

# Analyse Temps-Echelle de Ruptures Noyées dans un Bruit Multiplicatif

Marie CHABERT, Jean-Yves TOURNERET et Francis CASTANIE

ENSEEIH/GAPSE

2, rue Camichel BP7122

31071 Toulouse Cedex 7

email: chabert@len7.enseiht.fr

## RÉSUMÉ

Cet article est consacré au problème de la détection de ruptures noyées dans un bruit blanc multiplicatif de moyenne nulle, à l'aide de la Transformée en Ondelette Continue (TOC). La TOC est généralement utilisée dans un contexte additif. Cet article étudie ses propriétés statistiques lorsque le bruit est multiplicatif et de moyenne nulle. Nous montrons qu'un prétraitement non-linéaire (quadratique) permet d'exploiter les bonnes propriétés de la TOC pour la détection de ruptures. Un critère de contraste, équivalent à un Rapport Signal sur Bruit (RSB), est défini dans le domaine temps-échelle. Une ondelette optimale maximisant ce RSB est déterminée lorsque la rupture est de type échelon. Pour de grandes échelles, cette ondelette est asymptotiquement optimale pour d'autres types de ruptures.

## ABSTRACT

This paper addresses the problem of abrupt change detection in signals corrupted by zero-mean multiplicative noise, using the Continuous Wavelet Transform (CWT). The CWT has been shown to be an effective tool for abrupt change detection when noise is additive. This paper proposes to use a non-linear pre-processing followed by the time-scale detector, when noise is multiplicative and zero-mean. A contrast criterion, equivalent to a SNR in the time-scale domain, is defined. There exists an optimal wavelet maximizing this SNR, for an ideal step. This wavelet is asymptotically optimal for any smooth transition.

## 1 Introduction et Formulation du Problème

Les modèles de bruit multiplicatif sont utilisés dans de nombreuses applications. Ils interviennent en traitement d'images issues de systèmes à éclairage cohérent (radar, laser) [2] et fournissent des modèles aléatoires en communication (canaux à évanouissement) [8]. Cet article est consacré au problème de la détection de ruptures noyées dans un bruit multiplicatif de moyenne nulle, à l'aide de la Transformée en Ondelette Continue (TOC). La TOC s'est avérée être un outil efficace pour la détection de ruptures lorsque le bruit est de moyenne non nulle [3]. Deux détecteurs sous-optimaux basés sur la signature de la rupture dans le domaine temps-échelle ont été mis en œuvre [4]. Ces détecteurs ont montré une grande robustesse vis-à-vis des propriétés statistiques du bruit. Malheureusement, ils ne peuvent être utilisés lorsque le bruit est de moyenne nulle. Cet article propose d'utiliser un prétraitement non-linéaire, suivi par le détecteur temps-échelle conventionnel pour la détection de ruptures, lorsque le bruit multiplicatif est de moyenne nulle. Pour des raisons de simplicité, nous étudions la non-linéarité quadratique mais d'autres non-linéarités peuvent être étudiées de manière similaire. Le problème de détection peut être exprimé comme un test d'hypothèses simples :

- Sous l'hypothèse  $H_0$ , le processus observé  $y(t)$  est un

bruit blanc  $x(t)$  de moyenne  $m_x = 0$  et de variance  $\sigma_x^2$  :

$$y(t) = x(t) \quad t \in \Omega$$

où  $\Omega$  est l'intervalle d'observation.

- Sous l'hypothèse  $H_1$ , le processus observé  $y(t)$  est modélisé par :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)s(t) = x(t) \left[ 1 + Af \left( \frac{t-t_0}{a_0} \right) \right] \\ &= x(t) [1 + Af_0(t)] \\ t &\in \Omega, A \geq 0, a_0 > 0 \end{aligned}$$

$s(t)$  est un signal déterministe de vecteur paramètres  $\underline{\theta} = (A, t_0, a_0)^t$  (amplitude, instant, dilatation).  $s(t)$  correspond à une transition de 1 à  $1+A$ . La fonction  $f$  caractérise la forme de la transition. Cette fonction est supposée bornée, positive telle que :

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \text{ pour } t \leq -\frac{T}{2} \\ f(t) &= 1 \text{ pour } t \geq \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Notons que pour  $T = 0$ ,  $s(t)$  est un échelon idéal d'amplitude  $A$  à la position  $t_0$ .

