Sur les relations d'incertitude de type Mellin-Fourier

Patrick FLANDRIN

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Laboratoire de Physique (UMR 5672 CNRS)
46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07
flandrin@physique.ens-lyon.fr

Résumé – On s'intéresse au problème de la localisation simultanée dans la transformation de Mellin. On établit et discute un certain nombre d'inégalités relatives à des mesures de dispersion individuelles et conjointes. On en déduit une nouvelle forme de relation d'incertitude pour la transformée en ondelettes.

Abstract – Limitations for the simultaneous localization of Mellin transform pairs are investigated. A number of inequalities are established and discussed, based on both individual and joint various measures of spread. As a by-product, a new form of uncertainty relation for the wavelet transform is obtained.

1 Introduction

On considère en général les signaux comme des fonctions du temps t ou de la fréquence f, les deux descriptions étant mutuellement exclusives et liées par transformation de Fourier. Dans certaines circonstances, il peut cependant être utile de faire appel à d'autres transformations, au premier rang desquelles on peut citer la transformation de Mellin. Suivant [4], nous nous restreindrons ici à une forme simplifiée de cette transformation, qui s'avère bien adaptée à l'analyse des signaux analytiques, et dont la définition retenue sera :

Définition 1 *La transformée de Mellin $\underline{X}(s)$ d'un signal analytique $X(f)$ est*

$$\underline{X}(s) := \int_0^{+\infty} X(f) f^{i2\pi s - \frac{1}{2}} df. \qquad (1)$$

On peut immédiatement remarquer que cette transformée admet l'écriture équivalente :

$$\underline{X}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{X}(u)\, e^{i2\pi s u} du, \qquad (2)$$

avec $\widetilde{X}(u) := X(e^u)\, e^{u/2}$. Il apparaît ainsi que la transformée de Mellin $\{\underline{X}(s), s \in \mathbb{R}\}$, d'un signal analytique $\{X(f), f \in \mathbb{R}_+\}$, n'est autre que la transformée de Fourier d'une version convenablement anamorphosée, $\{\widetilde{X}(u), u \in \mathbb{R}\}$, de $X(f)$. Son importance en analyse du signal provient du fait qu'elle est structurellement adaptée aux changements d'échelle, au sens où si un spectre est transformé selon $X(f) \mapsto X_\alpha(f) := \alpha^{-\frac{1}{2}} X(f/\alpha)$, $\alpha > 0$, sa densité d'énergie demeure inchangée dans le domaine de Mellin : $|\underline{X_\alpha}(s)|^2 = |\underline{X}(s)|^2$.

On peut donner des interprétations différentes et complémentaires de la variable sans dimension s. La première consiste à considérer la formule d'inversion de la transformée d'un point de vue "atomique", le spectre $X(f)$ complet résultant d'une superposition linéaire d'ondes élémentaires de la forme

$$H_s(f) := f^{-i2\pi s - \frac{1}{2}}\, U(f), \qquad (3)$$

$U(f)$ désignant l'échelon unité. De telles formes d'onde ont un retard de groupe (non constant) qui a pour valeur $t_{H_s}(f) := -(1/2\pi)\,(\partial/\partial f) \arg H_s(f) = s/f$, ce qui permet d'interpréter s comme un *taux de modulation hyperbolique*. Dans cette interprétation, le paramètre sans dimension s s'avère homogène à un produit temps $\times$ fréquence, ce qui justifie une deuxième interprétation en terme d'*échelle*[1]. La raison en est que l'opérateur $\mathcal{S}$ associé à $s = tf$ (au sens, e.g., de la règle de Weyl [6, 11, 12]) est $\mathcal{S} = (\mathcal{TF} + \mathcal{FT})/2$, en notant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{F}$ les opérateurs temps et fréquence usuels, définis respectivement par $(\mathcal{T}x)(t) = t\, x(t)$ et $(\mathcal{F}x)(t) = (-i/2\pi)(dx/dt)(t)$. Il suit de cette définition que, pour tout $\alpha > 0$, on a $\left(\alpha^{i2\pi\mathcal{S}} X\right)(f) = \alpha^{-1/2}\, X(f/\alpha)$, faisant de $\mathcal{S}$ le générateur infinitésimal de l'opérateur de changement d'échelle, opérateur dont les fonctions propres sont précisément les "chirps hyperboliques" $H_s(f)$ définis en (3).

