

Analyse Théorique de la Capacité de Poursuite du Gradient Stochastique : Cas de non Stationnarités Markoviennes et d'Entrées Corrélées

Sofia BEN JEBARA^{1,2}, Meriem JAIDANE²

¹SUP'COM, Route de Raoued, Km3.5 Cité El Ghazala 2083, Tunis, TUNISIE

²L.S.Télécoms, ENIT, Campus Universitaire, Le Belvédère, Tunis, TUNISIE
sofia.benjebara@supcom.rnu.tn,meriem.jaidane@enit.rnu.tn

Résumé – Dans cet article, nous présentons une analyse de l'influence de la corrélation de l'entrée et du système, sur la capacité de poursuite de l'algorithme du gradient stochastique. Cet algorithme est utilisé en identification d'un système non stationnaire dont les variations sont modélisées par un markovien d'ordre 1. Cette analyse est possible grâce à une approche analytique permettant la mesure de la capacité de poursuite pour une large gamme du pas d'adaptation. Nous montrons grâce à cette analyse la diversité des situations possibles de l'influence de la corrélation de l'entrée et du système.

Abstract – This paper presents an analysis of the input and the system correlation influence on the tracking capabilities of the LMS algorithm. This algorithm is used in order to identify system variations modeled by a first order markovian model. This analysis is made possible through an analytic approach developed in this paper, for a wide range of step size. We show in particular the diversity of situations related to the input and the system correlation.

1 Introduction

La maîtrise des performances des algorithmes d'adaptation en contexte d'identification d'un système non stationnaire est un problème difficile abordé ici dans un contexte spécifique. On s'intéresse ainsi plus particulièrement aux variations aléatoires de type markoviennes de la réponse impulsionnelle du système. De telles variations approchent la réalité physique de divers canaux de transmission. Les travaux menés dans ce sens ont permis de conclure sur la capacité de poursuite dans le cas d'une entrée blanche ([1][2] par exemple). Dans le cas d'une entrée corrélée qui représente la réalité de nombreux contextes de transmission, les études se placent dans le cas des faibles pas d'adaptation ou des faibles non stationnarités ([3]). Récemment, une formulation compacte utilisant le caractère alphabet fini de l'entrée a été proposée pour les entrées corrélées et pour tous les pas d'adaptation ([4]).

Cet article présente une autre approche, qui contrairement aux approches classiques permettra une analyse analytique de la capacité de poursuite pour une large gamme du pas d'adaptation, incluant le pas d'adaptation optimal. Grâce à cette analyse, une interprétation immédiate de l'influence des car-

actéristiques de l'entrée et du système sur la capacité de poursuite de l'algorithme du Gradient Stochastique est possible. Cette analyse permettra de dégager la diversité des situations possibles; les résultats obtenus généralisent ainsi ceux obtenus dans le cas de variations de type promenade aléatoire ([5]).

2 Mesure Analytique de la Capacité de Poursuite du GS

2.1 Contexte de l'étude

Les variations de la réponse impulsionnelle $F(k)$ du système sont modélisées par un markovien d'ordre 1 ($0 \leq \eta < 1$) :

$$F(k+1) = (1 - \eta)F(k) + \Omega(k+1) \quad (1)$$

où chaque composante $\omega_i(k)$, $i = 0..N-1$ de $\Omega(k)$ est une séquence indépendante de l'entrée $x(k)$ et du bruit additif de sortie $b(k)$ de puissance P_b . Le système inconnu $F(k)$ est identifié en utilisant l'algorithme du gradient stochastique (GS) :

$$H(k+1) = H(k) + \mu e(k)X(k) \quad (2)$$

où $e(k) = y(k) - H(k)^T X(k)$ est l'erreur d'estimation, $X(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1)]^T$ est le

vecteur d'observation de l'entrée et $\mu > 0$ est le pas d'adaptation.