La Transformée en Ondelette Continue (TOC) de  $y(t)$  est définie par :

$$C_y(a, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt$$

avec  $\psi_{a,\tau}(t) = a^{-1/2} \psi \left( \frac{t-\tau}{a} \right) \quad a \in \mathbb{R}^*, \tau \in \mathbb{R}$

La famille de fonctions  $\{\psi_{a,\tau}\}_{a \in \mathbb{R}^*, \tau \in \mathbb{R}}$  est construite par translation et dilatation d'une fonction  $\psi$  appelée ondelette mère ( $a$  est le paramètre de dilatation,  $\tau$  est le paramètre de translation). Si  $\psi$  vérifie la condition d'admissibilité (qui est équivalente à  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$  quand la Transformée de Fourier de  $\psi$  est continue), la transformée admet une formule de reconstruction. Cette étude se restreint aux ondelettes normalisées et impaires, de support borné  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  (elles vérifient donc la condition d'admissibilité). L'imparité permet une estimation sans biais de l'instant du saut.

La première partie de l'article étudie les deux premiers moments des coefficients  $C_{y^2}(a, \tau)$ . Cette étude permet de définir une signature de la rupture dans le plan temps-échelle puis de déterminer des ondelettes optimales pour la détection. Ces ondelettes optimales maximisent un critère de contraste sous certaines contraintes (normalisation, condition d'admissibilité...). Le cas particulier d'une rupture de type échelon est étudié en détail. On montre que le contraste, qui peut être interprété comme un rapport signal à bruit dans le domaine temps-échelle, est supérieur au rapport signal à bruit dans le domaine temporel, pour de grandes échelles. Le cas de ruptures plus douces est ensuite considéré. On montre qu'il existe des ondelettes asymptotiquement optimales pour tout type de ruptures. Les résultats de simulation et les conclusions sont présentés dans les deux dernières parties de l'article.

## 2 Critère de Contraste dans le Domaine Temps-Echelle

La détection optimale n'est possible que lorsque la loi du processus observé est parfaitement connue. Malheureusement, en pratique, elle ne l'est souvent que partiellement, ou s'avère difficile à calculer. Il faut alors avoir recours à des détecteurs sous-optimaux. Le contraste est une mesure du second ordre qui permet d'évaluer les performances de ces détecteurs [6], c'est-à-dire leur capacité à séparer au mieux les deux hypothèses. La notion de contraste est liée à celle de *RSB* généralisé quand les deux hypothèses sont "bruit" et "signal et bruit" [1]. Notre étude est consacrée aux détecteurs temps-échelle sous-optimaux. Le contraste est utilisé pour déterminer l'ondelette qui s'adapte le mieux au problème de détection. La statistique utilisée est  $C_{y^2}(a, \tau)$ . En effet, l'intérêt principal de la *TOC* est de mettre en évidence les variations brusques de la valeur moyenne du processus observé. Un bruit multiplicatif de moyenne nulle ne conduit pas à un saut de moyenne de  $y(t)$ . Par contre  $y^2(t)$  présente un saut de moyenne. Par conséquent, la non-linéarité permet de bénéficier des bonnes propriétés de la *TOC*.

Le critère de contraste  $\beta_f(a, \tau)$  associé à la statistique  $C_{y^2}(a, \tau)$  pour une rupture  $f$  est choisi sous la forme [1] :

$$\beta_f(a, \tau) = \frac{[E[C_{y^2}(a, \tau) | H_1] - E[C_{y^2}(a, \tau) | H_0]]^2}{\sup [Var[C_{y^2}(a, \tau) | H_0], Var[C_{y^2}(a, \tau) | H_1]]} \tag{1}$$

Ce contraste (1) est défini en tout point de coordonnées  $(a, \tau)$  du plan temps-échelle, plutôt que sur un pavé du plan. Ceci

permet de tenir compte du caractère non-stationnaire de la *TOC* sous l'hypothèse  $H_1$ . L'étude statistique au second ordre de la *TOC* de  $y^2(t)$  met en évidence ce caractère non-stationnaire.

