

# Détection de changements dans des mélanges multi-composantes : étude de robustesse

Hélène Laurent, Thierry Gouraud et Christian Doncarli

Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes (ex LAN)

U.M.R. 6597

Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes

BP 92101, 44321 Nantes Cedex 03, France

Helene.Laurent@lan.ec-nantes.fr

## RÉSUMÉ

Cette communication propose une étude comparative d'approche paramétrique et non paramétrique dans un contexte de détection de ruptures spectrales. Des indices de stationnarité ont été calculés et leurs performances sont présentées sous formalisme COR. Afin d'analyser la robustesse de ces méthodes aux erreurs de modélisation, les deux approches sont testées sur trois classes de signaux possédant différentes variations de fréquence (saut brusque, dérive, ...).

## ABSTRACT

This paper presents a comparative study between parametric and non parametric approach for detection of spectral changes in noisy signals. Stationarity index have been computed and their performances are compared using ROC curves. In order to analyse the robustness of the methods in the face of modeling errors, the two approaches are applied on three types of signals presenting different variations of frequency (abrupt change, slowly varying frequency, ...).

## 1 Introduction

La détection de rupture de comportement dans un signal est un problème souvent rencontré dans la surveillance de systèmes industriels tels que les moteurs, les engrenages ... Nous nous intéressons dans cet article à la détection de changement du contenu spectral dans des signaux pouvant présenter des ruptures abruptes ou des dérives lentes de fréquences. Pour ce faire, nous comparons deux méthodes basées l'une sur une approche paramétrique, l'autre sur une approche non paramétrique. Lorsqu'une modélisation adéquate des signaux est accessible, les procédures paramétriques ont montré leur efficacité. Celles-ci s'appuient sur un algorithme d'identification (Méthode de Prony, MUSIC, norme minimale, ESPRIT, maximum de vraisemblance) des paramètres du signal d'observation couplé à une procédure de détection s'intéressant soit à la statistique de l'innovation, soit à une comparaison de modèles estimés avec des horizons différents. Cependant, lorsque le modèle n'est connu qu'approximativement, l'approche non paramétrique fondée sur les représentations temps-fréquence (RTFs) paraît présenter une alternative intéressante. Des recherches ont été menées récemment afin de définir des fonctions temporelles ("désordre" et "hyper-surface"), déduites de transformations temps-fréquence, permettant d'améliorer l'analyse et la reconnaissance de signaux à modulations numériques rapides. Ces fonctions mettent en évidence l'aspect répétitif du spectre de ces signaux au cours du temps et marquent ponctuellement par des pics les désordres induits par les changements de modulation [6]. D'autres indices de stationnarité ont également été proposés afin de chiffrer la "distance à la stationnarité" d'un signal [1], [4]. Ces indices

prennent des valeurs faibles lorsque le signal est localement stationnaire et augmentent lorsque l'on s'écarte de la stationnarité. L'objet de cet article est de présenter une étude comparative des approches paramétrique et non paramétrique et d'étudier leurs robustesses respectives aux erreurs de modélisation.

## 2 Méthodes utilisées

### 2.1 Approche paramétrique

Dans l'approche paramétrique, deux grandes classes de méthodes sont distinguées pour détecter un changement brusque des paramètres décrivant le signal d'observation. L'une inspecte les propriétés statistiques de l'erreur d'estimation tandis que l'autre considère la mesure d'une distance entre modèles identifiés avec des fenêtres d'observation de longueurs différentes [8]. Seule la première est présentée dans cet article.

L'étape préliminaire de ces méthodes est le choix d'un algorithme récurrent d'identification. Celui proposé est issu d'un filtre de Kalman étendu (eKf) identifiant les fréquences réduites ( $\{v_k\}$ ) et les amplitudes complexes ( $\{a_k\}$ ) inconnues d'un signal composé de  $M$  sinusoides complexes :

$$y[t] = \sum_{k=1}^M a_k e^{j2\pi v_k t} + v[t] = \sum_{k=1}^M a_k e^{j\theta_k[t]} + v[t] \quad (1)$$

$$\theta_k[t] = 2\pi v_k t = \theta_k[t-1] + 2\pi v_k \quad \text{mod } 2\pi \quad (2)$$

où  $v[t]$  est un processus aléatoire gaussien, blanc, centré, circulaire et de variance  $\sigma^2$  inconnues. En revanche, le nombre de fréquences  $M$  est supposé connu.

