Dix-septième colloque GRETSI, Vannes, 13-17 septembre 1999

Localisation passive - Equivalence avec un filtre linéaire appliqué à des mesures complètes virtuelles

Michel PRENAT[1]

[1]Thomson-CSF Optronique
Rue Guynemer, BP 55, 78283 Guyancourt Cedex, France

michel.prenat@tco.thomson-csf.com

Résumé La localisation passive (BOT : Bearing-Only Tracking) est un problème d estimation non linéaire, à partir de mesures « incomplètes »; il est généralement difficile d en prévoir les performances dans les cas pratiques.
On démontre ici que le comportement *asymptotique* de l estimateur du maximum de vraisemblance est strictement le même que celui que l on obtiendrait par un filtrage linéaire de mesures *virtuelles* « complètes », entachées d erreurs de moyenne nulle et de matrice de covariance convenablement choisie.
Cette équivalence permet d utiliser le formalisme de Kalman pour prévoir le comportement optimal de l estimateur réel.

Abstract The passive localisation (BOT : Bearing-Only Tracking) is a problem of non linear estimation, from « incomplete » measures ; it is generally difficult to foresee the estimation performance in practical cases.
It is demonstrated in this paper that the *asymptotical* behavior of the maximum likelihood estimator is exactly the same as the one we could obtain by using a linear filter of *virtual* « complete » measures, with errors which have a zero mean and an adequately choosen covariance matrix.
This equivalence allows us to use the Kalman formalism in order to foresee the optimal behavior of the actual estimator.

1. Introduction

Le problème à résoudre est celui de la localisation dans l espace d un objet fixe ou mobile, à partir d un capteur, lui-même mobile, qui ne mesure que la direction de l objet (BOT : Bearings-Only Tracking).
Une façon habituelle de procéder est de choisir un modèle de mouvement pour la cible et d en estimer les paramètres ; les conditions dans lesquelles on se placera pour cet exposé sont les suivantes : la cible a un mouvement rectiligne uniforme (MRU) et les deux mobiles évoluent dans un même plan, si bien que la mesure élémentaire est réduite à un seul angle et que les paramètres à estimer sont au nombre de quatre: x, y (position), Vx, Vy (coordonnées du vecteur vitesse) ; cependant ces conditions ne sont pas limitatives pour le principe exposé : on peut l étendre au cas de mesures dans un espace 3D et d un modèle plus complexe d évolution de la cible. On suppose aussi que la mesure d angle est à erreur gaussienne de moyenne nulle.

Des travaux ont été réalisés sur les questions d observabilité et d estimabilité ; une présentation unifiée en est fournie dans [1], basée essentiellement sur la Matrice d Information de Fischer (FIM), qui donne les performances asymptotiques optimales du filtre non linéaire (performances atteintes par l estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas asymptotique).

L exposé qui suit se présente de la façon suivante, pour les conditions décrites ci-dessus :

1) ***un calcul direct de la FIM correspondant aux mesures incomplètes est mené*** ; on obtient alors une forme exacte de la FIM qui dépend explicitement de la trajectoire relative des deux objets ; cette formulation permet par exemple de retrouver la nullité du déterminant de la FIM lorsque les deux mobiles sont en MRU, mais aussi de calculer la valeur de ce déterminant en fonction des paramètres de trajectoires relatives. Cette formulation fait également apparaître l information supplémentaire apportée par chaque nouvelle mesure, information qui se présente sous la forme d une matrice dont le déterminant est nul, mais dont l ajout a pour effet d augmenter le déterminant de l information totale, et qui ne dépend que de l angle de visée et de la distance entre les deux mobiles.

2) ***un deuxième calcul de la FIM est mené en modifiant fondamentalement le modèle de mesure et le filtre associé***. Le modèle est une mesure *virtuelle* complète (les coordonnées x et y dans un repère cartésien), non biaisée, et dont la matrice de covariance est singulière : l inverse de cette matrice

s exprime de façon simple et a un déterminant nul ; le filtre associé est alors un filtre linéaire.
Le calcul de la FIM est mené de la même façon qu en 1) et l on constate que le résultat obtenu est identique. On a ainsi démontré que le comportement asymptotique de l estimateur non linéaire du maximum de vraisemblance est strictement le même que celui que l on obtient à partir d un filtrage linéaire appliqué à des mesures *virtuelles* telles que décrites ci-dessus.

3) ***le filtrage analysé en 2) est exprimé de façon récursive grâce au formalisme de Kalman*** ; on s intéresse plus particulièrement aux équations qui régissent l évolution de la matrice de covariance ou celle de son inverse (la matrice d information : voir [2]. On démontre que la formule du filtre d information est égale à l équation récursive relative à la FIM trouvée en 1).