Le contraste peut aussi être exprimé de façon plus générale sous la forme [7] :

$$\beta_\alpha(a, \tau) = \frac{[E[C_{y^2}(a, \tau) | H_1] - E[C_{y^2}(a, \tau) | H_0]]^2}{Var_\alpha(C_{y^2}(a, \tau))} \tag{2}$$

où  $Var_\alpha$  est la variance correspondant à la loi définie par  $p_\alpha(x) = (1 - \alpha)p_0(x) + \alpha p_1(x)$  avec  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $p_0(x)$  et  $p_1(x)$  étant les lois sous  $H_0$  et  $H_1$ . Dans ce cas, le paramètre  $\alpha$  est fixé par l'observateur en fonction du problème de détection. Par exemple,  $\alpha = 0$  correspond à la déflation alors que  $\alpha = 1$  correspond à la déflation complémentaire. Le choix d'un paramètre  $\alpha_0$  tel que :

$$Var_{\alpha_0}(C_{y^2}(a, \tau)) = \sup_{\alpha \in [0,1]} Var_\alpha[C_{y^2}(a, \tau)]$$

correspond au contraste le plus défavorable. Le paramètre  $\alpha_0$  obtenu alors, conduit à une expression du contraste plus complexe et plus difficile à manier que celle obtenue en (1).

La signature temps-échelle de la rupture est définie comme la moyenne de la *TOC* [5]. Elle est calculée grâce à la condition d'admissibilité de l'ondelette. En l'absence de rupture :

$$E[C_{y^2}(a, \tau) | H_0] = m_{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,\tau}(t) dt = 0 \tag{3}$$

La rupture se traduit par une signature conique :

$$E[C_{y^2}(a,\tau)|H_1] = m_{x^2} A \int_{t_0 - a_0 \frac{T}{2}}^{+\infty} [2f_0(t) + Af_0^2(t)] \psi_{a,\tau}(t) dt \tag{4}$$

La variance de  $C_{y^2}(a, \tau)$ , sous les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ , vérifie les équations suivantes :

$$var[C_{y^2}(a, \tau) | H_0] = \sigma_x^2 \tag{5}$$

$$var[C_{y^2}(a, \tau) | H_1] = \sigma_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + Af_0(t))^4 \psi_{a,\tau}^2(t) dt \tag{6}$$

Notons que :

$$Var[C_{y^2}(a, \tau) | H_0] \leq Var[C_{y^2}(a, \tau) | H_1]$$

puisque  $f_0$  est une fonction positive. Le contraste choisi (1) correspond alors à la déflation complémentaire ( $\alpha = 1$ ). Le contraste est un rapport **signature à bruit** et est équivalent à un *RSB* dans le domaine temps échelle sous  $H_1$ . D'après les expressions (3), (4), (5) et (6), on obtient :

$$\beta_f(a, \tau) = \frac{E[C_{y^2}(a, \tau) | H_1]^2}{Var[C_{y^2}(a, \tau) | H_1]}$$

c'est-à-dire, en notant  $C = \frac{A^2 m_{x^2}^2}{\sigma_x^2}$  :

$$\beta_f(a, \tau) = C \frac{[\int_{t_0 - a_0 \frac{T}{2}}^{+\infty} [2f_0(t) + Af_0^2(t)] \psi_{a,\tau}(t) dt]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + Af_0(t))^4 \psi_{a,\tau}^2(t) dt}$$

Afin d'apprécier l'apport de la *TOC*, le processus  $y^2(t)$  est étudié dans le domaine temporel. Le *RSB* dans le domaine temporel est constant sous les deux hypothèses :

$$\begin{aligned} RSB(t) &= \frac{E[y^2(t) | H_1]^2}{\text{var}[y^2(t) | H_1]} \\ &= \frac{m_{x^2} s^2(t)}{\sigma_{x^2}^2 s^2(t)} = \frac{m_{x^2}}{\sigma_{x^2}^2} \\ &= \frac{E[y^2(t) | H_0]^2}{\text{var}[y^2(t) | H_0]} \quad \forall t \in \Omega \end{aligned}$$

Notons que *RSB*( $t$ ) dépend uniquement des moments d'ordre 1 et 2 du bruit multiplicatif et est indépendant du signal  $s(t)$ . Par contre,  $\beta_f$  dépend du signal  $s(t)$  et peut être maximisé par rapport à l'ondelette. Le paragraphe suivant montre qu'il existe une ondelette optimale, maximisant  $\beta_f$  lorsque la rupture est de type échelon. Le *RSB* obtenu est alors supérieur à *RSB*( $t$ ) pour des échelles suffisamment grandes. Cette ondelette s'avère être asymptotiquement optimale pour tout type de ruptures.

