

Application du Formalisme Bancs de Filtres à l'OFDM/OQAM

Pierre SIOHAN, Nicolas LACAILLE *

CNET/DMR (CCETT), Groupe France Telecom
Rue du Clos Courtel, 35512 Cesson Sévigné Cedex, France
pierre.siohan@cnet.francetelecom.fr

Résumé – Nous présentons une analyse à temps discret de la modulation multiporteuse, dite OFDM/OQAM, ce qui aboutit à un modèle discret de type transmultiplexeur modulé. Par une décomposition polyphase de ce transmultiplexeur, et en supposant le canal de transmission transparent, nous déterminons les conditions à imposer à la fonction prototype de manière à annuler exactement les interférences entre symboles et celles entre canaux. Nous donnons l'expression analytique de la distorsion totale maximale pour des systèmes imparfaits, ainsi que celle de la probabilité d'erreur bit dans le cas d'un canal additif blanc et gaussien. Deux types de fonctions prototypes sont comparés.

Abstract – A discrete-time analysis is presented concerning the “so-called” OFDM/OQAM multicarrier modulation, thus leading to a discrete model of modulated transmultiplexer. By a polyphase decomposition of this transmultiplexer, and assuming a perfect transmission channel, we determine the conditions to impose to the prototype function in order to exactly cancel the intersymbol interferences and interchannel interferences. We derive the analytical expressions of the maximum overall distortion for a non-ideal system and the one of the bit error rate for an additive white gaussian channel. Two types of prototype functions are compared.

1 Introduction

Depuis plusieurs années, les modulations multiporteuses ont suscité un grand intérêt. Celui-ci se justifie, en particulier, dans le cas des communications avec les mobiles, où leur efficacité a déjà été démontrée pour la diffusion des signaux radio avec, tout d'abord, le système “Digital Audio Broadcasting” (DAB) [1].

Dans les schémas de modulations multiporteuses usuels, un ensemble de fréquences porteuses, choisi de manière à satisfaire des conditions d'orthogonalité en temps et fréquence, est multiplexé, c'est le système dit “Orthogonally Frequency Division Multiplex” (OFDM).

L'association à chacune des porteuses d'une modulation d'amplitude en quadrature, sans ou avec “offset”, produit, respectivement, les modulations OFDM/QAM et OFDM/OQAM. Cette dernière modulation peut fonctionner sans intervalle de garde et offre également une possibilité de choix plus étendue en ce qui concerne la fonction prototype.

Étant donné que dans les systèmes actuels l'essentiel de ces fonctions de modulation et de démodulation se réalise sous forme numérique, une analyse sous la forme d'un modèle discret permet d'acquérir une vision plus fine de ces modulations multiporteuses. Par une modélisation, sous forme de bancs de filtres, de toute la chaîne de transmission, nous aboutissons, pour l'OFDM/OQAM, à une forme explicite de la relation de transfert entre les données en entrée du modulateur et celles en sortie du démodulateur. Nous établissons ainsi, pour les filtres de mise en

forme, des conditions en temps discret équivalentes aux conditions d'orthogonalité définies pour le temps continu. Ces conditions nous garantissent une transmission sans interférences entre symboles (IES), ni interférences entre canaux (IEC). Pour cela, nous supposons, initialement, que le canal de transmission est parfait. Ensuite, nous déterminons l'expression de la probabilité d'erreur en tenant compte d'un bruit de canal, supposé blanc et gaussien, et du niveau de l'IES et de l'IEC.

2 Du continu au discret

La modulation OFDM/OQAM peut se définir par un signal émis tel que

$$s(t) = \sum_n \sum_{m=0}^{2M-1} a_{m,n} h(t - n\tau_0) e^{i\varphi_{m,n}} e^{2i\pi(f_0 + m\nu_0)}, \quad (1)$$

où $2M$ est le nombre de sous-porteuses, $a_{m,n}$ désigne les symboles réels transmis, τ_0 et ν_0 sont, respectivement, les espacements entre 2 symboles et 2 sous-porteuses, $h(t)$ est la fonction dite prototype. Classiquement, $\varphi_{m,n} = (m+n)\frac{\pi}{2}$ et $\nu_0\tau_0 = \frac{1}{2}$, ce qui permet, à la différence de l'OFDM/QAM où $\nu_0\tau_0 = 1$, de relâcher en partie la contrainte d'orthogonalité [2]. Par ailleurs on suppose $h(t)$ paire, i.e même prototype à l'émission et à la réception, et on pose $f_0 = 0$.