2 Inégalités pour les transformées de Mellin

2.1 Inégalités de variance

Si l'on considère les distributions d'énergie—telles que $|x(t)|^2$, $|X(f)|^2$ ou $|\underline{X}(s)|^2$—comme étant analogues à des densités de probabilité, une façon naturelle de mesurer leur degré de localisation consiste à évaluer leur dispersion autour d'une valeur centrale. Nous adopterons à cette fin les notations et conventions suivantes :

Définition 2 *Étant donnée une densité $\rho(v)$, définie sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale $E(\rho)$, sa moyenne arithmétique $m_a(\rho)$ et*

[1] Réduite à sa forme (1), la transformée de Mellin est d'ailleurs parfois appelée "transformée en échelle" [6].

sa variance arithmétique $V_a(\rho)$ sont définies par

$$m_a(\rho) := \frac{1}{E(\rho)} \int_{-\infty}^{+\infty} v\, \rho(v)\, dv, \tag{4}$$

$$V_a(\rho) := \frac{1}{E(\rho)} \int_{-\infty}^{+\infty} (v - m_a(\rho))^2\, \rho(v)\, dv. \tag{5}$$

Ceci étant posé, un résultat classique en analyse de Fourier est l'inégalité d'Heisenberg-Gabor, selon laquelle un signal $x(t)$ et son spectre $X(f)$ vérifient [13] :

$$V_a\big(|X|^2\big)\, V_a\big(|x|^2\big) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \tag{6}$$

avec égalité si et seulement si $X(f)$ (et, par suite, $x(t)$) est une fonction gaussienne de la forme :

$$X(f) = K\, \exp\big(-a(f - \log b)^2 + i(cf + d)\big), \tag{7}$$

avec $a, b \in I\!\!R_+$ et $c, d, K \in I\!\!R$.

Dans l'espace des signaux analytiques, les gaussiennes ne sont évidemment pas autorisées, avec la conséquence que la borne inférieure de cette inégalité ne peut être atteinte. On est alors en droit de chercher des inégalités de même nature, mais qui puissent s'appliquer spécifiquement aux signaux analytiques, et en particulier lorsque l'on considère la transformation de Mellin en lieu et place de celle de Fourier. Un premier résultat dans cette direction (voir [16] ou [4, Sect. 11.3.1.2]) dit qu'un signal analytique $X(f)$ et sa transformée de Mellin $\underline{X}(s)$ ont des variances arithmétiques telles que

$$V_a\big(|X|^2\big)\, V_a\big(|\underline{X}|^2\big) \geq \frac{m_a^2\big(|X|^2\big)}{16\pi^2}, \tag{8}$$

avec égalité si et seulement si $X(f)$ est une "ondelette de Klauder" de la forme :

$$X(f) = K\, \exp\left(a \log f - bf + i(c \log f + d)\right) U(f), \tag{9}$$

avec $a > -\frac{1}{2}$, $b \in I\!\!R_+$ et $c, d, K \in I\!\!R$.

Ceci fournit bien une borne inférieure pour la concentration simultanée d'un signal dans ses variables de fréquence et d'échelle (de Mellin), mais l'utilisation d'une variance arithmétique dans (8) peut être remise en cause. En effet, dans le cas des signaux analytiques, l'utilisation d'une variance ordinaire introduit une pénalisation sur les fréquences négatives qui est sans effet, puisque les signaux analytiques sont, par définition, nuls sur ce domaine. La mesure ainsi définie n'est en outre pas invariante par changements d'échelle.