### 3 Ondelettes Optimales

#### 3.1 Cas d'un Echelon

Lorsque  $f(t)$  est un échelon et  $x(t)$  est un bruit blanc multiplicatif, le contraste  $\beta_f(a, \tau)$ , noté  $\beta_{ech}(a, \tau)$  s'écrit :

$$\beta_{ech}(a, \tau) = a C \frac{(A+2)^2 \left[ \int_{\frac{a_0-\tau}{a}}^{\frac{\tau}{a}} \psi(t) dt \right]^2}{1 + ((1+A)^4 - 1) \int_{\frac{a_0-\tau}{a}}^{\frac{\tau}{a}} \psi^2(t) dt} \quad (7)$$

Si  $\psi$  est une fonction impaire, normalisée qui vérifie la condition d'admissibilité, on a  $\int_0^{+\frac{1}{2}} \psi^2(t) dt = \frac{1}{2}$ . Or, on aimerait que le contraste  $\beta_{ech}(a, \tau)$  soit conséquent pour  $\tau = t_0$ , afin d'estimer au mieux le paramètre  $t_0$ . On considère alors  $\beta_{ech}(a, t_0)$  défini par :

$$\beta_{ech}(a, t_0) = 2a C (A+2)^2 \frac{\left[ \int_0^{+\frac{\tau}{a}} \psi(t) dt \right]^2}{1 + (1+A)^4}$$

Notons que  $\beta_{ech}(a, t_0)$  est proportionnel à l'échelle  $a$  pour  $\tau = t_0$ . Cette propriété est encore valable pour  $\tau \neq t_0$  et de grandes échelles (lorsque  $\frac{t_0-\tau}{a}$  tend vers 0). Ceci montre l'intérêt de travailler dans le domaine temps-échelle. L'ondelette optimale qui maximise  $\beta_{ech}(a, t_0)$  maximise  $\left[ \int_0^{\frac{\tau}{a}} \psi(t) dt \right]^2$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce terme est maximum quand  $\psi$  est constante sur  $[0, \frac{\tau}{a}]$ . Par conséquent, l'ondelette de Haar symétrisée est optimale pour la détection d'un échelon idéal dans un bruit blanc multiplicatif, quelle que soit l'échelle  $a$ . Le *RSB* au sommet de la signature conique ( $\tau = t_0$ ) est donnée par :

$$\beta_{ech}(a, t_0) = a \frac{(A^2 + 2A)^2 m_{x^2}^2 T}{2\sigma_{x^2}^2 (1 + (1+A)^4)}$$

Dans ce cas simple, les contrastes dans le domaine temporel et temps-échelle (resp.  $\beta_{ech}(a, t_0)$  et *RSB*( $t$ )) peuvent être

comparés :

$$\beta_{ech}(a, t_0) \geq RSB(t) \Leftrightarrow a \geq a_{\min} = \frac{2(1 + (1+A)^4)}{(A^2 + 2A)^2 T}$$

Ceci implique une longueur minimum pour l'intervalle d'observation :  $L_{\min} = a_{\min}$ .

#### 3.2 Cas Général

Considérons une rupture de forme générale  $1 + Af_0(t)$ . De la même manière, le contraste doit être maximisé pour  $\tau = t_0$  afin d'estimer l'instant du saut. Or

$$\beta_f(a, t_0) = a C \frac{(A+2) \left[ I_1(a) + \int_{\frac{a_0 T}{2a}}^{T/2} \psi(t) dt \right]^2}{1 + ((1+A)^4 - 1) \left[ I_2(a) + \int_{\frac{a_0 T}{2a}}^{T/2} \psi^2(t) dt \right]}$$

avec :

$$I_1(a) \psi = \int_{-\frac{a_0 T}{2a}}^{\frac{a_0 T}{2a}} f^2\left(\frac{at}{a_0}\right) \psi(t) dt$$

$$I_2(a) = \int_{-\frac{a_0 T}{2a}}^{\frac{a_0 T}{2a}} f^4\left(\frac{at}{a_0}\right) \psi^2(t) dt$$