En retardant $s(t)$, et en substituant au filtre symétrique $h(t)$ sa version causale $p(t)$, on obtient, par une discrétisation

*Nicolas Lacaille est à présent à l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, rue du Château, 90010 Belfort Cedex.

sation au pas $T_e = \frac{T_0}{M}$, la version discrète de $s(t)$

$$s'(kT_e) = \sum_n \sum_{m=0}^{2M-1} a_{m,n} (-1)^{mn} e^{i\frac{\pi}{2}(m+n)} p((k-nM)T_e) e^{i\pi\frac{m}{M}(k-nM-\frac{N-1}{2})}, \quad (2)$$

où N désigne la longueur du filtre prototype. Autrement dit les filtres en sous-bande du modulateur, c'est-à-dire par dualité ceux d'un banc de synthèse, sont donnés par la relation

$$f_m(k) = p(kT_e) e^{i\pi\frac{m}{M}(k-\frac{N-1}{2})} e^{i\frac{\pi}{2}m}. \quad (3)$$

La démodulation consiste à projeter le signal reçu sur les fonctions de base. On peut montrer que, dans une formulation à temps discret, les symboles reçus s'expriment par [3]

$$\hat{a}_{m,n} = \Re\{T_e \sum_{k=0}^{N-1} s'((nM-k+N-1)T_e) e^{-i\frac{\pi}{2}n} (-1)^{nm} h_m(k)\} \quad (4)$$

avec

$$h_m(k) = p(kT_e) e^{i\pi\frac{m}{M}(k-\frac{N-1}{2})} e^{-i\frac{\pi}{2}m} f_m^*(N-1-k). \quad (5)$$

On notera dans cette expression l'analogie avec le filtrage, par un banc d'analyse, dans une sous-bande d'indice m . Afin de gérer le retard de reconstruction, on pose : $N-1 = \alpha M - \beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ et $\alpha > 1$, $0 \leq \beta < M$. Ensuite par le changement de variable $n' = n + \alpha$, on obtient le schéma de transmultiplexeur OFDM/OQAM représenté à la figure 1.

3 Description polyphase

Nous décomposons la fonction de transfert $P(z)$ du filtre prototype en fonction de ses composantes polyphases $G_l(z)$ à l'ordre $2M$, i.e. $P(z) = \sum_{l=0}^{2M-1} z^{-l} G_l(z^{2M})$. Posons ensuite

$$\mathbf{G}(z) = \text{diag}(G_0(z), \dots, G_{2M-1}(z)),$$

et introduisons les matrices de modulation \mathbf{C} et \mathbf{C}' dont les éléments se calculent par $c_{k,l} = e^{\frac{i\pi}{M}k(l-\frac{N-1}{2})} e^{-i\frac{\pi}{2}k}$ et $c'_{k,l} = e^{\frac{i\pi}{M}k(l-\frac{N-1}{2})} e^{i\frac{\pi}{2}k}$, respectivement.

Par une décomposition polyphase de type I et II [4], respectivement, pour le modulateur et le démodulateur, il est alors possible d'exprimer les matrices polyphases correspondantes, notées $\mathbf{R}(z)$ et $\mathbf{E}(z)$, en fonction des composantes polyphases de $P(z)$:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{C}\mathbf{G}(z), \mathbf{R}(z) = \mathbf{J}\mathbf{G}(z)\mathbf{C}'^T, \quad (6)$$

où \mathbf{J} désigne la matrice anti-diagonale et T l'opération de transposition.