Nous définissons un vecteur d'états incluant les fréquences  $\nu_k$ , les amplitudes  $a_k$  ainsi que les phases instantanées  $\theta_k[t]$  :

$$z[t] = [\theta_1[t], \nu_1, \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1), \dots, \theta_M[t], \nu_M, \text{Re}(a_M), \text{Im}(a_M)]^T \quad (4)$$

Ce choix conduit à définir l'équation dynamique suivante :

$$z[t] = Az[t-1], \quad A = \text{diag}(A_1, \dots, A_M), \quad (5)$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'équation de mesure (1) est alors non-linéaire par rapport aux états associés aux phases instantanées. Aussi, à chaque itération, l'équation de mesure est linéarisée par un développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de l'état prédit.

En l'absence d'information a priori sur la valeur des paramètres, ce filtre de Kalman est initialisé en distribuant les fréquences initiales sur l'intervalle  $[0, 0.5]$  tandis que les amplitudes sont fixées à zéro.

Nous sommes alors capables de mettre en oeuvre un filtre de Kalman fournissant une innovation  $\varepsilon[t]$  définie par :

$$\varepsilon[t] = y[t] - \sum_{k=1}^M \hat{b}_k[t/t] e^{j\hat{\theta}_k[t/t]} \quad (6)$$

où  $\hat{b}_k[t/t]$  et  $\hat{\theta}_k[t/t]$  désignent respectivement les amplitudes et les phases instantanées estimées à partir de  $t$  observations. La blancheur de l'innovation peut être testée en calculant à partir de  $N$  observations la fonction de corrélation  $\hat{r}_\varepsilon[k]$  pour différents retards. D'après le théorème de la limite centrale,  $\hat{r}_\varepsilon[k]$  étant gaussien, on peut utiliser un test de loi gaussienne pour déterminer la coloration de l'innovation [5]. Nous utilisons un test fondé sur un intervalle de confiance :

$$\text{Prob} \left[ \left| \frac{\hat{r}_\varepsilon[k]}{\hat{r}_\varepsilon[0]} \right| \leq \frac{s}{\sqrt{N}} \right] = p = \int_{-s}^s \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}} d\varepsilon \quad (7)$$

L'innovation est considérée blanche si l'on a moins de  $p\%$  des valeurs de l'autocorrélation dans l'intervalle  $[\frac{-s\hat{r}_\varepsilon[0]}{\sqrt{N}}, \frac{s\hat{r}_\varepsilon[0]}{\sqrt{N}}]$ , paramétré par  $s$  a priori fixé.

## 2.2 Approche non paramétrique

L'approche temps-fréquence fournit une représentation conjointe du signal en temps et en fréquence et permet donc ainsi de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu. La méthode de détection présentée ici transpose dans une perspective temps-fréquence la méthode de blancheur de l'EPL introduite précédemment. Elle nécessite le calcul d'une RTF du signal sur toute sa durée et est basée sur la comparaison, à chaque instant  $t$  d'étude, d'une sous-image de la RTF centrée sur cet instant et d'une sous-image de référence calculée sur la première partie du signal durant laquelle celui-ci est supposé stationnaire. La comparaison se fait alors par calcul de distances entre RTFs [7]. On calcule sur la zone d'apprentissage la RTF moyenne de référence de largeur  $p$  :  $\bar{T}_a$  (à l'aide d'imagettes  $I_i$ ), puis on la compare à des sous-images  $I_t$  de même taille centrées sur chaque instant  $t$  d'étude. La figure 1

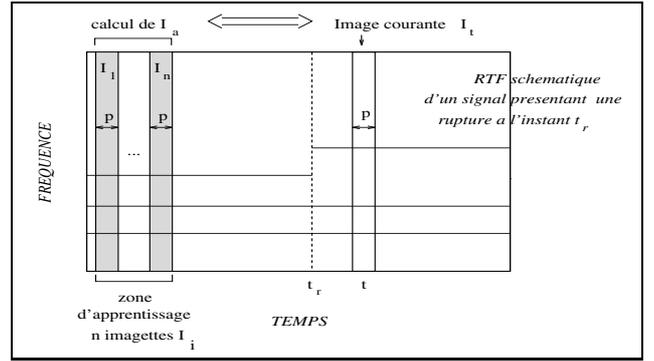


FIG. 1 — Calcul de l'indice de stationnarité.

illustre la méthode.