Les critères de mesure de performances sont l'Erreur Quadratique Moyenne Normalisée :

$$EQMR = \frac{E\{e(k)^2\} - P_b}{P_b} \quad (3)$$

et la Déviation Quadratique Moyenne :

$$DQM = E\{V(k)^T V(k)\} \quad (4)$$

où $V(k) = H(k) - F(k)$ est le vecteur déviation.

2.2 Approche analytique proposée

La mesure des performances est possible en utilisant le vecteur déviation. Ce dernier obéit la relation de récurrence suivante :

$$V(k+1) = [I - \mu X(k)X(k)^T] V(k) + \mu b(k)X(k) + T(k) \text{ avec } T(k) = \eta F(k) - \Omega(k+1) \quad (5)$$

En utilisant l'hypothèse classique d'indépendance entre $\{X(k)\}$ et $\{V(k)\}$, on montre que l'équation régissant la capacité de poursuite s'écrit :

$$\begin{aligned} & \mu P_x [R_x R_V + R_V R_x] \\ & - \mu^2 E\{X(k)X(k)^T R_V X(k)X(k)^T\} \\ & = \mu^2 P_b P_x R_x + E\{T(k+1)T(k+1)^T\} \\ & + [I_N - \mu P_x R_x] E\{V(k)T(k+1)^T\} \\ & + [I_N - \mu P_x R_x] E\{T(k+1)V(k)^T\} \end{aligned} \quad (6)$$

où I_N est la matrice identité de taille $N \times N$,

$R_x = E\{X(k)X(k)^T\}/P_x$ est la matrice de corrélation normalisée de l'entrée, P_x est sa puissance. $R_\Omega = E\{\Omega(k)\Omega(k)^T\}/P_\omega$ est la matrice de corrélation normalisée des composantes non stationnaires du système, $R_V = E\{V(k)V(k)^T\}$ est la matrice inconnue de covariance du vecteur déviation.

La simplification des derniers termes de l'équation (6) se fait par récurrence. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} E\{T(k+1)T(k+1)^T\} &= \frac{2P_\omega R_\Omega}{2-\eta} \\ E\{V(k)T(k+1)^T\} &= E\{T(k+1)V(k)^T\} = \\ &= \frac{-\eta P_\omega R_\Omega}{2-\eta} [\eta I_N + \mu(1-\eta)P_x R_x]^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

L'équation (6) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \mu P_x [R_x R_V + R_V R_x] - \\ & \mu^2 E\{X(k)X(k)^T R_V X(k)X(k)^T\} \\ & = \mu^2 P_b P_x R_x + \frac{2\mu P_\omega}{2-\eta} P_x R_x [\eta I_N + \mu(1-\eta)P_x R_x]^{-1} R_\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

L'expression analytique de R_V est difficile à déterminer dans le cas général. Cependant, pour les faibles pas d'adaptation, le terme $\mu^2 \{X(k)X(k)^T R_V X(k)X(k)^T\}$ peut être négligé, ce qui permet d'exprimer analytiquement l' $EQMR$ et la DQM pour n'importe quel ordre du système

$$EQMR = \frac{1}{2} \left[\nu + \frac{2\delta}{2-\eta} Tr(R_x M_A R_\Omega) \right] \quad (9)$$

et

$$DQM = \frac{P_b}{2P_x} \left[\nu + \frac{2\delta}{2-\eta} Tr(M_A R_\Omega) \right] \quad (10)$$

où $\delta = NP_x P_\omega / P_b$, $\nu = \mu NP_x$ et $M_A = [\eta N I_N + (1-\eta)\nu R_x]^{-1}$.

Afin de mesurer la capacité de poursuite pour une plus large gamme de pas d'adaptation, on se propose de disséquer l'équation matricielle (8) en un ensemble d'équations linéaires. Chaque équation comprend les termes inconnus $v_{i,j}$ relatifs à la matrice R_V , les termes relatifs aux statistiques de l'entrée (statistiques d'ordre 2 P_x , $\rho_{|i-j|}^x$, statistiques d'ordre 4 de l'entrée $s_{i,j,m,n}$), les caractéristiques du système (η , P_b , P_ω), coefficients d'intercorrélation des composantes de $\Omega(k)$ $\rho_{i,j}^\omega$ et pas d'adaptation de l'algorithme μ . Ce système d'équations peut être résolu en utilisant un logiciel de calcul symbolique (Maple par exemple).

