

# Reconstruction Tomographique d'Objets à Symétrie de Révolution à partir d'une Vue par Approximation de Modèle

Jean Michel Lagrange<sup>(1)(2)</sup>, Isabelle Dauty<sup>(1)</sup> et Robert Azencott<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>Centre d'études de Vaujours, B.P. 7

77181 Courtry, France

<sup>(2)</sup>CMLA-URA 1611 CNRS, ENS Cachan, 61 avenue du président Wilson

94235 Cachan cedex, France

## RÉSUMÉ

Les techniques classiques de reconstruction d'objets axisymétriques génèrent toutes d'importants artefacts (solutions lissées ou très instables). De plus, l'extraction d'informations très précises concernant les grandes transitions de densités demeurent délicates. Dans cet article, nous proposons une nouvelle voie -en une dimension, pour l'instant- assurant simultanément la reconstruction et l'extraction de caractéristiques : un a priori est apporté sous la forme d'un modèle de densités. Nous montrons l'intérêt de cette approche pour ce qui est de la prise en compte ou de la quantification de certaines perturbations induites par la chaîne d'acquisition des données.

## ABSTRACT

Classical techniques for the reconstruction of axisymmetrical objects are all creating artefacts (smooth or unstable solutions). Moreover, the extraction of very precise features related to big densities' transitions remains quite delicate. In this paper, we develop a new approach -in one dimension for the moment- that allows us both to reconstruct and to extract characteristics : an a priori is provided thanks to a density model. We show the interest of this method in regard to noise effects quantification ; we also explain how to take into account some physical perturbations coming from real data acquisition.

## 1 Introduction

La reconstruction tomographique d'un objet à partir d'un nombre limité de vues (projections) est un problème inverse mal posé ; La sensibilité de la solution au bruit présent sur les radiographies expérimentales est très forte. Les techniques classiques de type rétroprojection filtrée (RPF), ART, ... [5] ou inverse généralisée [3] conduisent à des solutions dégradées si les données sont bruitées ou floues.

Le contexte général de cette étude est la reconstruction, à partir d'une seule radiographie X, d'un objet de révolution sous l'hypothèse de rayonnement parallèle et monoénergétique. Ce travail fait partie d'un projet de détonique : cette science étudie le comportement d'objets soumis à des chocs générés par des explosifs.

Dans ce document, nous proposons une nouvelle approche où nous introduisons un a priori quant à la forme des objets à reconstruire : un modèle de densité axisymétrique. Le but final est de mesurer la position des interfaces entre les différents matériaux ainsi que leur densité. Ici, la précision voulue sur les interfaces est inférieure au pixel (pas d'échantillonnage des projections). Le passage des ondes de chocs générant des gradients de densité, un modèle 1D réaliste est construit par juxtaposition de zones de densité constante et de zones de gradient de densité comme illustré sur la figure 1.

Les objets sont reconstruits par coupes indépendantes.

Dans la partie 2, après avoir rappelé les travaux existant, nous présentons cette nouvelle approche par recherche de modèle. Dans la troisième partie, nous donnons une étude de sen-

sibilité sur les paramètres du modèle obtenu à partir de données bruitées. Dans la quatrième partie, une méthode originale de déconvolution/reconstruction à partir de données floues est explicitée. Différents exemples de résultats sont réunis, dans la cinquième partie, à partir de données simulées. Enfin, nous développons, dans la sixième partie, les potentialités de cette technique 1D pour la reconstruction d'objets 3D axisymétriques.

## 2 Méthodes de reconstruction

Les méthodes classiques (synthèse de Fourier, RPF, ART, ...) ainsi que l'inversion généralisée fournissent une reconstruction tomographique pixel par pixel ; une étape d'extraction de contours est ensuite nécessaire afin d'extraire les limites des zones recherchées.

La synthèse de Fourier, les techniques ART et la RPF [5] génèrent certains problèmes (artefacts, temps de calcul, ...) qui les rendent inadéquates dans ce contexte.

L'inverse généralisée (qui sera notre méthode de référence) est, quant à elle, très rapide et très facile à mettre en œuvre : une inversion et une multiplication matricielles [3]. Toutefois, cette dernière est très sensible au bruit sur les données.