On définit alors l'indice de stationnarité  $Ind_s$  déduit de la distance de Kolmogorov :

$$Ind_s(t) = \int_{\tau=0}^p \int ||I_t(t; \tau, f) - \bar{T}_a(t; \tau, f)|| df d\tau$$

où :

$$I_t(t; \tau, f) = RTF(t - (p-1)/2 + \tau, f) \quad \tau \in [0, p-1]$$

Ainsi, sur l'intervalle durant lequel le signal est stationnaire, l'indice conserve des valeurs assez faibles. En revanche, en présence d'un changement spectral, la sous-image  $I_t$  différera de la sous-image de référence  $\bar{T}_a$  et l'indice de stationnarité défini prendra des valeurs plus importantes. En ce qui concerne le choix de la RTF initiale permettant de représenter le signal, une multitude de transformations est à notre disposition [2] ; nous nous intéresserons plus particulièrement dans cet article aux RTFs de la classe de Cohen. On travaille sur des signaux analytiques et des RTFs normalisées.

## 3 Signaux tests et simulations

### 3.1 Les classes de signaux

Les résultats que nous proposons sont relatifs à trois classes de signaux de 1024 points échantillonnés à une fréquence de 1kHz. La figure 2 présente les représentations temps-fréquence simplifiées de ces signaux. La première classe est constituée de signaux pouvant présenter un saut abrupt de fréquence. La deuxième classe, elle, fait apparaître une dérive lente de fréquence. Enfin, la troisième traite des signaux présentant une gigue en fréquence.

On a généré pour chaque classe 25 signaux présentant une rupture et 25 sans rupture obtenus par changement du tirage du bruit. Les paramètres ont été choisis de la façon suivante :  $f_1=100\text{Hz}$ ,  $f_2=200\text{Hz}$ ,  $f_3=300\text{Hz}$ ,  $f_4=350\text{Hz}$ ,  $t_r=600$ ,  $\Delta=50$ ,  $f_o=10\text{Hz}$ ,  $f_a=30\text{Hz}$ . Les signaux considérés sont bruités et le rapport signal/bruit a été fixé à 5db.

### 3.2 Résultats - Courbes COR

La figure 3 présente, pour un signal à rupture et un signal sans rupture de chaque classe, l'évolution des deux fonctions tests  $FT$  (blancheur de l'innovation et indice de stationnarité

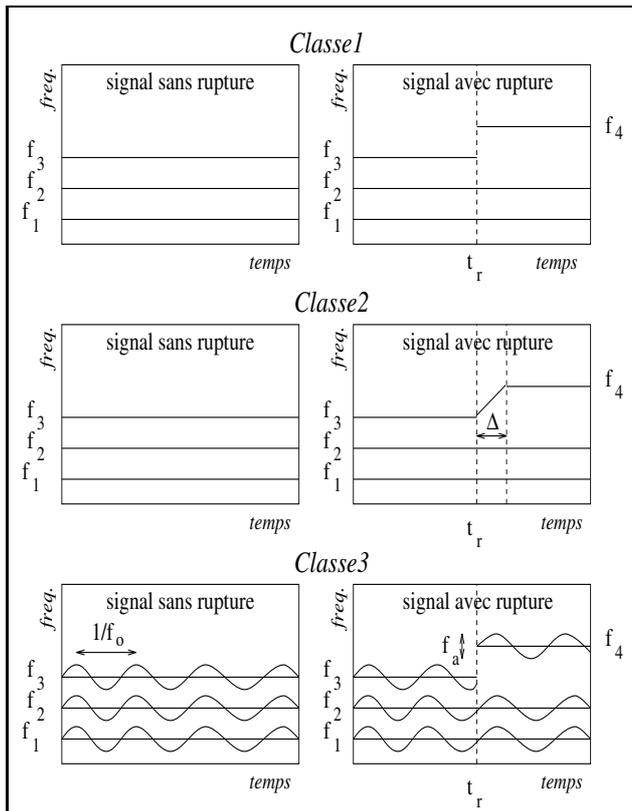


FIG. 2 — RTFs simplifiées des signaux des différentes classes.

$Ind_s$ ) en fonction du temps. Ces deux fonctions mettent bien en évidence la présence ou l'absence d'un changement de contenu spectral dans les signaux étudiés. Une rupture est détectée à l'instant  $t$  si la fonction test considérée dépasse un seuil  $\alpha$ .

Dans le cas non paramétrique, cet indice a été obtenu à partir d'une représentation Pseudo-Wigner-Ville Lissée (PWVL). Cette représentation du signal est calculée à l'aide d'une fenêtre de lissage temporel à support limité  $[-L/2, +L/2]$ . La RTF présente alors un élargissement du support temporel réel. L'influence de la rupture se trouve par conséquent répercutée dès l'instant  $t_r - L/2$ . De plus, le paramètre  $p$  introduit lui aussi un décalage en temps. L'indice de stationnarité  $Ind_s$  augmente donc dès l'instant  $t_r - L/2 - p$ . Ceci explique qu'une vraie alarme puisse correspondre à un instant de rupture estimé antérieur à l'instant de rupture réel. Nous avons tenu compte de ce phénomène dans le calcul du taux de vraies alarmes.