2.3 Illustration de l'approche proposée

Cette approche est illustrée dans le cas d'un système à 2 composantes corrélées ($N = 2$) et pour une entrée gaussienne. On note $\rho = E\{x(k)x(k-1)\}/P_x$ la corrélation d'ordre 2 de l'entrée et $\rho_\omega = E\{\omega_0(k)\omega_1(k)\}/P_\omega$ la corrélation dans le système.

$$EQMR = \frac{a_4 \nu^4 + a_3 \nu^3 + a_2 \nu^2 + a_1 \nu + a_0}{2(2-\eta)F_1(\nu)F_2(\nu)} \quad (11)$$

et

$$DQM = \frac{b_4 \nu^4 + b_3 \nu^3 + b_2 \nu^2 + b_1 \nu + b_0}{2(2-\eta)F_1(\nu)F_2(\nu)} \quad (12)$$

où

$$F_1(\nu) = -(1-\rho^2)\nu^2 + 3\nu - 2 \quad (13)$$

correspond au dénominateur de l' $EQMR$ dans le cas de la marche aléatoire ($\eta = 0$),

$$F_2(\nu) = (1-\eta)^2(1-\rho^2)\nu^2 + 4\eta(1-\eta)\nu + 4\eta^2 \quad (14)$$

correspond au déterminant de la matrice M_A^{-1} ,

$$\begin{cases} a_4 = (2 - \eta)(1 - \eta)^2(1 - \rho^2)^2 \\ a_3 = 2(1 - \eta)(2 - \eta)(3\eta - 1)(1 - \rho^2) \\ a_2 = 4\eta(2 - \eta)(3\eta - 2 - \eta\rho^2) + \\ \quad 4\delta(1 - \eta)(1 - \rho^2)(1 - \rho\rho_\omega) \\ a_1 = -8\eta^2(2 - \eta) - 8\delta(1 - \rho^2)(1 - 2\eta) \\ a_0 = -16\eta\delta \end{cases} \quad (15)$$

et

$$\begin{cases} b_4 = (2 - \eta)(1 - \eta)^2(1 - \rho^2) \\ b_3 = 2(1 - \eta)(2 - \eta)(3\eta - 1 + (1 - \eta)\rho^2) \\ b_2 = -4\eta(2 - \eta)(2 - 3\eta) + 4\delta(1 - \eta)(1 + 2\rho^2 - 3\rho\rho_\omega) \\ b_1 = -8\eta^2(2 - \eta) - 8\delta[(1 - 2\eta) - \rho\rho_\omega(1 - 3\eta)] \\ b_0 = -16\eta\delta(1 + \rho\rho_\omega) \end{cases} \quad (16)$$

La figure (1) représente l'évolution de l'EQMR et la DQM en fonction du pas dans le cas d'une entrée corrélée caractérisée par $\rho = 0.6$ et $P_x = 1$ et un système à 2 composantes caractérisé par $\eta = 0$, $\rho_\omega = 0$, $P_\omega = 0.005$ et $P_b = 0.1$. Les courbes traduisent les expressions analytiques pour les faibles pas d'adaptation, en utilisant l'approche proposée et les résultats des simulations. Comme prévu, ces figures montrent que l'approche proposée permet une bonne estimation des performances du Gradient Stochastique pour une large gamme du pas d'adaptation. Les approches d'approximation développées pour les faibles pas d'adaptation sont par contre limitées.

Les résultats apparemment complexes (11-16), vont permettre des interprétations intéressantes du comportement du filtre adaptatif dans diverses situations.