La fonction  $f$  étant supposée bornée, on a :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I_1(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_2(a) = 0$$

Il en résulte que :

$$\beta_f(a, t_0) \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \beta_{ech}(a, t_0)$$

Par conséquent, l'ondelette symétrique de Haar est asymptotiquement optimale pour la détection de toute rupture. La *TOC* est donc asymptotiquement robuste à la forme du saut.

### 4 Simulations

De nombreuses simulations ont été réalisées pour valider les résultats précédents. Les simulations qui suivent ont été réalisées pour un échelon d'amplitude  $A = 0.4$  localisé à l'instant  $t_0 = 500$  et une rampe ( $f(t) = t$ ,  $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $T = 1$ ,  $A = 0.4$ ,  $a_0 = 200$ ,  $t_0 = 500$ ). Le bruit  $x(t)$  est blanc gaussien de variance  $\sigma_x^2 = 1$ . Les figures 1 et 3 montrent les signatures coniques dans le domaine temps-échelle pour un échelon et une rampe. Les figures 2 et 4 représentent la *TOC* de  $y^2(t)$ . Elle est calculée pour des échelles variant de 200 à 350 avec l'ondelette de Haar symétrisée. Dans les deux cas, la signature pointe sur l'instant  $t_0 = 500$ . Le cône est plus lisse et d'amplitude plus faible, pour une rampe que pour un échelon.

### 5 Conclusion

Cet article étudie la détection de ruptures noyées dans un bruit multiplicatif de moyenne nulle, grâce à la *TOC*. Pour profiter des bonnes propriétés de la *TOC*, on introduit un prétraitement non linéaire (ici quadratique) qui engendre un saut de moyenne. Le choix de l'ondelette est crucial et dépend du type de rupture considéré. On introduit un

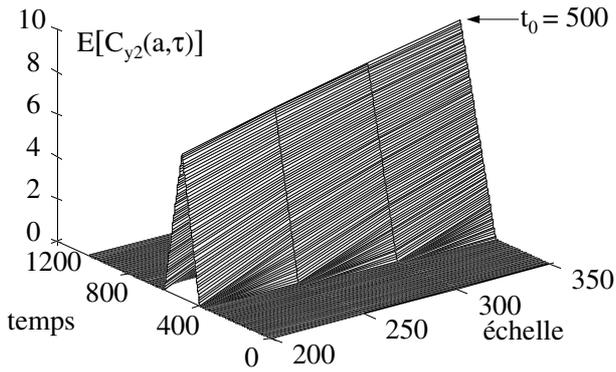


Fig. 1: Signature d'un Echelon ( $A = 0.4$ ,  $t_0 = 500$ ) avec l'Ondelette de Haar Symétrisée

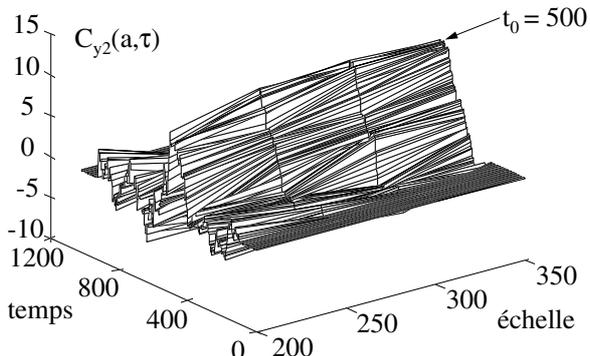


Fig.2: TOC d'un Echelon ( $A = 0.4$ ,  $t_0 = 500$ ) noyé dans un Bruit Multiplicatif ( $\sigma_x = 1$ ) avec l'Ondelette de Haar Symétrisée