2.2 Inégalités de variance modifiées

Une définition de variance, mieux adaptée aux signaux dont le spectre est sur $I\!\!R_+$ seulement, est alors la suivante :

Définition 3 *Étant donnée une densité $\rho(v)$ définie sur $I\!\!R_+$ et d'intégrale $E_+(\rho)$, sa moyenne géométrique $m_g(\rho)$ et sa variance géométrique $V_g(\rho)$ sont définies par*

$$m_g(\rho) := \exp\left(\frac{1}{E_+(\rho)} \int_0^{+\infty} \log v\, \rho(v)\, dv,\right) \tag{10}$$

$$V_a(\rho) := \frac{1}{E_+(\rho)} \int_0^{+\infty} \log^2\left(\frac{v}{m_g(\rho)}\right) \rho(v)\, dv. \tag{11}$$

On en déduit facilement (en combinant (2) et (6)) que :

Proposition 1 *Un signal analytique $X(f)$ et sa transformée de Mellin $\underline{X}(s)$ ont, respectivement, des variances géométrique et arithmétique telles que*

$$V_g\big(|X|^2\big)\, V_a\big(|\underline{X}|^2\big) \geq \frac{1}{16\pi^2}, \tag{12}$$

avec égalité si et seulement si $X(f)$ est une "ondelette d'Altes" de la forme :

$$X(f) = K \exp\left(-\frac{1}{2}\log f - a \log^2\left(\frac{f}{b}\right) + i(c \log f + d)\right), \tag{13}$$

avec $f \geq 0$, $a, b \in I\!\!R_+$ et $c, d, K \in I\!\!R$.

Remarque — La famille des signaux (13) a été introduite par R.A. Altes [1] dans un contexte de sonar actif, tel celui utilisé par les chauves-souris. Les "ondelettes d'Altes" sont en fait les solutions du problème de *tolérance à l'effet Doppler*, qui consiste à estimer un retard au mieux (i.e., sans biais et avec un rapport signal-sur-bruit de sortie maximal), en présence d'un effet Doppler de taux inconnu.

Ayant introduit la variance géométrique comme une mesure de dispersion bien adaptée aux signaux analytiques, on peut imaginer de s'en servir pour établir des inégalités relatives, non seulement à la fréquence et à l'échelle, mais aussi à la fréquence et au temps. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire la

Définition 4 *Étant donnée une densité $\rho(v)$, définie sur $I\!\!R_+$ et d'intégrale $E_+(\rho)$, sa moyenne harmonique $m_h(\rho)$ est*

$$m_h(\rho) := \left(\frac{1}{E_+(\rho)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{v}\, \rho(v)\, dv\right)^{-1}. \tag{14}$$

Moyennant cette définition, on peut montrer [10] que :

Proposition 2 *Un signal analytique $X(f)$ et sa transformée de Fourier inverse $x(t)$ ont, respectivement, des variances géométrique et arithmétique telles que*

$$V_g\big(|X|^2\big)\, V_a\big(|x|^2\big) > \frac{1}{16\pi^2 m_h^2(|X|^2)}, \tag{15}$$

sous l'hypothèse que $m_a\big(|x|^2\big) = 0$, et que $|X(f)|^2$ et $|X(f)|^2 \log f$ s'annulent lorsque f tend vers zéro et l'infini.

2.3 Limite à bande étroite

On peut remarquer de ce qui précède que, suivant le choix fait pour la mesure de dispersion, différentes solutions existent quant aux signaux "les plus concentrés". Une deuxième observation est cependant que les différentes inégalités mises en jeu (et, par suite, les différents signaux "optimaux" associés) tendent à devenir identiques dans la limite des situations *à bande étroite*. Plus précisément, il est facile de se convaincre que si une densité $\rho(v)$ existe de façon essentielle sur un support $[m_a(\rho) - \varepsilon/2, m_a(\rho) + \varepsilon/2]$, avec $\varepsilon \ll m_a(\rho)$, on a alors

$$\int_0^{+\infty} \log v\, \rho(v)\, dv \sim \log m_a(\rho)\, E(\rho) \tag{16}$$