Le nouvel axe que nous présentons permet, simultanément, de reconstruire l'objet et d'en extraire ses caractéristiques (rayons d'interfaces  $r_i$  et densités  $d_j$ ) par l'introduction d'un a priori important sous la forme d'un modèle de densité. Si on note  $\omega \in \mathbb{R}^n$  le vecteur composé des rayons  $r_i$  et des densités  $d_j$ ,  $x$  l'abscisse des pixels,  $Y(x)$  les données (masses

surfaiques) et  $proj_\omega(x)$  la projection du modèle, le problème est défini par :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \tilde{\omega} &= \arg \min_{\omega \in \Omega} \|proj_\omega - Y\|_2^2 \\ &= \arg \min_{\omega \in \Omega} (\varepsilon^2) \\ (\mathcal{C}) &: \theta(\omega) \geq 0, \\ \Omega &= \{\omega \in \mathbb{R}^n / \omega_l \leq \omega \leq \omega_u\} \end{cases}$$

où  $\tilde{\omega}$  est la solution de  $(\mathcal{P})$  minimisant  $\varepsilon^2$ , les contraintes  $(\mathcal{C})$  servent à borner le domaine et à assurer l'existence des zones.

Après analyse des méthodes de minimisation (recuit simulé [4], I.C.M. [1], descente de gradient), nous avons opté vers des méthodes de descente de gradient sous contraintes, plus rapides, aisées à mettre en œuvre en présence de contraintes (théorie des multiplicateurs de Lagrange) et conservant le caractère continu de la formulation du critère. Le problème majeur rencontré est que  $\varepsilon^2$  est  $C^1$  presque partout sur  $\mathbb{R}^n$ . Afin d'assurer la classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ , nous avons proposé trois types de régularisation :

1. *formelle* : rechercher  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\|F(proj_\omega) - F(Y)\|_2^2$  soit  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Cette voie est possible si le modèle est simple mais illusoire lorsque le nombre de zones est important.
2. *par convolution* : rechercher  $H$  de classe  $C^{p \geq 1}$  tel que  $proj_\omega \star H$  -et donc  $\varepsilon^2 = \|proj_\omega \star H - Y\|_2^2$  soit  $C^p$  sur  $\mathbb{R}^n$ .
3. *par pondération* : si  $u(x \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^n)$ , de classe  $C^{p, p \geq 1}$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , s'annule dans un voisinage des points de non différentiabilité, alors  $\sum_{x \in \mathcal{D}} \left\{ u(x, \omega) \left( proj_\omega(x) - Y(x) \right)^2 \right\}$ , avec  $\mathcal{D}$  l'ensemble des points de mesure, est de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

La troisième approche, de loin la moins couteuse en temps de calcul, nous a permis de résoudre de problème  $(\mathcal{P})$ . Toutefois, avant d'opérer le processus de reconstruction, nous devons nous assurer que le nombre de zones du modèle est bien adapté à l'objet. Si nous notons  $\tilde{\sigma}^2$  une estimation de la variance du bruit, nous avons montré que ce nombre est optimal si :

- la valeur optimale du critère  $\varepsilon^2(\tilde{\omega})$  est proche de  $\tilde{\sigma}^2$ ,
- la sensibilité au bruit sur les données des paramètres du modèle déformable (développée dans la partie 3) est faible.

### 3 Sensibilité de la reconstruction

La précision sur la position des interfaces est très importante dans notre contexte. En prenant la fonction  $u$  définie précédemment de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon^2$  est de classe  $C^2$ . La condition d'annulation du gradient de  $\varepsilon^2$  dans un ouvert admissible et le théorème des fonctions implicites [2] nous permet de calculer la matrice de covariance du vecteur  $\omega$  :

$$\Sigma_\omega = G'(Y) \times \Sigma_b \times G'(Y)^t \quad (1)$$

où nous avons supposé que le bruit entachant  $Y$  est spatialement décorréolé et stationnaire d'ordre 2, soit  $\Sigma_b = \sigma^2 \times I$ .  $G'(Y)$  est donné par :

$$G'(Y) = \left( \frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right)_{(i,j) \in I^2}^{-1} \times \left( \frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial \omega_i \partial Y_j} \right)_{(i,j) \in I \times J} \quad (2)$$

où  $I$  est l'ensemble  $\{1 \dots n\}$ ,  $J$  l'ensemble  $\{1 \dots N\}$ ,  $n$  le nombre de paramètres du modèle et  $N$  le nombre de données.