Notons par \overleftrightarrow{TZ} la transformation en z , on utilisera la notation qui suit pour représenter les symboles réels émis, $a_{m,n} = x_m(n)$, et ceux reçus, $\hat{a}_{m,n} = \hat{x}_m(n) = \Re(\hat{x}'_m(n))$

$$\begin{cases} X_m(-iz) & \overleftrightarrow{TZ} & i^n a_{m,n} \\ \hat{X}'_m(-iz) & \overleftrightarrow{TZ} & i^n \hat{x}'_m(n) \end{cases}. \quad (7)$$

Nous obtenons ainsi la représentation polyphase du modulateur/démodulateur OFDM/OQAM de la figure 2. Ce schéma prend en compte le retard global α introduit par la chaîne de traitement et on notera que la section associée aux expandeurs, lignes à retard et décimateurs correspond à une fonction de transfert notée $\Delta_\beta(z)$.

Sous forme vectorielle, la relation d'entrée-sortie du modèle discret OFDM/OQAM s'exprime alors par

$$\hat{\mathbf{X}}'(z) = i^\alpha z^\alpha \mathbf{E}(-z^2) \Delta_\beta(iz) \mathbf{R}(-z^2) \mathbf{X}(z). \quad (8)$$

4 Orthogonalité discrète

Après développement des calculs [3], et en extrayant la partie réelle des échantillons de sortie retardés de α , la relation d'entrée-sortie du transmultiplexeur associé à de l'OFDM/OQAM, peut alors s'écrire $\hat{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{Q}(z)\mathbf{X}(z)$, où $\mathbf{Q}(z)$ se présente sous la forme d'une matrice $2M \times 2M$ telle que

$$\mathbf{Q}(z) = \begin{pmatrix} Q_0(z) & 0 & Q_1(z) & \cdots & Q_{M-1}(z) & 0 \\ 0 & Q_0(z) & 0 & \ddots & & \\ Q_1(z) & 0 & Q_0(z) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ Q_{M-1}(z) & 0 & & & & 0 \\ 0 & Q_{M-1}(z) & 0 & \cdots & 0 & Q_0(z) \end{pmatrix} \quad (9)$$

En posant $N = 2mM + r$, où r est un entier, on peut montrer que les éléments non nuls de cette matrice, pour $0 \leq k < M$, sont donnés par [3]

$$Q_k(z) = (-1)^k \sum_{l=0}^{M-1} U_l(-z^2) \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\left(l - \frac{r-1}{2}\right)\right),$$

avec

$$U_l(z) = G_l(z)\tilde{G}_l(z) + G_{l+M}(z)\tilde{G}_{l+M}(z). \quad (10)$$

Chaque composante $\hat{X}_m(z)$ du vecteur $\hat{\mathbf{X}}(z)$ est donc telle que

$$\hat{X}_m(z) = Q_0(z) X_m(z) + \sum_{k=1}^{M-1} Q_k(z) X_{2k+m}(z), \quad (11)$$

où la quantité $2k + m$ est définie modulo $2M$.

Pour éliminer l'IES et l'IEC il est donc nécessaire d'avoir, respectivement, $Q_0(z) = 1$ et $Q_k(z) = 0$, pour $0 < k < M$. On peut vérifier que pour cela

$$G_l(z)\tilde{G}_l(z) + G_{l+M}(z)\tilde{G}_{l+M}(z) = \frac{1}{M}, \quad (12)$$

est une condition suffisante [3] et nécessaire [5]. La relation (12) est celle qui garantit également la reconstruction parfaite pour des bancs de filtres modulés en cosinus ayant une fonction prototype $P(z)$ symétrique et de longueur arbitraire [6]. On peut noter que, indépendamment et par une autre approche, la condition d'orthogonalité de la fonction prototype est aussi traitée dans la référence [7].