et, par suite, $m_g(\rho) \sim m_a(\rho)$. On peut montrer de la même manière que $m_h(\rho) \sim m_a(\rho)$ et que $V_g(\rho) \sim V_a(\rho)/m^2(\rho)$, avec $m(\rho) := m_a(\rho)$, $m_g(\rho)$ ou $m_h(\rho)$, indifféremment. Par suite, en limite de bande étroite, l'inégalité (15) se réduit naturellement à l'inégalité d'Heisenberg-Gabor (6), et (12) se réduit à l'inégalité fréquence-échelle standard (8). De plus, on a dans la même limite $|\underline{X}(s)|^2 \sim |x\,(s/m(\rho))|^2\,/m(\rho)$, de telle sorte que $V_a(|\underline{X}|^2) \sim m_a^2(|x|^2)\,V_a(|x|^2) \sim m_g^2(|x|^2)\,V_a(|x|^2)$, et les inégalités (12) et (8) se réduisent toutes deux à l'inégalité d'Heisenberg-Gabor classique (6).

3 Inégalités dans le demi-plan fréquence-échelle

Les limitations à une localisation simultanée d'un signal en fréquence et en échelle ont jusqu'ici été considérées du point de vue des densités d'énergie *individuelles* dans chacune des variables. Une approche complémentaire consiste à évaluer les capacités de localisation d'une distribution *conjointe* de la fréquence et de l'échelle, en analogie avec des approches qui ont pu être suivies en analyse temps-fréquence ou temps-échelle (voir, e.g., [8, 11, 12, 15]). Pour préciser ce point, il est nécessaire de rappeler quelques éléments sur les distributions fréquence-échelle.

3.1 Distributions conjointes en fréquence et en échelle

Il existe des procédures générales permettant d'obtenir des *classes* de distributions conjointes construites sur des variables arbitraires associées à des opérateurs non commutatifs [2, 5, 6, 11, 12]. Dans le contexte fréquence-échelle, une façon de faire est d'imposer aux distributions $\check{P}_X(s,f)$ recherchées d'être covariantes aux changements d'échelle et aux décalages hyperboliques. Sous hypothèse que $\check{P}_X$ est sesquilinéaire en X, on obtient ainsi la version fréquence-échelle[2] de la classe dite "hyperbolique" [5]. Toutes les distributions de la classe hyperbolique peuvent s'exprimer à partir de l'une d'entre elles, appelée "distribution d'Altes" et notée $\check{Q}_X(s,f)$. De la même façon que la transformée de Mellin qui—suivant (2)—peut s'exprimer comme transformée de Fourier d'un signal convenablement anamorphosé, la distribution d'Altes peut s'écrire $\check{Q}_X(s,f) = W_{\widetilde{X}}(s,\log f)$, où $W_X(t,f)$ est la distribution de Wigner-Ville usuelle. Plus généralement, tous les membres de la classe hyperbolique peuvent être réécrits selon $\check{P}_X(s,f) = C_{\widetilde{X}}(s,\log f)$, où $C_X(t,f)$ est une distribution de la "classe de Cohen" [5, 6, 11, 12].

3.2 Inégalités de variance

Si l'on adopte le point de vue de caractériser un signal analytique au moyen d'une distribution fréquence-échelle, la question de sa localisation maximale dans le demi-plan peut s'aborder moyennant l'introduction de mesures de dispersion *conjointes*.

Définition 5 *Étant donnée une distribution fréquence-échelle $R(s,f)$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et d'intégrale $E(R)$ par rapport à la mesure $ds\,df/f$, sa variance arithmétique-arithmétique $V_{aa}(R)$ est*

$$V_{aa}(R) := \frac{1}{E(R)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} K_{aa}(s,f)\, R(s,f)\, ds\, \frac{df}{f}; \qquad (17)$$
$$K_{aa}(s,f) := (s - m_a(R^{(s)}))^2 + (f - m_a(R^{(f)}))^2,$$

$m_a(\rho)$ étant donné par (4), et les distributions marginales $R^{(s)}(s)$ et $R^{(f)}(f)$ définies par

$$R^{(s)}(s) := \int_0^{+\infty} R(s,f)\,\frac{df}{f}; R^{(f)}(f) := \frac{1}{f}\int_{-\infty}^{+\infty} R(s,f)\,ds.$$

De la même façon, sa variance arithmétique-géométrique $V_{ag}(R)$ est

$$V_{ag}(R) := \frac{1}{E(R)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} K_{ag}(s,f)\, R(s,f)\, ds\, \frac{df}{f}; \qquad (18)$$
$$K_{ag}(s,f) := (s - m_a(R^{(s)}))^2 + \log^2\left(\frac{f}{m_g(R^{(f)})}\right),$$

$m_g(\rho)$ étant donné par (10).