En comparaison, nous avons calculé la sensibilité de l'estimation des positions d'interfaces et des densités moyennes ( $\rho_{moy}$ ) entre ces interfaces pour l'inversion généralisée ; dans ce cas, l'estimation des frontières des zones de gradient n'ayant pas été développée, nous raisonnons sur des objets à densité constante ; dans ce qui suit, l'objet considéré comporte une zone de densité  $d$  entre  $-r$  et  $+r$ . Pour l'inversion généralisée,  $r$  et  $d = \rho_{moy}$  sont obtenus par deux processus différents ; aussi fournissons-nous les variances conditionnelles de  $\rho_{moy}$  sachant  $r$  et  $r$  sachant  $\rho_{moy}$ . Le champ reconstruit dans ce cas étant donné par  $X = H^{-1} \times Y$ , nous avons montré que :  $Var(\rho_{moy}) \geq Var(\rho_{moy}/r)$  et  $Var(r) \geq Var(r/\rho_{moy})$  avec

$$Var(\rho_{moy}/r) = P \Gamma P^t \text{ où } \Gamma = H^{-1} \Sigma_b H^{-t} \quad (3)$$

$$Var(r/\rho_{moy}) = \sum_x x^2 \cdot p(x) - \left( \sum_x x \cdot p(x) \right)^2 \quad (4)$$

Le terme  $p(x)$  représente la probabilité d'avoir un contour au site  $x$ .

Une simulation faite à partir d'un modèle à deux zones constantes a montré un gain en précision d'un facteur quatre à cinq avec la méthode par fitting de modèle.

### 4 Déconvolution du flou

Le flou provient principalement du caractère non ponctuel de la tache focale de l'émetteur  $X$  et de l'aspect passe-bas du détecteur. L'origine de cette perturbation se trouvant dans le domaine de l'énergie des photons  $X$  traversant l'objet, les convolutions spatiales se font en atténuation ; si  $\frac{\mu}{\rho}$  est le coefficient d'atténuation du matériau, cette dernière, dépendant de  $Y(x)$ , est définie par  $e^{-\frac{\mu}{\rho} Y(x)}$ . Compte tenu de la présence de hautes fréquences dans les données non floues et les noyaux de flou étant relativement étroits, les méthodes classiques du type filtrage de Wiener sont inadaptées.

Dans le cas de la recherche de modèle, si la loi du flou  $f_\alpha$  et ses paramètres  $\alpha$  ont pu être déterminés, la reformulation suivante du critère permet de déconvoluer le modèle :

$$\varepsilon'^2 = \left\| - \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{-1} \times \ln \left( e^{-\frac{\mu}{\rho} proj_\omega \star f_\alpha} - Y \right) \right\|_2^2 \quad (5)$$

Théoriquement, nous avons constaté qu'une convolution continue dans le domaine spatial rendait  $\varepsilon'^2$  différentiable par rapport à  $\omega$ . Toutefois, le passage au numérique pour la convolution fait perdre cette propriété. En remplaçant  $proj_\omega$  par  $proj_\omega \star H(\omega)$  ( $H$  est défini dans la deuxième partie ; régularisation par convolution),  $\varepsilon'^2$  est différentiable ; dans ce cas,

nous avons étudié le décalage engendré sur la solution  $\tilde{\omega}$  en fonction du noyau H.

Afin d'accélérer les traitements, nous avons étudié deux reformulations du problème basées sur un calcul efficace du gradient du critère  $\varepsilon^2$  ainsi que la précision nécessaire à l'obtention de la classe  $C^1$  du critère. Ces approches nous ont permis de construire un processus exact de recherche du modèle.

Les résultats obtenus avec cette déconvolution sont flagrants car, si le flou est connu, la reconstruction par fitting est parfaite alors que les techniques classiques fournissent une reconstruction très lissée non représentative de l'objet. Un exemple de résultat est illustré sur la figure 5 où la reconstruction exacte par notre processus est représentée en traits pleins et la reconstruction dégradée par inversion généralisée en pointillés.

## 5 Résultats

Nous constituons nos données de base par projection du modèle donné sur la figure 1.

Afin de comparer les reconstructions en présence de bruit, nous ajoutons à la projection un bruit gaussien d'écart-type 8, ce qui fournit la projection donnée par la figure 2. La comparaison des reconstructions entre l'inverse généralisée et le fitting de modèle est illustré sur la figure 3. Nous voyons nettement apparaître le caractère très instable de la reconstruction par inversion généralisée (pointillé) alors que le modèle obtenu par minisation (lignes pleines) s'écarte très peu du modèle donné sur la figure 1. Pour l'approche par fitting, les variances de tous les paramètres (calculées par la formule (1)) sont faibles : nous en déduisons des erreurs absolues inférieures à 2% pour les densités  $d_i$  et des écarts-types de position des interfaces de l'ordre du quart ou du demi pixel. Ces chiffres nous confirment bien la très bonne stabilité de la reconstruction par notre approche.