Ceci nous conduit à la conclusion suivante:

> ***les performances asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance sur données incomplètes (qui servent de référence pour tout autre estimateur sous-optimal) peuvent être calculées en appliquant les équations du filtre de Kalman (sur la covariance ou sur l'information) à des données qui sont descriptibles de façon simple pour un problème connu; ceci permet donc d'évaluer les performances atteignables dans tous les cas de trajectographie passive***, par exemple, de façon non exhaustive:

- étude du comportement lorsque l on fait des hypothèses simplificatrices (par exemple apparition de biais si l on suppose la cible fixe dans le cas où sa vitesse est très petite devant celle du porteur),

- utilisation d un bruit d état pour ajuster les durées de filtrage en fonction des changements possibles des paramètres du modèle de trajectoire de la cible,

- étude de la variation au cours du temps de la qualité de l estimation de trajectoire, en prenant en compte d éventuelles connaissances a priori,

- etc ...

2. Calcul de la FIM dans le cas de mesures incomplètes

Considérons le schéma suivant (figure 1) :

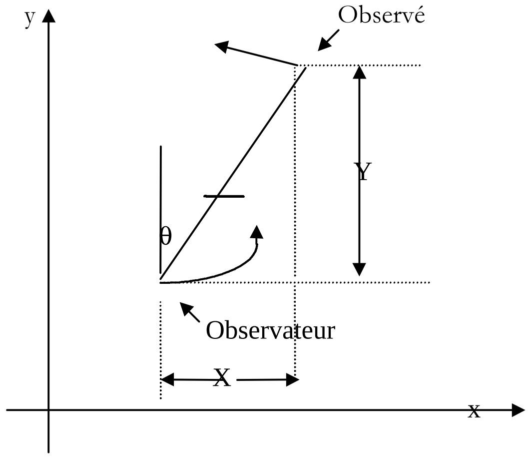

Figure 1

L observateur a un mouvement en général accéléré, l observé un mouvement rectiligne uniforme ; en appelant X et Y les *écarts* de coordonnées entre les deux mobiles, on peut donc poser, pour l échantillon numéro i:

$$X_i = X_0 + i\alpha + i^2\beta$$
$$Y_i = Y_0 + i\gamma + i^2\delta$$

il y a dans ce cas quatre paramètres à estimer : X_0, Y_0, α et γ (β et δ sont connus car ce sont les composantes de l accélération de l observateur).

Dans l hypothèse où les mesures d angle sont à erreur gaussienne, de moyenne nulle et d écart-type σi, la densité de probabilité des mesures d angle vaut:

$$p(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N) =$$

$$\frac{1}{\prod_i \sigma_i \cdot \left(\sqrt{2\cdot\pi}\right)^N} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\sum_i \frac{1}{(\sigma_i)^2}\cdot\left(\theta_i - \operatorname{arctg}\cdot\frac{X_i}{Y_i}\right)^2\right]$$

On peut calculer la FIM associée de façon classique [3], en dérivant deux fois, par rapport aux paramètres à estimer, le logarithme népérien de p ; on obtient alors :

FIM =

$$\begin{bmatrix} \sum_i \frac{Y^2}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & -\sum_i \frac{X\cdot Y}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & \sum_i \frac{i\cdot Y^2}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & -\sum_i \frac{i\cdot X\cdot Y}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} \\ -\sum_i \frac{X\cdot Y}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & \sum_i \frac{X^2}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & -\sum_i \frac{i\cdot X\cdot Y}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & \sum_i \frac{i\cdot X^2}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} \\ \sum_i \frac{i\cdot Y^2}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & -\sum_i \frac{i\cdot X\cdot Y}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & \sum_i \frac{i^2\cdot Y^2}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & -\sum_i \frac{i^2\cdot X\cdot Y}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} \\ -\sum_i \frac{i\cdot X\cdot Y}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & \sum_i \frac{i\cdot X^2}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & -\sum_i \frac{i^2\cdot X\cdot Y}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} & \sum_i \frac{i^2\cdot X^2}{\sigma^2\cdot(X^2+Y^2)^2} \end{bmatrix}$$

(les termes X, Y, σ à l intérieur des signes somme sont en fait indicés par i)

Si l on fait l approximation que la distance entre les deux mobiles est constante, le déterminant de cette FIM est égal à:

$$D = N^{16}[(X_0\delta - Y_0\beta)^2 + (\alpha\delta - \gamma\beta)(\alpha Y_0 - \gamma X_0)]^2 / (6048000\sigma^8 d^{16})$$

qui permet en particulier de voir que D = 0 (non observabilité) si l observateur est en MRU ($\beta = \delta = 0$).
L information supplémentaire apportée par chaque nouvelle mesure est égale à la matrice suivante, de rang 1:

$$\Delta(\mathrm{FIM}) = \frac{1}{\sigma^2\cdot r^4}\cdot\begin{bmatrix} Y^2 & -X\cdot Y & i\cdot Y^2 & -i\cdot X\cdot Y \\ -X\cdot Y & X^2 & -i\cdot X\cdot Y & i\cdot X^2 \\ i\cdot Y^2 & -i\cdot X\cdot Y & i^2\cdot Y^2 & -i^2\cdot X\cdot Y \\ -i\cdot X\cdot Y & i\cdot X^2 & -i^2\cdot X\cdot Y & i^2\cdot X^2 \end{bmatrix}$$

où $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ est la distance entre les deux mobiles