3 Effet de la corrélation de l'entrée et du système

3.1 Effet de la corrélation de l'entrée

Dans le cas d'un système à 2 coefficients, la figure (2) représente l'évolution de l' $EQMR_{min}$ et la DQM_{min} en fonction de la corrélation de l'entrée pour des caractéristiques différentes du système. Ces courbes sont obtenues à partir des expressions (11) et (12). L'analyse de ces figures permet de dégager les conclusions suivantes :

- Dans le cas de la promenade aléatoire ($\eta = 0$), la corrélation de l'entrée dégrade l' $EQMR_{min}$ et ceci quelle que soit la corrélation du système ([5]). Par contre, pour des variations markoviennes ($\eta = 0.1$), la corrélation de l'entrée améliore l' $EQMR_{min}$ alors que pour $\eta = 0.2$, la corrélation de l'entrée n'affecte pas l' $EQMR_{min}$. Plus précisément, pour chaque valeur de la corrélation

de l'entrée, l'adaptation est plus néfaste que l'absence de l'adaptation ($\nu_{opt} = 0$).

- Dans le cas de la DQM , la figure (2) montre que dans le cas de la promenade, la corrélation de l'entrée dégrade la DQM_{min} pour les faibles corrélations dans le système. Par contre, pour les plus fortes corrélations, il existe une corrélation optimale de l'entrée pour laquelle la capacité de poursuite est optimale. Les autres situations évoquées dans le cas de l' $EQMR_{min}$ restent valables pour les variations markoviennes.

3.2 Effet de la corrélation dans le système

Pour 3 valeurs différentes de η ($\eta = 0$, $\eta = 0.1$ et $\eta = 0.2$), on trace (voir figure (3)) l'évolution de l' $EQMR_{min}$ et la DQM_{min} pour 2 valeurs différentes de la corrélation ρ de l'entrée ($\rho = 0$ et $\rho = 0.9$). La figure (3) montre que la corrélation du système n'a aucune influence sur la capacité de poursuite lorsque l'entrée est blanche. Ce résultat est valable à la fois pour l' $EQMR_{min}$ et la DQM_{min} . Par contre, lorsque l'entrée est fortement corrélée, la corrélation du système dégrade l' $EQMR_{min}$, cette dégradation est importante pour les grandes valeurs de η . Contrairement à l' $EQMR$ qui est la seule mesurable, on peut trouver des situations pour lesquelles, la DQM_{min} qui mesure effectivement la capacité de poursuite s'améliore à mesure que la corrélation du système augmente.

4 Conclusion

Dans cet article, une analyse de l'influence des caractéristiques de l'entrée et des variations du système sur la capacité de poursuite du Gradient Stochastique (GS) pour des non stationnarités aléatoires de type markoviennes a été présentée. Cette analyse est rendue possible par une approche analytique qui a permis de mettre en évidence la diversité des situations possibles.

Références

- [1] O. Macchi, "The theory of Adaptive Filtering in Random Time-Varying Environment", A. Figueras-Vidalé 1995.
- [2] M. Turki, "Poursuite de non stationnarités en filtrage adaptatif : application aux canaux de transmission radio-mobile", Thèse de Doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunisie, 1997.

- [3] E.Eweda, "Comparison of RLS, LMS, and Sign Algorithms for Tracking Randomly Time-Varying Channels", IEEE Trans. Signal Processing, Vol 42, N 11, pp 2937-2944, Nov 1994.
- [4] H. Besbes, M.Jaidane-Saidane, J. Ezzine, " Exact Analysis of the Tracking Capability of Time-Varying Channels : The Finite Alphabet Inputs Case", IEEE ICECS, Portugal, pp 449-452, September 1998.
- [5] S. Ben Jebara, M. Jaidane-Saidane, "Best Input Choice for Optimal Tracking Randomly Time-Varying Channels : Justification of Adaptive Predictive Structure", ICASSP, Germany, pp 1957-1960, Apr 1997.