5 Calcul des distorsions

Supposons à présent que le canal est caractérisé par un bruit blanc gaussien de densité spectrale $\frac{N_0}{2}$. Nous supposons aussi que les modulations sur chaque voie sont identiques et de type OQAM à 2^{2K} états, de sorte que chaque symbole réel $x_m(n) = a_{m,n}$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{A(-2^K + 1), A(-2^K + 3), \dots, A(2^K - 1)\}$. La distorsion totale maximale due à l'IES et l'IEC peut se calculer à partir de (11), elle s'exprime par

$$D_{max} = \frac{(2^K - 1)}{q_0(0)} \left\{ \sum_{k \neq 0} |q_0(k)| + \sum_{j=1}^{M-1} \sum_k |q_j(k)| \right\}. \quad (13)$$

Soit E_b l'énergie par élément binaire, après quelques calculs reportés en [3], la probabilité d'erreur bit pour un canal gaussien s'obtient par l'expression

$$P_{eb} = \frac{2^K - 1}{K2^K} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3KE_b}{(2^{2K} - 1)N_0}} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{T_e}{\mu^2} \sqrt{\frac{6KE_b}{(2^{2K} - 1)}} \left(\sqrt{\frac{1}{2N_0}} \right)^3 e^{-\frac{3KE_b}{(2^{2K} - 1)N_0}} \mathbf{E}(D^2) \right] \quad (14)$$

avec

$$\mathbf{E}(D^2) = \frac{2K}{T_e \mu} E_b \left[\sum_{k \neq 0} |q_0(k)|^2 + \sum_{j=1}^{M-1} \sum_k |q_j(k)|^2 \right],$$

et $\mu = \sum_k |p(k)|^2$.

6 Résultats

Le plus souvent les fonctions prototypes discrètes sont obtenues par troncation et discrétisation de fonctions continues. De ce fait elles ne satisfont pas, au moins a priori, la relation (12) et ne font que s'en approcher. Comparons de ce point de vue 2 types de fonctions vérifiant en discret la condition d'orthogonalité pour un support temporel infini :

- La fonction racine carré du cosinus surélevé (RCCS) à support fréquentiel borné et de facteur de retombée ("roll-off") noté ρ ;
- Une famille de fonctions dites gaussiennes étendues (EGF) à support fréquentiel non borné [8], que l'on caractérise ici uniquement par le facteur d'étalement de la fonction gaussienne qui lui est associée ($e^{-\pi a t^2}$).

Une illustration de chacune de ces réponses en fréquence est donnée, dans le cas discret, aux figures 3 et 4.

Posons $p = -\log_{10}(D_{max})$, le terme 10^{-p} mesure alors la précision avec laquelle chaque prototype approche l'orthogonalité parfaite, nous avons comparé pour ce critère les fonctions RCCS et EGF. Dans ce dernier cas on vérifie que p et le rapport $\frac{N}{M}$ sont reliés par [8], [3]

$$\frac{N}{M} \simeq \frac{40 \ln(10)}{\pi} \frac{p}{8.0858\alpha + 2.4142\sqrt{\alpha}} \quad (15)$$

La figure 5 illustre la validité de cette estimation. Elle montre aussi l'intérêt des EGF par rapport aux fonctions RCCS, (cf. figure 6), plus performantes et ayant de plus un comportement prédictible.

Au delà de cet exemple il faut noter également que pour les critères de distorsion maximale et de probabilité d'erreur bit :

- Les performances des EGF s'améliorent si α augmente, i.e. meilleure localisation temporelle;
- les RCCS créent une plus faible IES quand ρ atteint son maximum, i.e. $\rho = 1$, par contre l'IEC est alors plus forte. Par exemple elle est plus élevée pour $\rho = 1$ que pour $\rho = 0,5$. Et dans tous les cas les performances des fonctions RCCS restent inférieures à celles des EGF.

Après troncation du support temporel les EGF discrétisées ne satisfont plus exactement la condition d'orthogonalité discrète (12). Par une simple optimisation locale celle-ci peut toutefois être vérifiée. Ceci sans modifier notablement la réponse en fréquence initiale, si le rapport $\frac{N}{M}$ est de quelques unités, cf. figure 5. Le tableau 1 donne un exemple d'un prototype parfaitement orthogonal.

n	Coefficients	n	Coefficients
0	-1.82513475819355e-02	4	1.43374153258534e-01
1	-9.73303792007079e-03	5	2.79009078405666e-01
2	1.44612203659441e-02	6	4.14548037319676e-01
3	6.04444093102812e-02	7	4.74823350175592e-01

TABLE 1: Premiers coefficients ($p(n), 0 \leq n \leq 7$) d'un prototype EGF optimisé avec $\alpha = 1$, $M = 4$, $N = 16$.