Afin de comparer les performances des deux approches, nous avons tracé des courbes COR représentant le taux de vraie alarme (VA) en fonction du taux de fausse alarme (FA) pour différents seuils de détection. Les calculs sont effectués de la façon suivante :

- pour les signaux sans rupture
  - FA=1 si  $\exists t$  tel que  $FT(t) > \alpha$
  - VA impossible
- pour les signaux avec rupture
  - FA=1 si  $\exists t$  tel que  $FT(t) > \alpha$  et  $t < t_r - \delta$
  - VA=1 if  $\exists t$  tel que  $FT(t) > \alpha$  et  $t \in [t_r - \delta; t_r + \delta]$

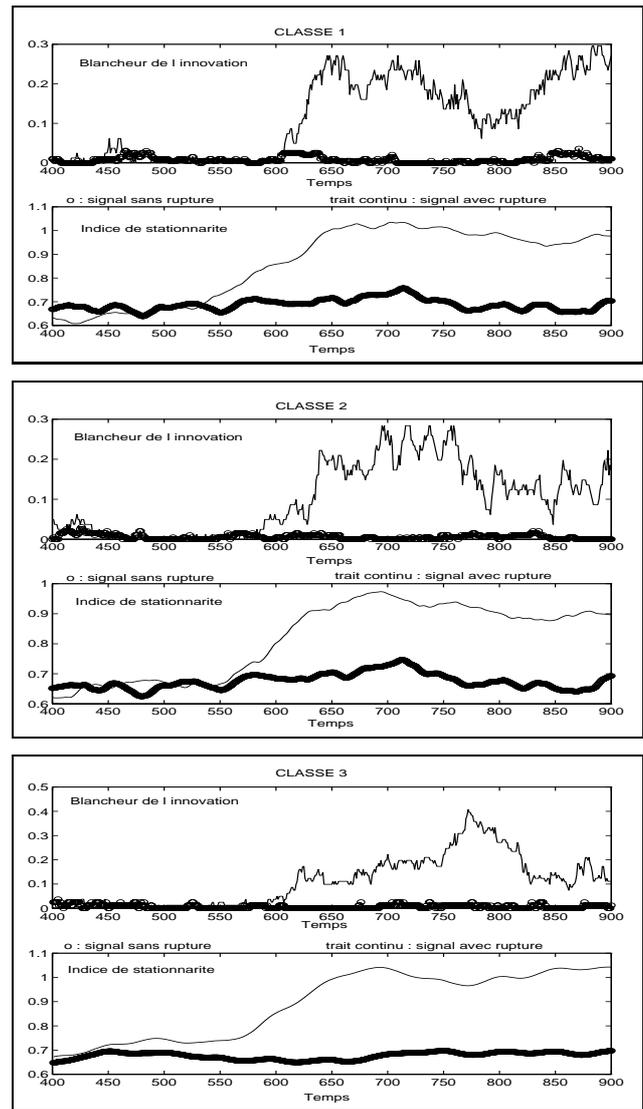


FIG. 3 — Fonctions tests pour les différentes classes.

$\delta$  est l'erreur que l'on tolère sur la localisation de l'instant de rupture et a été fixé à 25 sur ces essais. Le taux de VA est donc calculé pour un retard à la détection constant et égal à  $\delta$ . La figure 4 présente les courbes COR obtenues pour les différentes classes par les approches paramétrique et non paramétrique.

## 4 Analyse et conclusion

L'étude de la figure 4 montre que l'approche paramétrique fournit des résultats idéaux pour les signaux de la classe 1. En effet, dans ce cas, le saut de fréquence abrupt induit une forte coloration de l'innovation autorisant une détection rapide (cf figure 4). En revanche, une dérive lente de fréquence (classe 2) induit une coloration plus faible de l'innovation à partir de l'instant de rupture (cf figure 3) introduisant ainsi un retard plus important à la détection et donc une dégradation des résultats. Finalement, la dernière classe sort du contexte des signaux stationnaires par morceaux, cadre d'application de la méthode de détection proposée. Pour tenir compte des