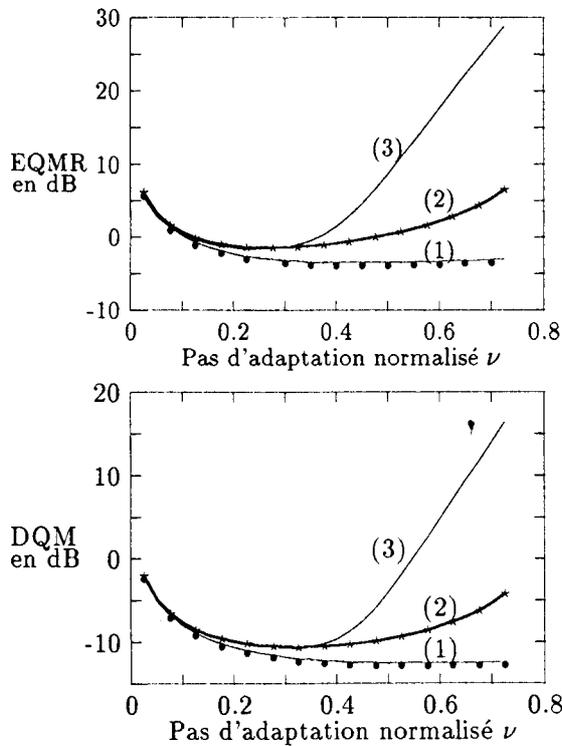


FIG. 1: Comparaison entre les résultats théoriques d'approximation pour les faibles pas d'adaptation (1), les résultats de l'approche proposée (2) et les résultats des simulations (3).

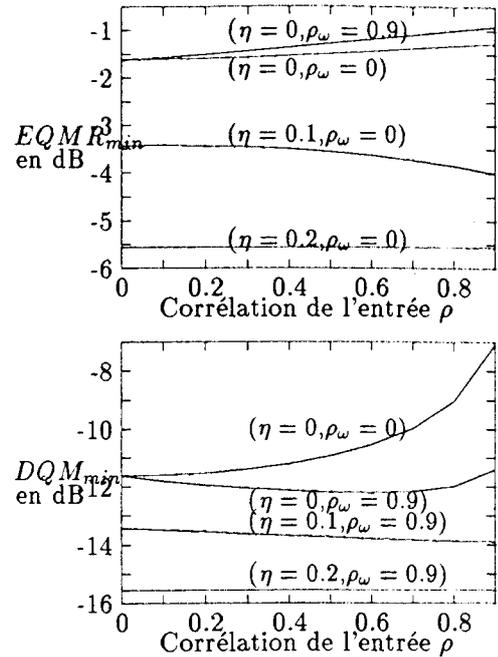


FIG. 2: Influence de la corrélation de l'entrée sur la capacité de poursuite optimale pour différentes valeurs du couple (η, ρ_ω)

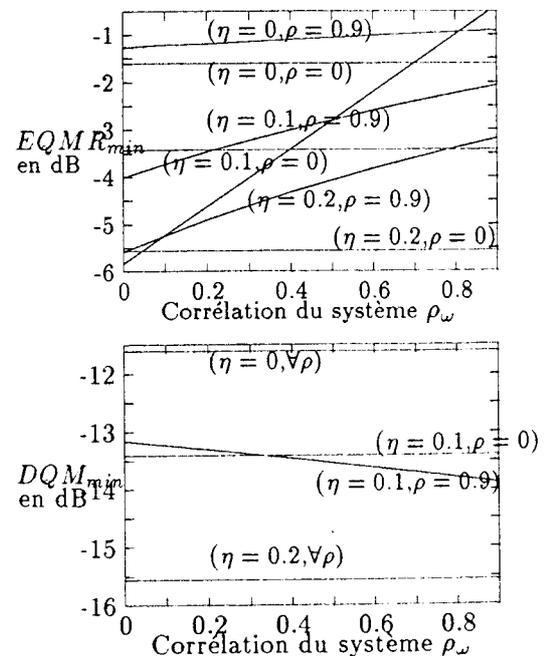


FIG. 3: Influence de la corrélation du système sur la capacité de poursuite optimale pour différentes valeurs du couple (η, ρ)