Sur la base de ces définitions, il est clair que les distributions marginales sont amenées à jouer un rôle-clé si l'on souhaite faire des mesures de dispersion conjointes un substitut convenable aux mesures individuelles utilisées précédemment. On montre ainsi [10] que

Proposition 3 *Soit $\check{P}_X(s,f)$ une distribution fréquence-échelle "à marginales correctes", i.e., telles que $\check{P}_X^{(s)}(s) = |\underline{X}(s)|^2$ et $\check{P}_X^{(f)}(f) = |X(f)|^2$, alors*

$$V_{aa}(\check{P}_X) \geq \frac{m_a(|X|^2)}{2\pi}, \qquad (19)$$

avec égalité si et seulement si $X(f)$ est une ondelette de Klauder (9). De la même façon,

$$V_{ag}(\check{P}_X) \geq \frac{1}{2\pi}, \qquad (20)$$

avec égalité si et seulement si $X(f)$ est une ondelette d'Altes (13).

Deux exemples de distributions satisfaisant ces relations sont la distribution d'Altes pré-citée et la distribution (unitaire) de Bertrand $\check{B}_X(s,f)$ [3] (voir aussi [9]).

3.3 Une relation d'incertitude pour la transformée en ondelettes

On trouve dans la littérature de nombreux commentaires relatifs aux propriétés de localisation de la transformée en ondelettes mais, à de rares exceptions près [7, 17, 18], la localisation considérée concerne en général l'*ondelette analysante* bien davantage que la *transformée*

[2]Les distributions de la classe hyperbolique sont habituellement considérées comme des distributions temps-fréquence. Afin de mettre l'accent sur leur interprétation fréquence-échelle, on adoptera la convention suivante : une distribution temps-fréquence sera écrite $P_X(t,f)$, et sa contre-partie fréquence-échelle $\check{P}_X(s,f)$, avec les équivalences $P_X(t,f) = \check{P}_X(tf,f)$ et $\check{P}_X(s,f) = P_X(s/f,f)$.

qui en résulte. Les résultats obtenus précédemment permettent d'apporter une contribution nouvelle à cette question, relativement au "scalogramme" —module carré d'une transformée en ondelettes $T_X(t,f)$—qui, même s'il ne peut s'exprimer comme une distribution fréquence-échelle *stricto sensu*, admet une version fréquence-échelle (formelle) suivant : $\left|\check{T}_X(s,f)\right|^2 := |T_X(s/f,f)|^2$.

Une définition nouvelle est nécessaire en préambule :

Définition 6 *Étant donnée une densité $\rho(v)$, définie sur $\mathbb{R}_+$ et d'intégrale $E_+(\rho)$, sa moyenne quadratique inverse $m_{iq}(\rho)$ est*

$$m_{iq}(\rho) := \left(\frac{1}{E_+(\rho)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{v^2}\,\rho(v)\,dv\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

En utilisant le fait qu'un scalogramme peut s'exprimer comme "régularisée affine" d'une distribution de Bertrand unitaire [3] et en s'appuyant sur les résultats des Propositions 1 à 3, on peut alors énoncer :

Proposition 4 *Soit $X(f)$ un signal analytique de retard de groupe nul, et tel que $f\,|X(f)|^2$ tende vers zéro lorsque f tend vers zéro et l'infini. Soit $\Psi(f)$ une ondelette de fréquence de référence $f_0 := m_g\big(|\Psi_0|^2\big)$, avec $\Psi_0(f) := f^{-1/2}\Psi(f)$. Sous l'hypothèse que $\Psi(f) \in L^2(\mathbb{R}_+, f^{-(n+1)}\,df)$ pour $n = 0, 1$ et 2, la transformée en ondelettes correspondante $\check{T}_X(s,f)$ est telle que*

$$V_{ag}\big(|\check{T}_X|^2\big) \geq \frac{D(\Psi)}{2\pi}, \tag{22}$$

avec

$$D(\Psi) := m_g\big(|\Psi_0|^2\big)\left(\frac{1}{m_{-2}(|\Psi_0|^2)} + \frac{1}{m_{-1}(|\Psi_0|^2)}\right) \geq 2. \tag{23}$$

Pour une ondelette fixée, l'égalité est de plus atteinte dans (22) pour les ondelettes d'Altes de la forme (13), avec $c = 0$.