Références

- [1] D. Pommier and Yi. Wu. Interleaving of spectrum-spreading in digital radio intended for vehicles. *EBU Rev.-Tech.*, (217):128-142, June 1986.
- [2] M. Alard. Construction d'un signal multiporteuse. Patent WO 96/35278, 1996.
- [3] N. Lacaïlle. Relations bancs de filtres-modulations multiporteuses et application à l'OFDM/OQAM. Technical report, DEA Université de Rennes I, CNET/DMR, 1998.
- [4] P. P. Vaidyanathan. *Multirate systems and filter banks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-York, New Jersey, 1993.
- [5] C. Siclet. Étude de la modulation multiporteuses biorthogonale de type BFDM/OQAM. Technical report, DEA Université de Rennes I, CNET/DMR, 1999.
- [6] T. Q. Nguyen and R. D. Koilpillai. The theory and design of arbitrary-length cosine-modulated filter banks and wavelets satisfying perfect reconstruction. *IEEE Trans. Signal Processing*, SP-44(3):473-483, March 1996.
- [7] H. Boelskei, P. Duhamel, and R. Hleiss. A design of pulse shaping OFDM/OQAM systems for wireless communications with high spectral efficiency. *Submitted to IEEE Transactions on Signal Processing*, November 1998.
- [8] P. Siohan and C. Roche. Analytical design for a family of cosine modulated filter banks. In *IEEE Int. Symp. Conf. on Circuits and Syst. (Monterey, USA)*, June 1998.

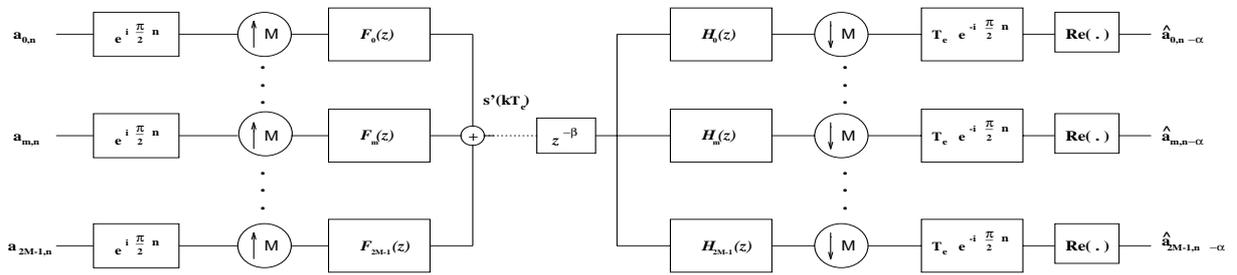


FIG. 1: Transmultiplexeur associé à l'OFDM/OQAM.

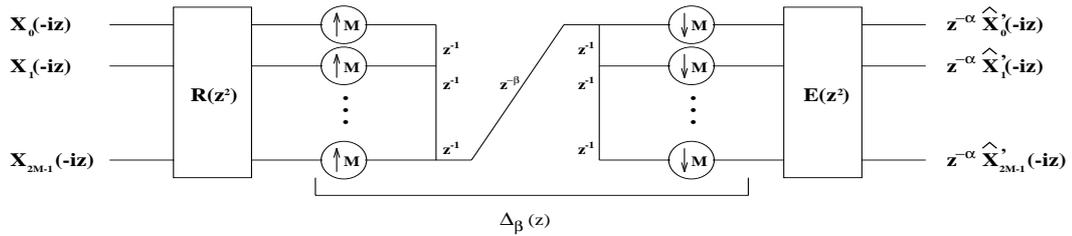


FIG. 2: Représentation polyphase d'un transmultiplexeur pour la modulation OFDM/OQAM.