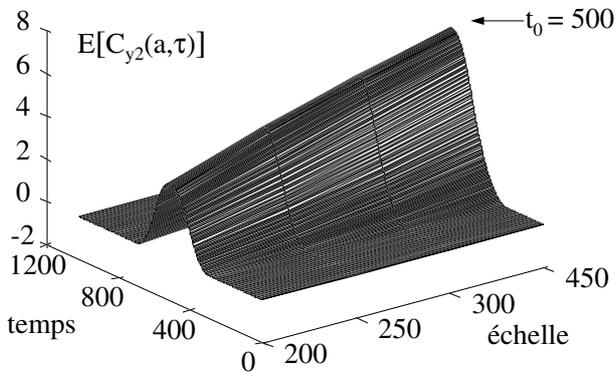


Fig. 3: Signature de la Rampe ( $A=0.4$ ,  $t_0=500$ ,  $a_0=200$ ,  $T=1$ ) avec l'Ondelette Symétrique de Haar

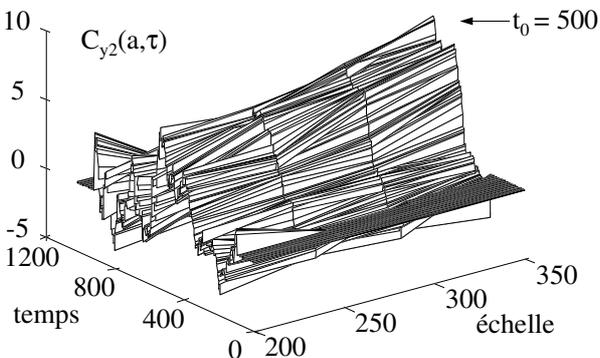


Fig. 4: TOC d'une Rampe ( $A = 0.4$ ,  $t_0=500$ ,  $a_0=200$ ,  $T=1$ ) noyée dans un Bruit Multiplicatif ( $\sigma_x=1$ ) avec l'Ondelette de Haar Symétrisée

contraste dans le domaine temps-échelle adapté au problème de détection. L'ondelette de Haar maximise ce contraste lorsque la rupture est un échelon. De plus, le contraste obtenu avec cette ondelette, qui peut être interprété comme un *RSB* dans le domaine temps-échelle, est supérieur au *RSB* dans le domaine temporel, pour de grandes échelles. On montre ensuite que l'ondelette de Haar est asymptotiquement optimale quel que soit le type de rupture considéré. Par conséquent, la *TOC* est asymptotiquement robuste à la forme de la rupture. L'utilisation d'un prétraitement non-linéaire permet de mettre en œuvre des détecteurs sous-optimaux basés sur la signature temps-échelle même lorsque le bruit est de moyenne nulle. Le seuillage de coupes de la *TOC* ou de la somme de ses coupes ou encore de la corrélation entre la *TOC* et une signature idéale [3] conduit à des détecteurs sous-optimaux ne nécessitant pas d'information a priori sur la densité de probabilité du bruit.

## Références

- [1] P. Y. Arques, Décisions en Traitement du Signal, Masson, 1982.
- [2] A. C. Bovik, "On detecting Edges in Speckle Imagery," IEEE Trans. A.S.S.P., vol. 36, n° 10, pp. 1618-1627, Oct. 1988.
- [3] M. Chabert, J-Y. Tourneret and F. Castanié, "Additive and Multiplicative Jump Detection using Continuous Wavelet Transform," Proc. ICASSP'96, Atlanta, 1996.
- [4] M. Chabert, J-Y. Tourneret and F. Castanié, "Performance of an Optimal Multiplicative Jump Detector based on the Continuous Wavelet Transform," Proc. EUSIPCO'96, Trieste, 1996.
- [5] A. Denjean and F. Castanié, "Mean Value Jump Detection : a Survey of Conventional and Wavelet Based Methods," dans Wavelet Theory, Algorithms and Applications, C. K. Chui, L. Montefuso and L. Puccio (eds.), Academic Press, Inc., 1994.
- [6] W. A. Gardner, "A Unifying View of Second-Order Measures of Quality for Signal Classification," IEEE Trans on Communications, vol. com-28, pp.807-816, 1980.
- [7] B. Picinbono and P. Duvaut, "Detection and Contrast," Stochastic Processes in Underwater Acoustics, Lecture Notes in Control and Information Sciences (vol 85), Baker CR et Al (Eds), 1986.
- [8] H. L. Van Trees, Detection, Estimation, and Modulation Theory, John Wiley & Sons, 1968.