En comparaison, nous avons calculé, grâce aux formules (3) et (4) les biais d'estimation des interfaces interne (équivalente au rayon  $r_4$ ) et externe (équivalente au rayon  $r_2$ ) pour la reconstruction par inversion généralisée ainsi que ceux des valeurs moyennes de densités autour de ces interfaces. Ces résultats sont synthétisés dans le tableau suivant :

rayon face externe	$\sigma \geq 1, 2$ pixels
rayon face interne	$\sigma \geq 2, 3$ pixels
densité interne moyenne	erreur $\geq 90\%$
densité externe moyenne	erreur $\geq 15\%$

Ces résultats nous montrent indubitablement que l'approche par approximation de modèle que nous développons induit un accroissement très important de la précision sur les paramètres caractéristiques recherchés.

*Remarque.* La figure 4 illustre le calcul des 2 probabilités  $p(x)$  d'obtenir un contour sur les faces interne et externe.

De plus, en l'absence de bruit, si les positions des contours ne sont pas sur un pixel, les reconstructions par les méthodes classiques présentent des artefacts. Notre modélisation, quant

à elle, permet de retrouver des positions d'interfaces non entières de manière exacte du fait de l'absence de discrétisation du processus de minimisation.

## 6 Vers une reconstruction 2D : le 1,5D

En complément de l'approche que nous avons développée, nous avons mis en œuvre une technique permettant de fournir une reconstruction 3D de l'objet à partir de la formulation 1D où les différentes coupes de ce dernier ne sont pas traitées indépendamment. Dans ce cas, le processus consiste en la minimisation d'un nouveau critère par paquets de  $L$  lignes de projection ; ce critère contient un terme de lissage non convexe permettant de reconstruire précisément les grandes transitions de densités [6] :

$$\begin{aligned} \Xi_T^2 &= \frac{1}{N} \times \sum_{j=1}^L \sum_{x=1}^N \left( u(\omega^j, x) \times (proj_{\omega^j}(x) - Y^j(x))^2 \right) \\ &+ \frac{\lambda}{N} \times \frac{L}{L-1} \times \sum_{j=1}^{L-1} \sum_{x=1}^N \left( u(\omega^{j+1}, x) \times u(\omega^j, x) \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{\phi}(proj_{\omega^{j+1}}(x) - proj_{\omega^j}(x)) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

où l'indice  $j$  représente la  $j^{\text{ième}}$  section plane du paquet. Le vecteur paramètre est :  $\left\{ \omega_i^j, (i, j) \in \{1 \dots n\} \times \{1 \dots L\} \right\}$  et  $\tilde{\phi}$  est donnée par :

$$\tilde{\phi}(x, x \in \mathbb{R}^N) = 2 \times \tilde{\sigma}^2 \times \sum_{i=1}^N \phi \left( \frac{x_i}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (7)$$

avec  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi'(t) = 0$  [6].

$\lambda$  est fixé grâce à un critère de validation croisée.

Un des aspects problématiques vient du fait que cette reconstruction ne fournit pas de contours fermés sur l'axe de symétrie des objets. Afin d'obtenir une bonne représentativité 2D, nous avons démontré certains résultats nous permettant de fermer tous les contours correspondant aux évolutions des rayons  $r_i$  : ils sont basés sur une analyse des sensibilités des paramètres du modèle le long de l'axe de symétrie.

## 7 Conclusion

Dans ce contexte où la géométrie des objets est suffisamment bien connue (grâce à une analyse experte), la reconstruction par approximation de modèle apporte une précision accrue sur les frontières des zones recherchées (inférieure au pixel) et une meilleure stabilité au bruit que pour la méthode par inversion généralisée. De plus, nous avons mis en évidence la possibilité de déconvoluer le modèle au cours de la reconstruction. En dernier lieu, nous avons essayé, par notre approche 1,5D, d'exploiter au maximum les potentialités des algorithmes développés en 1D.

Toutefois, le code 1,5D admet de nombreuses limites :

- le champ de densité 3D des objets à reconstruire est pratiquement radial si bien qu'un modèle 1D reconstruisant

une section orthogonale à l'axe de symétrie est parfois inadaptée,

- la déconvolution par des noyaux de flou 2D quelconques est impossible par une approche 1D.

Dans l'avenir, nous proposons d'étendre le fitting à des modèles 3D axisymétriques décrits par des surfaces déformables ; à ce titre, nous pensons que les résultats du processus 1,5D développé ci-avant nous fourniront une très bonne initialisation. Actuellement, nous travaillons sur des techniques de génération de champs lisses de densités 3D axisymétriques entre ces surfaces.

## Références

[1] J. Besag. On the statistical analysis of dirty pictures. *J.R. Stat. Soc. Ser. B48*, 3 :259–279, 1986.

[2] J. Dieudonne. *Eléments d'analyse*, volume 3. Gauthier-Villars, 1982.