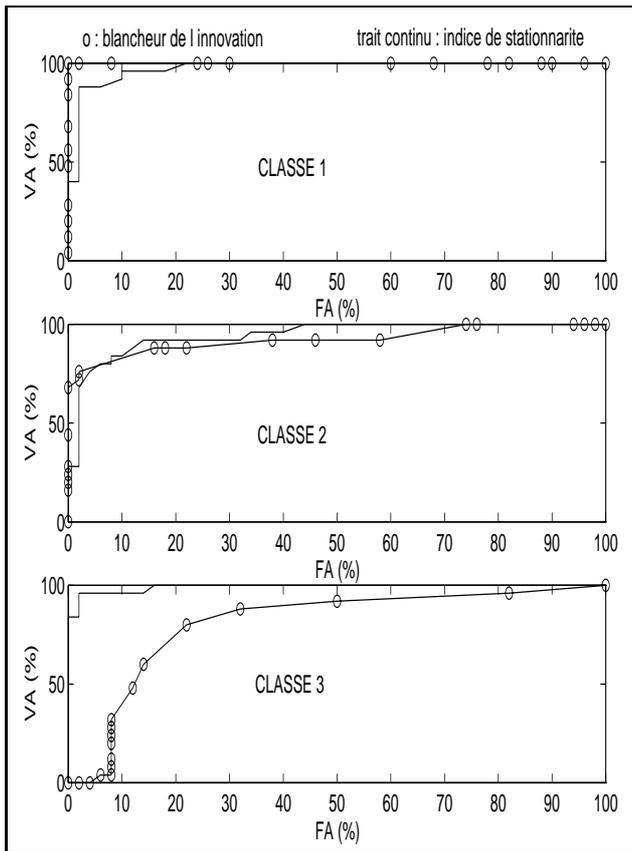


FIG. 4 — Courbes COR pour les différentes classes.

légères variations de fréquence dans les zones réputées stationnaires et obtenir une quasi-blancher de l'innovation avant rupture sans poser de modèle *a priori* d'évolution des paramètres, nous avons supposé que ceux-ci suivent une marche au hasard. L'algorithme d'estimation s'adapte alors également au changement de fréquences induit par la rupture rendant la détection difficile. Ce phénomène explique les mauvais résultats obtenus sur la classe 3 par le test de blancheur de l'innovation qui ne peut donc être utilisé que pour des signaux stationnaires avant la rupture. Pour sortir de ce cadre, il convient de s'intéresser à d'autres types de détecteurs opérant sur les paramètres (fréquences, amplitudes) et prenant en compte un changement de comportement après la rupture.

Pour ce qui est de l'approche non paramétrique, on constate sur les courbes COR (figure 4) que, si les résultats obtenus pour les deux premières classes autorisent une bonne détection de la rupture, ils sont cependant inférieurs (classe 1) ou équivalents (classe 2) aux résultats obtenus dans le cas paramétrique. Dans le cas où le signal est parfaitement modélisable, les méthodes paramétriques se révèlent donc plus adéquates. En revanche, les résultats obtenus pour la classe 3 mettent bien en évidence la supériorité de la méthode non paramétrique. Ne faisant aucune hypothèse sur la structure du signal, l'indice de décision issu de la RTF est capable de suivre la non stationnarité du signal dans la phase initiale sans pour autant atténuer le saut induit par la rupture. Les opérations de lissage effectuées par la PWVL tendent à transformer le signal oscillant en fréquence en un signal à bande étroite. La discontinuité de

la RTF s'en trouve augmentée. Cela explique les meilleures performances obtenues sur la classe 3 comparativement aux classes précédentes.

Afin de comparer plus finement les performances de détection de ces deux méthodes, une étude du taux de fausse alarme en fonction du retard à la détection serait intéressante.

## Références

- [1] P. Flandrin. *Temps-Fréquence*. Hermès, pp. 347-349, 1993.
- [2] F. Hlawatsch, G.F. Boudreaux-Bartels. *Linear and quadratic time-frequency signal representations*. IEEE Signal Processing Magazine, pp. 21-67, April 1992.
- [3] S. Kay. *Modern spectral Estimation-Theory and application*. Prentice Hall, 1985.
- [4] H. Laurent, C. Doncarli. *Abrupt changes detection in the Time-Frequency Plane*. Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Paris, France, pp. 285-288, June 1996.
- [5] L. Ljung. *System identification : Theory for the user*. MIT Press, pp 413-433, 1983.
- [6] S. Pinet, H. Rix, J. Menez. *Analyse et reconnaissance des signaux à modulations numériques rapides à l'aide transformations temps-fréquence*. Gretsji, Juan-les-Pins, France, pp. 655-658, Sept 1993.
- [7] I. Vincent. *Classification de signaux non stationnaires*. Thèse de doctorat, Nantes, Oct. 1995.
- [8] B. Voziel. *Étude comparative d'algorithmes récursifs de détection de ruptures spectrales*. Thèse de doctorat, Nantes, Février 1994.