)x^2$ est convexe en (x, d) sur $\mathbb{R} \times I_\phi$.*

D'après (20), il est équivalent de minimiser $K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ sur $X \times]0, b_\infty]^M$ ou

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{r \sim s} (\psi^{-1}(d_{rs})(x_r - x_s)^2 + d_{rs}) \quad (21)$$

sur $X \times I_\phi^M$. Il est même équivalent de *mettre en œuvre* un algorithme de descente par relaxation sur K_{GR} ou sur \mathcal{K} (ce qui est faux pour d'autres algorithmes de descente, par exemple de type gradient). Or, dans les conditions du Théorème 2, \mathcal{K} est convexe comme somme de termes convexes. Sur cette base, et bien que \mathcal{K} ne soit pas strictement convexe, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 3 (Convergence de la relaxation SQ) *Supposons (10), (16), (17), ainsi que $b_\infty < +\infty$. Alors, dans $X \times I_\phi^M$, la limite de toute suite obtenue par relaxation sur $\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ minimise \mathcal{K} , donc J dans X .*

Une légère extension de ce résultat permet de montrer la convergence de la variante *surrelaxée* proposée dans [9]. Il permet aussi de redémontrer la convergence d'ARTUR, avec des hypothèses plus faibles que celle de [11].

Pour finir, remarquons que parmi les fonctions ϕ régularisantes convexes utilisées en imagerie, les fonctions $l_p, 1 \leq p < 2$ sont finalement exclues, car $b_\infty = \infty$ dans ce cas.

4 Énergies convexes à processus auxiliaire interactif

L'objectifs des deux sections précédentes était de montrer la convergence d'algorithmes SQ dans le cas d'un critère J convexe. De tels résultats sont utiles en imagerie dans la mesure où ces algorithmes y ont pris rapidement une place importante. En revanche, l'amélioration de la qualité des images reconstruites n'est pas concernée, car les algorithmes SQ se substituent à d'autres algorithmes

convergeant dans les mêmes conditions (gradient, relaxation sur J) pour des critères déjà connus.

Mais le Théorème 2 permet aussi de construire des nouvelles familles de critères, aux propriétés inattendues. Le principe est d'ajouter des termes à $K_{GR}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$, rendant interactives les variables de ligne et préservant la convexité du critère transformé. En s'inspirant de critères préexistants à lignes binaires interactives, difficiles et coûteux à minimiser, on peut espérer préserver au moins une partie de leurs bonnes propriétés (en termes de modèle), en se débarrassant des mauvaises (les problèmes calculatoires).

L'exploration systématique de ce principe est une vaste entreprise et pourra faire l'objet de travaux ultérieurs. Pour en montrer la viabilité, nous l'avons appliqué au modèle interactif le plus simple, qui consiste à favoriser la continuité des contours rectilignes horizontaux et verticaux dans une image [5]. Sous la forme d'un critère convexe, cet effet peut être restitué simplement en modifiant (21) sous la forme

$$J_0(\mathbf{x}) + \sum_{r \sim s} \psi^{-1}(d_{rs})(x_r - x_s)^2 + \sum_{\rho \sim \sigma} \max\{d_\rho, d_\sigma\} \quad (22)$$

en désignant par $\rho \sim \sigma$ l'ensemble des paires de variables de ligne contiguës.

La figure 1 propose un exemple en déconvolution. Deux images estimées à partir des données de la figure 1(b) sont représentées figure 1(c) et (d). La première correspond au minimum du critère (1), dans le cas de la fonction hyperbolique $\phi(x) = \lambda\sqrt{s^2 + x^2}$. La minimisation a été effectuée par l'approche semi-quadratique proposée dans [9]. Afin de faciliter les comparaisons, le paramètre de régularisation λ et le seuil s ont été ajustés artificiellement pour minimiser l'écart en norme L_1 entre le résultat et la « vraie » image (figure 1(a)). En pourcentage, cet écart vaut 14,882%. La seconde correspond au minimum d'une approximation différentiable de (22). Là encore, les paramètres de réglage ont été optimisés artificiellement. L'écart L_1 vaut maintenant 14,609%. Le gain est donc faible, mais non négligeable. Il permet d'espérer des gains plus conséquents pour des interactions de lignes plus complètes.