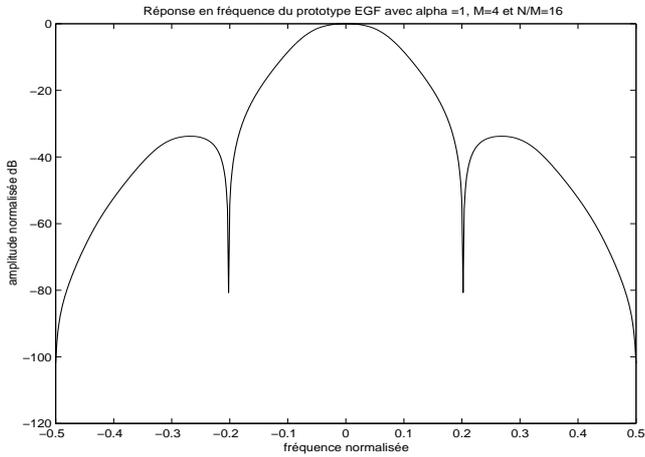


FIG. 3: Réponse en fréquence pour une fonction EGF discrétisée.

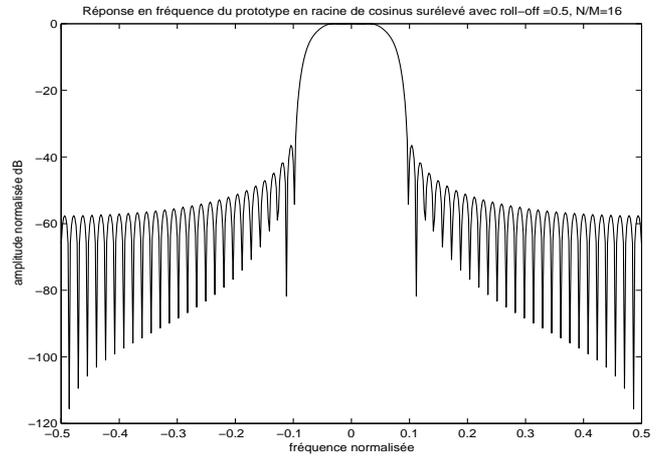


FIG. 4: Réponse en fréquence pour une fonction en Racine Carré de Cosinus Surélevé (RCCS) discrétisée.

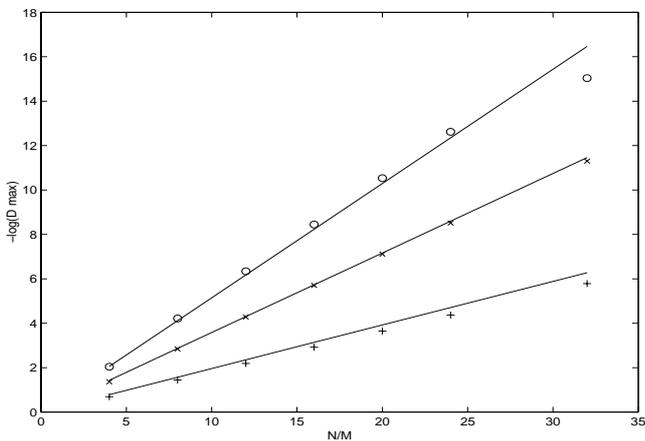


FIG. 5: Évolution du facteur de précision des EGF en fonction de $\frac{N}{M}$ pour $\alpha = 0,5$ (+), 1 (x), $1,5$ (o).

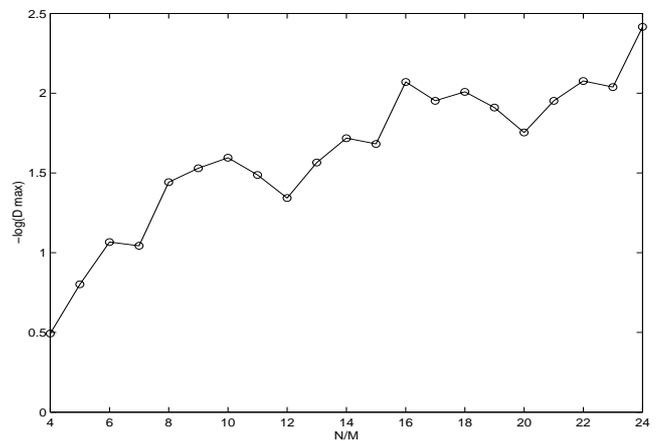


FIG. 6: Évolution du facteur de précision des RCCS en fonction du rapport $\frac{N}{M}$ pour un roll-off de $0,5$.