[3] J. M. Dinten. *Tomographie à partir d'un nombre limité de projections : régularisation par des champs markoviens*. PhD thesis, Université de Paris Sud, centre d'Orsay, 1990.

[4] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distribution, and the bayesian restoration of images. *Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, PAMI 6, n. 6 :721–741, 1994.

[5] Gabor T. Herman. *Image Reconstruction from Projections, the Fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, 1980.

[6] M. Nikolova. Regularisation functions and estimators. *International Conference on Image Processing*, II :457–460, 1996.

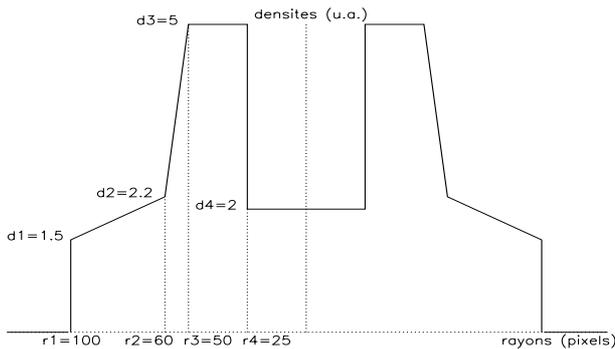


FIG. 1 — exemple de modèle de densité

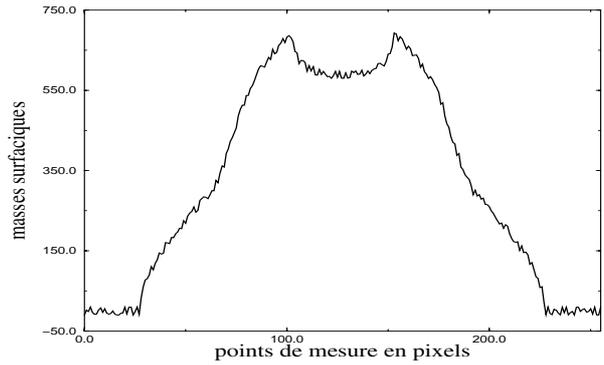


FIG. 2 — projection bruitée du modèle

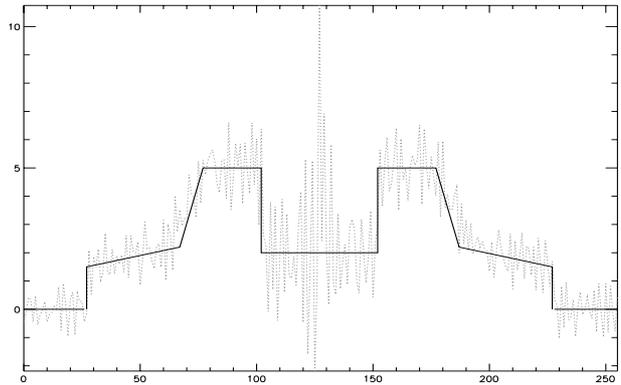


FIG. 3 — comparaison des reconstructions

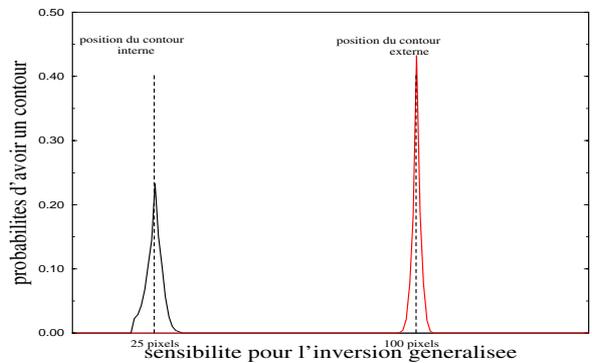


FIG. 4 — probabilités d'obtenir un contour

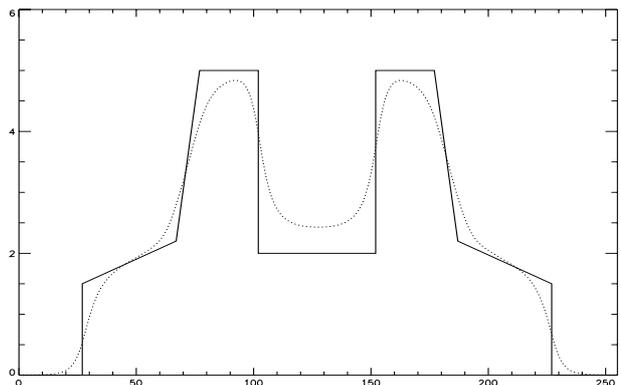


FIG. 5 — reconstructions à partir de données floues