Références

- [1] D. Geman et G. Reynolds, « Constrained restoration and recovery of discontinuities », *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. PAMI-14, n° 3, pp. 367–383, mars 1992.
- [2] D. Geman et C. Yang, « Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization », *IEEE Trans. Image Processing*, vol. IP-4, n° 7, pp. 932–946, juillet 1995.
- [3] J. Idier, « Convex half-quadratic criteria and interacting auxiliary variables for image restoration », rapport technique, GPI-LSS, 1999.
- [4] J. Marroquin, *Probabilistic solution of inverse problems*, Thèse de Doctorat, MIT, septembre 1985.
- [5] D. Geiger et F. Girosi, « Parallel and deterministic algorithms from MRF's: Surface reconstruction », *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. PAMI-13, n° 5, pp. 401–412, mai 1991.
- [6] D. Mumford et J. Shah, « Boundary detection by minimizing functionals », in *Proc. IEEE ICASSP*, 1985, pp. 22–26.

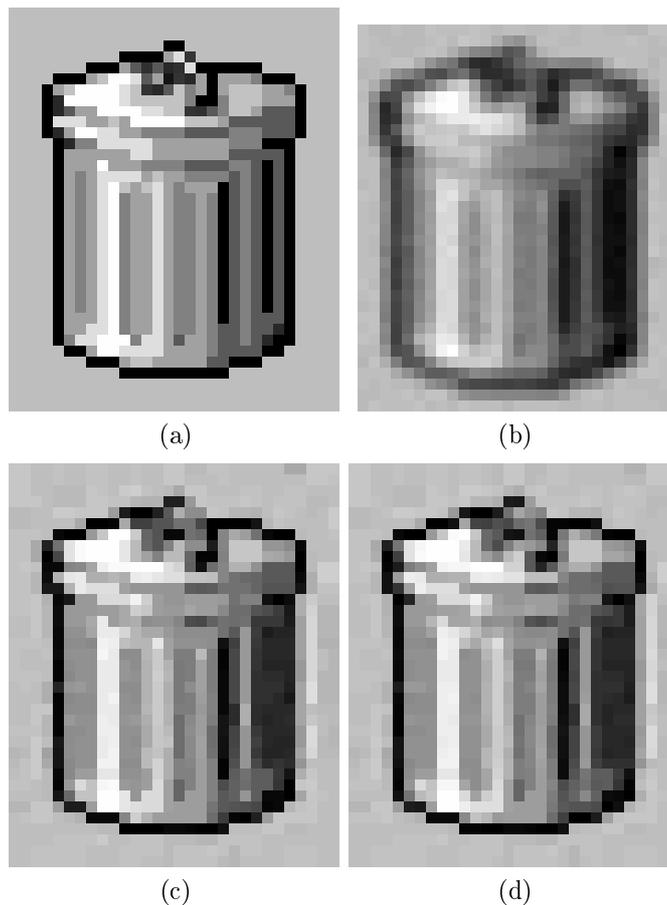


FIG. 1: (a) Image originale 37×30 codée en valeurs entières sur 256 niveaux. (b) Image observée à travers une convolution et un bruitage gaussien d'écart-type 2,30. (c) Image estimée par minimisation d'un critère convexe de type (1). (d) Image obtenue par minimisation d'un critère convexe à variables auxiliaires interactives de type (22).

- [7] A. Blake et A. Zisserman, *Visual reconstruction*, The MIT Press, Cambridge, 1987.
- [8] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud, « Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging », in *Proc. IEEE ICIP*, 1994, vol. 2, pp. 168–172.
- [9] S. Brette et J. Idier, « Optimized single site update algorithms for image deblurring », in *Proc. IEEE ICIP*, Lausanne, Switzerland, septembre 1996, pp. 65–68.
- [10] L. D. Cohen, « Auxiliary variables and two-step iterative algorithms in computer vision problems », *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 6, pp. 59–83, 1996.
- [11] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud, « Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging », *IEEE Trans. Image Processing*, vol. IP-6, n° 2, pp. 298–311, février 1997.
- [12] D. P. Bertsekas, *Nonlinear programming*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995.
- [13] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.