4 Conclusion

On a présenté un certain nombre de résultats relatifs aux limitations imposées à une localisation simultanée d'un signal en fréquence et en échelle (de Mellin). Faute de place, ceux-ci n'ont pu être qu'énoncés, les preuves complètes étant données dans [10]. On trouvera par ailleurs dans la même référence des extensions et variations sur le même thème, utilisant en particulier diverses formes d'entropies comme mesures de dispersion, en lieu et place des variances considérées ici.

Remerciements — Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un séjour à l'Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge (UK). Merci à l'INI pour son accueil et son soutien, ainsi qu'à Rich Baraniuk et Guido Janssen pour leurs remarques et suggestions.

References

[1] Altes, R.A. (1976). Sonar for generalized target description and its similarity to animal echolocation systems. *J. Acoust. Soc. Am.* **59**, 97–105.

[2] Baraniuk, R.G. and Jones, D.L. (1995). Unitary equivalence: a new twist on signal processing. *IEEE Trans. on Signal Proc.* **43** (10), 2269–2282.

[3] Bertrand, J. and Bertrand, P. (1992). A class of affine Wigner functions with extended covariance properties. *J. Math. Phys.* **33** (7), 2515–2527.

[4] Bertrand, J., Bertrand, P. and Ovarlez, J.P. (1996). The Mellin transform. *The Transforms and Applications Handbook* (A.D. Poularikas, ed.). CRC Press, Boca Raton, FL, 829–885.

[5] Boudreaux-Bartels, G.F. (1996). Mixed time-frequency signal transformations. *The Transforms and Applications Handbook* (A.D. Poularikas, ed.). CRC Press, Boca Raton, FL, 887–962.

[6] Cohen, L. (1995). *Time-Frequency Analysis.* Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, NJ.

[7] Dahlke, S. and Maass, P. (1995). The affine uncertainty principle in one and two dimensions. *Computers Math. Applic.* **30** (3–6), 293–305.

[8] de Bruijn, N.G. (1967). Uncertainty principles in Fourier analysis. *Inequalities* (O. Shisha, ed.). Academic Press, New York, NY, 57–71.

[9] Flandrin, P. (1998). Separability, positivity and minimum uncertainty in time-frequency energy distributions. *J. Math. Phys.* **39** (3), 4016–4040.

[10] Flandrin, P. (1998). Inequalities in Mellin-Fourier signal analysis. Preprint NI98030-NSP, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge (UK).

[11] Flandrin, P. (1998). *Temps-Fréquence* (2ème éd.). Hermès, Paris.

[12] Flandrin, P. (1999). *Time-Frequency/Time-Scale Analysis.* Academic Press, San Diego, CA.

[13] Folland, G.B. and Sitaram, A. (1997). The uncertainty principle: a mathematical survey. *J. Fourier Anal. Appl.* **3** (3), 207–238.

[14] Hardy, G., Littlewood, J.E. and Pólya, G. (1934). *Inequalities.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[15] Janssen, A.J.E.M. (1982). On the locus and spread of pseudo-density functions in the time-frequency plane. *Philips J. Res.* **37**, 79–110.

[16] Klauder, J.R. (1980). Path integrals for affine variables. *Functional Integration: Theory and Applications* (J.P. Antoine and E. Tirapegui, eds.). Plenum Press, New York, NY, 101–119.

[17] Singer, P. (1999). Uncertainty inequalities for the continuous wavelet transform. *IEEE Trans. on Info. Theory* **45** (3), 1039–1042.

[18] Wilczok, E. (1997). Zur Funktionalanalysis der Wavelet– und der Gabor–transformation. PhD Thesis, Univ. Erlangen Nürnberg, Germany.