La formule de récurrence suivante lie les valeurs successives de la FIM :

$$\mathrm{FIM}_n = \mathrm{FIM}_{n-1} + H_n^T * R_n^{-1} * H_n$$

$$\text{avec} \quad H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n\cdot te & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n\cdot te \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad R_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2\cdot r^2}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

3. Modèle de mesure complète et filtrage linéaire

Modélisons maintenant la mesure numéro i par une mesure 'complète', non biaisée, dont l'ellipse d'erreur se présente comme suit (figure 2) : son grand axe se trouve selon l'axe observateur-observé, avec une longueur A (nombre suffisamment grand) et son petit axe a pour longueur $\sigma^2 r^2$, erreur apportée par l'imprécision de la mesure angulaire en ce point :

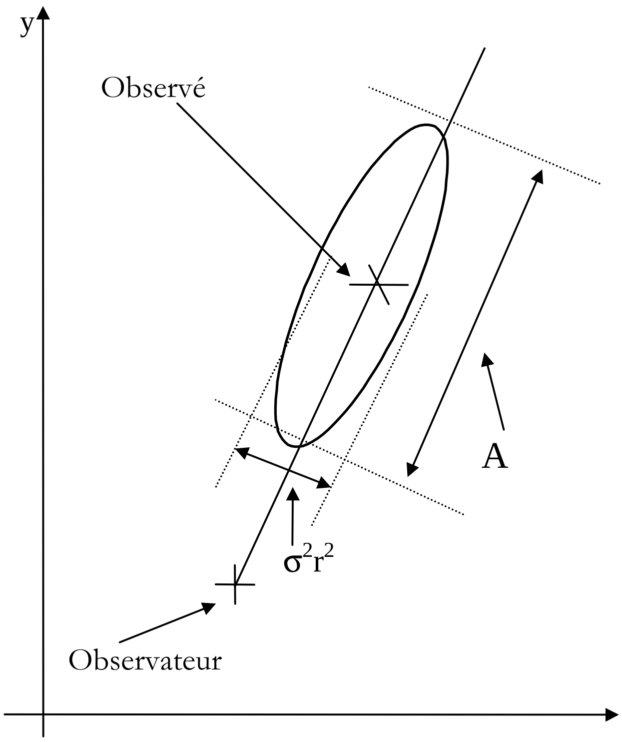

Figure 2

Lorsque A tend vers l infini, l inverse de la matrice de covariance tend vers :

$$R_\infty^{-1} = \frac{1}{\sigma^2\cdot r^4}\cdot\begin{pmatrix} Y^2 & -X\cdot Y \\ -X\cdot Y & X^2 \end{pmatrix}$$

qui est singulière, car son déterminant est nul.

Avec ce modèle, et en utilisant la même méthode de dérivation que précédemment, la FIM trouvée est égale à celle de la distribution initiale (obtenue avec des mesures angulaires seulement).

On a ainsi démontré que le comportement asymptotique de l estimateur non linéaire du maximum de vraisemblance (dit optimal) est strictement le même que celui que l on obtient à partir d un filtrage linéaire appliqué à des mesures *virtuelles* telles que décrites ci-dessus.

4. Formalisme de Kalman

Rappelons la formule générale du filtre d information [2] du formalisme de Kalman :

$$I_n = \left[F_n \cdot \left(I_{n-1}\right)^{-1} \cdot F_n^{\ T} + Q_n\right]^{-1} + H_n^{\ T} \cdot \left(R_n\right)^{-1} \cdot H_n$$

Le calcul du paragraphe 3 donne la FIM pour un filtre linéaire qui permet d estimer l état initial ; la même FIM est donc régie par la formule du filtre d information , avec une matrice de transition F égale à l identité, une matrice de bruit d état Q égale à 0 et une matrice de mesure H qui prend en compte le fait que la mesure porte sur l état courant, soit:

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \cdot te & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n \cdot te \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$I_n = I_{n-1} + H_n^{T}.R_n^{-1}.H_n$$

qui est rigoureusement identique à la formule de récurrence indiquée au paragraphe 2, qui elle-même régit l évolution de la FIM pour le filtre non linéaire du maximum de vraisemblance.
La formule générale du filtre d information ou son équivalent relatif aux matrices de covariance s applique donc pour étudier le comportement asymptotique du filtre non linéaire optimal dans les cas pratiques dont quelques exemples sont indiqués en introduction.

Références

[1] J.P. Le Cadre, *On the Properties of Estimability Criteria for Target Motion Analysis*, IEE Proc. Part F, Radar, Sonar and Navigation, 1997
[2] Brian D.O. Anderson, John B. Moore, *Optimal Filtering*, Information and System Sciences Series, Thomas Kailath Editor, 1979
[3] Van Trees, H.L., *Detection, Estimation and Modulation Theory,* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968